Α.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.

ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού ηλεκτρομαγνητισμού.

ΛΥΡΙΤΖΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ

Εισηγητής: ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ 2016

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού ηλεκτρομαγνητισμού.

ΛΥΡΙΤΖΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ

ΑΜ: 40451

Εισηγητής:

Νικολόπουλος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Εξεταστική Επιτροπή:

Νικολόπουλος Δημήτριος

Γιαννακόπουλος Παναγιώτης

Κουκουλέτσος Κωνσταντίνος

Ημερομηνία Εξέτασης: 31-05-2016

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η κάτωθι υπογεγραμμένη ....ΛΥΡΙΤΖΗ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ...................................., του ………ΠΕΤΡΟΥ………, με αριθμό μητρώου ………40451…………….. φοιτητής/τρια του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ Συστημάτων Τ.Ε. του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. πριν αναλάβω την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μου, δηλώνω ότι ενημερώθηκα για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε.) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο του συγγραφέα, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικός υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας της Π.Ε., ο οποίος φέρει και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών του συγγραφέα σε περίπτωση που το Ίδρυμα του έχει απονείμει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφασης της, μετά από αίτηση του ενδιαφερόμενου, του αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση της Π.Ε. με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε. πρέπει να ολοκληρωθεί εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού 6μήνου από την ημερομηνία ανάθεσης της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18, παρ. 5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού.»

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η πτυχιακή μου εργασία ολοκληρώθηκε με την πολύτιμη βοήθεια του επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή μου κυρίου Δημήτριου Νικολόπουλου.

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού ηλεκτρομαγνητισμού.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο χώρος της Φυσικής που καλύπτουν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι πολύ μεγάλος. Οι σημειώσεις αυτές δεν αποτελούν πλήρη και συστηματική παράθεση της ύλης αλλά συμπληρωματικές γνώσεις.

Γίνεται μία προσπάθεια ώστε μέσα από την συζήτηση των Φυσικών εννοιών που συναντώνται και των σχέσεων μεταξύ τους να μεταδοθεί στους φοιτητές το πνεύμα της Φυσικής όχι μόνο από την πλευρά του εμπειρισμού (empirism) αλλά και από την πλευρά του ορθολογισμού, με στόχο την προβολή της ευρύτερης ουσίας των φυσικών νόμων, των αιτίων και των συνεπειών τους.

Είναι γνωστό ότι η πραγματική και σε βάθος κατανόηση των διαφόρων εννοιών είναι δύσκολη και ότι πάντα χρειάζεται χρόνος και αρκετή σκέψη για να καταγραφεί και αφομοιωθεί η σημασία και η σπουδαιότητα τους π.χ μιας εξίσωσης. Υπό αυτό το πρίσμα, ορισμένες έννοιες, νόμοι ή αρχές, π.χ ο ηλεκτρομαγνητισμός,η αρχή διατήρησης της ορμής κ.α., αναπτύσσονται σε μεγαλύτερη έκταση και όπου είναι δυνατόν υπό διαφορετικές οπτικές γωνίες, για την πληρέστερη κατανόησή τους.

Μολονότι τα Μαθηματικά επιτρέπουν τις ιδέες να εκφράζονται με ακρίβεια και σαφήνεια η οποία δεν μπορεί να επιτευχθεί με λόγια, εν τούτοις η δυσκολία της Μαθηματικής ανάλυσης πολλές φορές εμποδίζει, αντί να βοηθά, το φοιτητή στην προσέγγιση και τη μελέτη της Φυσικής. Έτσι, κάποια σημεία των σημειώσεων αυτών φαίνονται να συμπιέζονται μεταξύ της ανάγκης για απλούστευση και της ανάγκης για κομψότητα και αυστηρότητα.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Φυσική
ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:Ταχύτητα, Έργο-Ενέργεια, Νόμοι του Νεύτωνα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 2
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Κεφάλαιο 3
ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Κεφάλαιο 4

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Κεφάλαιο 5

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Κεφάλαιο 6

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 7

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Κεφάλαιο 8

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 | ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα σώμα λέμε ότι κινείται σχετικά με ένα άλλο που το θεωρούμε ακίνητο όταν η θέση του αλλάζει με το χρόνο.Αν δεν αλλάζει η θέση του με το χρόνο,λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε σχετική ηρεμία.
Είναι φανερό λοιπόν,ότι η κίνηση και η ηρεμία είναι έννοιες σχετικές και εξαρτώνται από το αντικείμενο που χρησιμοποιούμε σαν σύστημα αναφοράς.

1.2 ΤΑΧΥΤΗΤΑ

<u>Διάνυσμα Θέσεως</u>

Το διάνυσμα θέσεως r(επιβατική ακτίνα) προσδιορίζει τη θέση ενός κινητού σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς που συνήθως είναι η αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων.

Ταχύτητα

$$\vec{U}=\frac{d\,\vec{r}}{dt} \qquad \vec{U}_{μέση}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Κατερσιανες:

$$\vec{U}=U_x\hat{u}_x+U_y\hat{u}_y+U_z\hat{u}_z$$

$$U=\sqrt{U_x^2+U_y^2+U_z^2}$$

$$U_x=\frac{dx}{dt},\ U_y=\frac{dy}{dt},\ U_z=\frac{dz}{dt}$$

Ακτινικές:

$$\vec{r}=r\cdot\hat{u}_r\Rightarrow\frac{d\,\vec{r}}{dt}=\hat{u}_r\frac{dr}{dt}+r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

$$U=\frac{dr}{dt}\hat{u}_r+r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

1.2.1 Μέση ταχύτητα

Ορίζουμε σαν μέση ταχύτητα του κινητού μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t' το

πηλίκο: $\frac{\Delta r}{\Delta t}$,δηλαδή, $\vec{U}_{μέση}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (ορισμός μέσης ταχύτητας)

$$\vec{U}=\lim\ \vec{U}_{ove}\Rightarrow\vec{U}=\lim\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\,\vec{r}}{dt}$$ (ορισμός ταχύτητας)

$$\vec{U}=\lim\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\Rightarrow\vec{U}=\lim\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\lim\ \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

όταν : $d\,\partial = 0 \rightarrow \Delta r \approx ds \rightarrow \Delta \vec{r} = \Delta s \hat{U}_\tau$ (διότι $\Delta \vec{r} \uparrow\uparrow \hat{U}_\tau$)

1.2.2 Στιγμιαία ταχύτητα

Η στιγμιαία ταχύτητα, υπολογίζεται με τη σχέση,

$$u = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \quad \text{ή} \quad u = \frac{dr}{dt}$$

με άλλα λόγια είναι η πρώτη παράγωγος της μετατόπισης ως προς το χρόνο,και είναι διάνυσμα εφαπτόμενο της τροχιάς

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΣΕ ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

- $\vec{U} = \frac{dr}{dt}\hat{u} + r\frac{d\,ur}{dr}$

Όταν dθ $0 \simeq \rightarrow d\hat{u}r - \hat{u}r$

Από το ορθογώνιο $dur = U_r \cdot tand\theta = ur \cdot sind\theta = ul\,d\theta \Rightarrow dur = urd\theta$

Επειδή όμως $ur = u\theta$ και $d\hat{u}r = u\hat{\theta}$ έπειτα ότι

$$d\hat{u}r = d\theta\, u\hat{\theta} \quad = \quad dr\frac{\hat{u}r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}u\hat{\theta}$$

$$\vec{U} = \frac{dr}{dt}\hat{u}r + r\frac{d\theta}{dr}u\hat{\theta}$$

Το $\frac{d\hat{r}}{dt}$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\tau}$, ενώ ο πρώτος όρος $\frac{dr}{dt}$ προέρχεται από την μεταβολή του μέτρου $r(t)$

1.3 Επιτάχυνση

Κάτι παρόμοιο, όπως ορίσαμε την ταχύτητα, μπορούμε να δώσουμε και τον ορισμό της επιτάχυνσης, που δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Η επιτάχυνση μετριέται σε ms^{-2} .

$$\vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Καρτεσιανές

$$a=\alpha x\,\vec{ux}+\alpha y\,\vec{uy}+\alpha z\,\vec{uz}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι:

$$a=\sqrt{ax^2+ay^2+az^2}$$

Σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων, εκφράζεται με τις συνιστώσες της:

$$\alpha x=\frac{dUx}{dt} \quad , \quad \alpha y=\frac{dUy}{dt} \quad , \quad \alpha z=\frac{dUz}{dt}$$

Εφαπτομενικές – Ακτινικές

Στις συνηθισμένες καμπυλόγραμμες επίπεδες κινήσεις, η επιτάχυνση α αναλύεται σε δύο συνιστώσες, μία εφαπτομενική α_τ που λέγεται επιτρόχια επιτάχυνση και μία κάθετη σε αυτή (ακτινική) α_N που λέγεται κεντομόλος επιτάχυνση.

$$\vec{\alpha}=\frac{d\,\vec{u}}{dr} \qquad = \qquad \alpha=\frac{du}{dt}\hat{U}+U\,\frac{d\,\hat{u\tau}}{dt}$$

$$\vec{U}=\hat{U\tau}*U$$

$$d\varphi\Rightarrow 0\Rightarrow d\,\hat{u\tau}\perp\hat{U\tau} \qquad d\,\hat{U\tau}\uparrow\uparrow\hat{Un}$$

$$d\,\hat{U\tau}=\hat{Un}*dp$$

$$\alpha=\frac{du}{dt}\hat{U\tau}+U\,\frac{d\,\hat{U\tau}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=\frac{du}{dt}\hat{U\tau}+\hat{U}_N\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{d\varphi}{ds}*\frac{ds}{dt}\Rightarrow\frac{d\varphi}{ds}=\frac{I}{R}$$

Από τις μαθηματικές πράξεις προκύπτει ότι :

$$\alpha=\frac{du}{dt}\hat{U\tau}+U*U*\frac{I}{R}*\hat{U}_N \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=\frac{du}{dt}\hat{U\tau}+\frac{u^2}{R}*\hat{U}_N$$

(εφαπτομενική ενίσχυση & κεντομόλος)

όπου U_N το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην καμπύλη τροχιά, δηλαδή έχει την διεύθυνση της στιγμιαίας ακτίνας καμπυλότητας.

Ο πρώτος όρος που αντιστοιχεί στην εφαπτομενική συνιστώσα, είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά και εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας, ενώ ο δεύτερος όρος που αντιστοχεί στη κάθετη συνιστώσα είναι διάνυσμα κάθετο στην τροχιά.

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_{\tau} = \frac{du}{dt} u\tau$$ **(εφαπτομενική)**

$$\alpha_{N} = \frac{u^2}{R} \hat{U}n$$ **(κεντρομόλος)**

$$\vec{\alpha} = \frac{du}{dt} \hat{U}\tau + \frac{U^2}{R} \hat{U}n$$ **(επιτάχυνση)**

1.4 Κυκλική Κίνηση

$$|\vec{r}| = |\vec{R}| = cos\theta$$

α) $\vec{U} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} \hat{ur} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u\theta} \Rightarrow u = r \frac{d\theta}{dt} \hat{u\theta}$

$$\Rightarrow \quad \vec{U} = \omega * r * u\tau$$

β) $U = \frac{ds}{dt}$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{Rd\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad U = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$ds = R * d\theta$$

1.4.1 Γωνιακή Ταχύτητα

Η γωνιακή ταχύτητα ω έχει μέτρο τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ

$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ $\quad\quad R=r\,sin\theta$

$\Rightarrow \quad U=r\,sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{U}=\vec{\omega}*x\,\vec{r} \quad \Rightarrow \quad U=\omega r sin\theta$

$U=R\frac{d\theta}{dt}$ (Αυτή η σχέση ισχύει μόνο για κυκλική κίνηση $\Rightarrow$ $R=ct$ = $r=ct$

Το διάνυσμα ω έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα περιστροφής. Η φορά προσδιορίζεται από τον αντίχειρα της δεξιάς παλάμης όταν τα δάκτυλα ακολουθούν τη στροφή. Η γωνιακή ταχύτητα μετριέται σε rad/s.

Συχνότητα: $f=\frac{\Delta N}{\Delta t}$ $\quad f=\frac{1}{T}$

$U=\omega*R$ $\quad U=\frac{2\pi R}{T}$ $\quad U=2\pi Rf$ $\quad \alpha=15\mathrm{sqrt}\,t$

1.4.2 Γωνιακή Επιτάχυνση

Η γωνιακή επιτάχυνση α ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας

$\vec{\alpha}\gamma=\frac{d\omega^{-1}}{dt}$ $\quad\quad \alpha\gamma=\frac{d\omega}{dt}$

Αν η διεύθυνση του άξονα περιστροφής δεν αλλάζει τότε το ω και $\vec{a}$ έχουν την ίδια διεύθυνση. Είναι παράλληλα αν αυξάνει η γωνιακή ταχύτητα και αντιπαράλληλα αν η γωνιακή ταχύτητα ελαττώνεται.

$$\alpha\tau=\frac{du}{dr} \quad \Rightarrow \quad \alpha\tau=\frac{d}{dt}(\omega*R)\Rightarrow\alpha\tau=R\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha\tau=R*\alpha\gamma$$

$$U=\omega*R$$

$$\alpha\nu=\frac{u^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha\nu=\omega^2*\frac{R^2}{R}\Rightarrow\alpha\nu=\omega^2*R$$

$$U=\omega*R$$

$$\vec{\alpha}=\frac{d\,\vec{u}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\,x\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}=\vec{\omega}x\,\frac{d\,\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}=\vec{\omega}x\,\vec{U}$$

$$\vec{U}=\vec{\omega}\,x\,\vec{v}$$

$$\vec{U}=\vec{\omega}x\,\vec{r}$$

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1

$$\alpha=\frac{du}{dt}\Rightarrow du=a\,dt\Rightarrow\int du=\int \alpha\,dt \quad \Rightarrow \quad \int du-\int 15\sqrt{f}\,d\theta\Rightarrow u-3=15\,\frac{t\,1/2+1}{1/2+1}$$

$$\Rightarrow \quad U-3=15\,\frac{t\,3/2}{3/2} \quad \Rightarrow \quad U=3-\frac{30}{3}+3/2 \quad \Rightarrow \quad U=3+10\,t^{3/2}$$

$$U=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=Udt\Rightarrow\int dx=\int 3+10\mathrm{t}^{3/2}\,dt \quad \Rightarrow \quad x-10=3\,t\,\frac{\int 10\mathrm{t}^{3/2-1}}{3/2+1} \quad \Rightarrow$$

$$x-10=3\mathrm{t}+10\frac{t^{5/2}}{5/2} \quad \Rightarrow \quad x-10=3\mathrm{t}+4\mathrm{t}^{5/2} \quad \Rightarrow \quad x=10+3\mathrm{t}+4\mathrm{t}^{5/2}$$ A

Παράδειγμα 1.2

$$\alpha=2-12\mathrm{t}^2$$

$$\alpha=\frac{du}{dt}\Rightarrow adt=\int du=\int\left(2-12\,t^2\right)dt \quad \Rightarrow \quad u-2=2\mathrm{t}\int -12\frac{t^3}{3}\Rightarrow u-2=2\mathrm{t}-4\mathrm{t}^3$$

$$U=2+2\mathrm{t}-4\mathrm{t}^3$$

$$U=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=Udt\Rightarrow\int dx=\int\left(2+2\mathrm{t}-4\mathrm{t}^{3}\right)dt\Rightarrow.......$$

Παράδειγμα 1.3

$$\alpha=\lambda\sqrt{u}$$

$$\alpha=\frac{du}{dt}\Rightarrow du=\alpha dt\Rightarrow du=\lambda\sqrt{u}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{\sqrt{u}}=\lambda\,dt\Rightarrow\frac{\int du}{\sqrt{u}}=\lambda\int dt \qquad \Rightarrow$$

$$\int u^{-1/2}du=\lambda t\Rightarrow\frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1}=\lambda t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U^{1/2}}{1/2}=\lambda\,t\Rightarrow\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=\frac{\lambda^{2}t^{2}}{4}dt$$

$$\int dx=\frac{\lambda^{2}}{4}\int t^{2}dt \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{\lambda^{2}}{4}\frac{t^{2}}{3}\Rightarrow x=\frac{\lambda^{2}}{12}t^{3}$$

Παράδειγμα 1.4

$$\alpha=-\lambda x$$

$$\alpha=\frac{du}{dt}\Rightarrow\alpha=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=\frac{u*du}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad -\lambda x=\frac{u*du}{dx}$$

$$-\lambda xdx=udu\Rightarrow\lambda\int xdx=\int udu$$

α) $-\lambda\frac{x^{2}}{2}=\frac{u^{2}}{2}\Rightarrow-\lambda\frac{x^{2}}{2}=\frac{u^{2}}{2}-\frac{4}{2} \qquad \Rightarrow \qquad -\lambda\frac{x^{2}}{2}=\frac{u^{2}}{2}-2$

β) $-\lambda\frac{x^2}{2}=\frac{u^2}{2}\Rightarrow-\lambda(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{2})=\frac{u^2}{2}$ $\Rightarrow$ $-\lambda\frac{x^2}{2}+2\lambda=\frac{u^2}{2}$

$\frac{-\lambda x^2}{2}=\frac{u^2}{2}-2$ $\Rightarrow$ $-\lambda\frac{\lambda^2}{2}+2\lambda=\frac{u^2}{2}$ $\Rightarrow$ $-2\lambda=-2\Rightarrow\lambda=1$

U=2α-10

$\alpha=\frac{du}{dt}$

$U=2\mathrm{a}-10\Rightarrow U=2\frac{du}{dt}-10$ $\Rightarrow$ $U-10=2\frac{du}{dt}\Rightarrow\frac{1}{2}dt=\frac{du}{U}+10$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}dt=\frac{dU}{u}$

$U=U-10$

$\frac{1}{2}dt=\frac{\int du}{u}\Rightarrow\frac{1}{2\mathrm{t}}=\ln u$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}t=\ln\frac{u-10}{20}\Rightarrow e^{0,5t}=u-10\, over20$ $\Rightarrow$

$U+10=20e^{0,5t}\Rightarrow U=-10+20e^{0,5t}$

$U=\frac{dx}{dt}\Rightarrow-10-20e^{0,5t}dt=dx$ $\Rightarrow$ $\int dx=\int -10+20e^{0,5t}dt$ $\Rightarrow$

$x-1=-10\mathrm{t}+\int 20e^{0,5t}dt$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

$x-1=-10+40\,e^{0,5t} \quad \Rightarrow \quad x=1-10\mathrm{t}+40\,e^{0,5t}$

Παράδειγμα 1.5

$\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$

$x(t)=\alpha t+\beta \Rightarrow x(t)=1*t+1 \Rightarrow x(t)=t+1$

$y(t)=\gamma t^2+\delta \Rightarrow y(t)=1*t^2+1 \Rightarrow y(t)=t^2+1$

1) $x(2)=2+1 \Rightarrow x(2)=3$ $\qquad \vec{U}x=\dfrac{x(3)-x(2)}{1} \Rightarrow Ux=1\,m/s$

$x(3)=3+1 \Rightarrow x(3)=4$

$y(2)=2^2+1 \Rightarrow y(2)=5$ $\qquad \vec{U}x=\dfrac{y(3)-y(2)}{1} \Rightarrow Uy=5\,m/s$

$y(3)=3^2+1 \Rightarrow y(3)=10$

$\Rightarrow \quad \vec{U}=\sqrt{26\mathrm{m}}/s$

2) $\vec{r}(1)=(1+1)\hat{i}+(1+1)\hat{j} \Rightarrow \vec{r}(1)=2\hat{i}+3\hat{j}$ $\qquad |r|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\,m$

$$Ux = \frac{dx}{dt} \Rightarrow Ux = 1\mathrm{m}/s \qquad Ux(1) = 1\mathrm{m}/s$$

$$U(1) = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$Uy = \frac{dy}{dt} \Rightarrow Uy = 2\mu \qquad Uy(1) = 2\mathrm{m}/s \qquad U(1) = \sqrt{5}\, m/s$$

$$\alpha x = dUxover\, dt \Rightarrow \alpha x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = 2 * \hat{j}$$

$$\alpha y = \frac{dUy}{dt} \Rightarrow \alpha y = 2$$

Παράδειγμα 1.6

$$\vec{U}o = 3\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{U}(3) = 9\hat{i} + 7\hat{j}$$

α) $\vec{U} = \vec{U}o + \alpha t \Rightarrow \vec{U} = (3\hat{i} - 2\hat{j}) + (\alpha x\hat{i} + \alpha y\hat{j})t \quad \Rightarrow \quad \vec{U} = (3 + \alpha xt)\hat{i} + (-2 + yt)\hat{j}$

$$\vec{U}(3) = 9\hat{i} + 7\hat{j} \quad \Rightarrow \quad 3 + \alpha x * 3 = 9$$

$$\Rightarrow \quad 3\mathrm{\alpha x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha x = 2\, m/s^2$$

$$-2 + \alpha y * 3 = 7 \qquad 3\mathrm{\alpha y} = 3 \qquad \alpha y = 3\, m/s^2$$

$$\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\alpha = \sqrt{(2^2 + 3^2)} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(4+9)} \Rightarrow \alpha = \sqrt{13}\, m/s^2$$

β) $x(t)=Uoxt+\frac{1}{2}\alpha xt^2 \Rightarrow x(t)=3\mathrm{t}+\frac{1}{2}2\,t^2 \Rightarrow x(t)=3\mathrm{t}+t^2$

$$y(t)=Uoxt+\frac{1}{2}\alpha yt^2 \Rightarrow y(t)=-2\mathrm{t}+\frac{1}{2}3\mathrm{t}^2 \Rightarrow y(t)=-2\mathrm{t}+\frac{3}{2}t^2$$

Παράδειγμα 1.7

$\vec{r}=3\cos 2\mathrm{t}\,\hat{ux}+3\,sin2t\,\hat{j}$

x=3cos2t $\qquad x^2+y^2=3\cos 2\mathrm{t}+3^2(sin2t)$

y=3sin2t $\qquad \Rightarrow x^2+y^2=2\cos^2(2\mathrm{t})+\sin^2(2\mathrm{t}) \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=5$

$$Ux=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(3\cos 2\mathrm{t})=3\frac{d}{dt}(\cos^2(t))=3\sin 2\mathrm{t}(2\mathrm{t})'=6\,sin2t$$

$$Uy=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(3\sin(2\mathrm{t}))=3\frac{d}{dt}(sin2t=-3\cos^2(t))(2\mathrm{t})'=-6\cos 2\mathrm{t} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{U}=6\sin 2\mathrm{t}+\hat{ux}-6\cos 2\mathrm{t}\,\hat{uy}$$

Παράδειγμα 1.8

$x=\alpha t$

$y=20-\beta t^2$ α=4m/s $\quad \beta=1\mathrm{m}/s^2$

$\Rightarrow \quad X=4\mathrm{t}$

$$y=20-t^2$$

$$r=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}\Rightarrow r\;4*3\,\hat{i}t\,(20-3^2)\,\hat{j}\Rightarrow\vec{r}=12\,\hat{i}+11\,\hat{j}$$

$$|r|=\sqrt{(12^2+11^2)}=16{,}3\;m$$

$$Ux=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(4\mathrm{t})=4\Rightarrow Ux=4\;m/s$$

$$Uy=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(20\mathrm{t}^2)=2\mu\Rightarrow Uy=2\mu$$

$$U(3)=\sqrt{(4^2+(2*3)^2)}=\sqrt{(16+36)}=\sqrt{52}$$

$$\alpha x=\frac{dUx}{dt}=\frac{d}{dt}4=0 \qquad \alpha y=\frac{dUy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^2)=2\mu$$

$$\alpha(3)=\sqrt{(0-(2*3)^2)}=6\mathrm{m}/s^2$$

Παράδειγμα 1.9

$$\alpha=\lambda t^2\,\hat{i}+\mu t\,\hat{j}$$

$$\lambda=3{,}6\,m/s^2 \qquad \mu=2{,}4\,m/s^3 \qquad \alpha=3{,}6\,t\,\hat{i}+2{,}4\,t\,\hat{j}$$

$$\alpha x=\frac{dUx}{dt}\Rightarrow dUx=\alpha x\,dt\Rightarrow d\;Ux=3{,}6\,tdt\Rightarrow Ux=3{,}6\,\frac{t^3}{3}$$

$$\alpha y = \frac{dUy}{dt} \Rightarrow dUy = \alpha y\, dt \Rightarrow dUy = 2{,}4\frac{t^2}{2}dt \Rightarrow Uy = 2{,}4\frac{t^2}{2}$$

$$Ux = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Uxdt \Rightarrow \int dx = \int \frac{3{,}6+3}{3}dt \qquad \Rightarrow \qquad x = 1{,}2\frac{t4}{4} \Rightarrow x = 0{,}3\,t^4$$

$$Uy = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = 1{,}2t^2 \Rightarrow \int dy = 1{,}2\frac{t^3}{3} \Rightarrow y = 0{,}4\,t^3$$

Παράδειγμα 1.10

$$x = 3\mathrm{t}^2 + 4 \qquad\qquad t^2 = x - \frac{4}{3}$$

$$y = 4\mu^2 + 3 \qquad\qquad y = 4\frac{(x-4)}{3} + 3 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{4}{3}x - (\frac{16}{3} + 3)$$

Παράδειγμα 1.11

$$\alpha x = -4\,sint$$

$$\alpha y = 3\,cost$$

$$\alpha x = \frac{dUx}{dt} \Rightarrow dUx = \alpha xdt \Rightarrow \int dUx = \int dx\,dt \qquad \Rightarrow$$

$$(Ux-4) = -4\int sint\,dt \Rightarrow Ux - 4\cos t = Ux - 4 = -4(cost+1)$$

$\Rightarrow \quad Ux-4=4\,cost-4 \Rightarrow Ux=cost$

$\alpha y=\frac{duy}{dt} \Rightarrow duy=\alpha y\,dt..... \quad \Rightarrow \quad Uy=3\text{sint}$

$\frac{dx}{dt}=3\,sint \Rightarrow dy=3\,sint\,dt \Rightarrow y=-3\,cost$

$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

Παράδειγμα 1.12

αγ=24 μ
θ=0 t=0 ωο=2rad/s

$\alpha\gamma=\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega=\alpha\gamma dt \Rightarrow \int d\omega=24\int t\,dt \quad \Rightarrow \omega-2=24\frac{t^2}{2} \Rightarrow \omega-2=2\,t^2$

$\Rightarrow \omega=2+\left(2\,t^2\right)$

$\omega=\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta=\omega dt \Rightarrow \int d\theta=\int 2\text{t}12\text{t}^2\,dt \quad \Rightarrow \quad \theta=2\mu+12\,\frac{t^3}{3}$

$\Rightarrow \theta=2\mu+4\text{t}^3$

Παράδειγμα 1.13

$\alpha\gamma = 2\mu - 10$

R=3m   ωo=25rad/s

So=;   αN=;   αT=;

$\alpha\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha\gamma dt \Rightarrow \int \alpha\omega = \int 2\mathrm{t} - 10\, dt$

$\omega - 25 = \frac{2\tau^2}{2} - 10\mu \Rightarrow \omega - 25 = t^2 - 10\mathrm{t} \Rightarrow \omega = 25\mathrm{t}^2 - 10\mathrm{t}$

Παράδειγμα 1.14

$\Theta = \alpha t^2 + Bt$

$\alpha = 1\, rad/s^2$ $\Theta = t^2 + 2\mathrm{t}$

$B = 2\, rad/s^2$

$R = 0{,}1\, m$

$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{u} \Rightarrow \omega = 2\mathrm{t} + 2$

$u=\omega*R \quad \Rightarrow \quad u=(2t+2)0{,}2 \quad \Rightarrow \quad u=0{,}4t+0{,}4$

$\alpha\gamma=\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow\alpha\gamma=2\mathrm{m}/s^2$

$\alpha\tau=\frac{u^2}{R}\Rightarrow\alpha\tau=\frac{(0{,}4t+4)^2}{0{,}2}$

$\omega=\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow d\theta=\omega dt\Rightarrow\int d\theta=\int 25+t^2-10t\,dt \quad \Rightarrow \quad \theta=25t+\frac{t^3}{3}-5t$

$\omega=0\Rightarrow 25-10t+t^2=0\Rightarrow(t-5)^2=0\Rightarrow t=5$

$S=\theta R\Rightarrow S(t)=75t+t^3-15t \quad \Rightarrow \quad S(5)=125\mathrm{m}$

$\alpha\tau=\frac{du}{dt}$

$\Rightarrow \quad \alpha\tau=\frac{d}{dt}(\omega R)=R\frac{d\omega}{dt}=R\alpha\gamma \qquad \alpha\tau=R\alpha\gamma$

$u=\omega*R$

$\alpha N=\frac{u^2}{R}\hat{uN}$

ατ=67-30 ⇒ ατ=30-30 ⇒ ατ=0

u(3)=0 ⇒ $\alpha N=\frac{0^2}{3}uN\Rightarrow\alpha N=0$

Παράδειγμα 1.15

αγ=12t+2
ω=0 θ=0

$$\alpha\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha\gamma dt \Rightarrow \int d\omega = \int 12\mathrm{t} + 2\, dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{12\mathrm{t}^2}{2} + 2\mathrm{t} \Rightarrow \omega = 6\mathrm{t}^2 t^2\, t$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int d\theta = \int 6\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t}\, dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{6\mathrm{t}^3}{3} + \frac{2\mathrm{t}^2}{2} \Rightarrow \theta = 2\mathrm{t}^3 + t^2$$

Παράδειγμα 1.16

$R = 12\mathrm{m}$ $\qquad \vec{U} = \frac{dr}{dt}\hat{ur} + r\frac{d\hat{ur}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{U} = \frac{dr}{dt}\hat{ur} + \frac{d\theta}{dt}\hat{u\theta}$

$S = t^3 + 3$ $\qquad \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad U = \omega * 2\,\hat{u\theta}$

U=; α=; $\qquad s = t^3 + 3 \Rightarrow \theta = (t^3 + 3)/12 \Rightarrow \theta = \frac{t^3}{12} + \frac{1}{4}$

t=2 $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{t^2}{4} \Rightarrow u = \omega * R = \frac{t^2}{4} \Rightarrow u = 3\mathrm{t}^2$

β) $U = \frac{ds}{dt} \Rightarrow U = 3\mathrm{t}^2$

$$\alpha = \frac{dU}{dt}\hat{U\tau} + \frac{u^2}{R}\hat{Un} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dR} = 6\mathrm{t}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 | ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

2.1 Νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση

- Ο πρώτος Νόμος ισχυρίζεται ότι ένα αδρανειακό σύστημα υπάρχει μεν,αλλά με κάποια αυθαίρετη ακρίβεια. Αν μπορέσουμε να φτιάξουμε ένα αδρανειακό σύστημα στο οποίο να έχουν εξουδετερωθεί όλες οι δυνάμεις με τη μεγαλύτερη δυνατή λεπτομέρεια, τότε ο Πρώτος Νόμος του Newton φαίνεται να ισχύει. Η μαθηματική διατύπωση του Νόμου είναι : $F=0$
- Ο δεύτερος Νόμος διατυπώνεται ως εξής:
  Σε ένα αδρανειακό σύστημα η εφαρμοζόμενη δύναμη ισούται με μεταβολή της ορμής.
- Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του Newton, οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται κατά ζεύγη: Σε κάθε δράση υπάρχει πάντοτε μία ίση και μία αντίθετη αντίδραση.

2.2 Δυνάμεις πεδίου και δυνάμεις από επαφή

Υπάρχουν μερικά είδη δυνάμεων όπως η δύναμη βαρύτητας, η ηλεκτροστατική δύναμη,η μαγνητική δύναμη καθώς και άλλες όπως οι ισχυρές αλλά με μικρή εμβέλεια πυρηνικές δυνάμεις.
Τα σωματίδια μπορούν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με τέτοιες δυνάμεις ακόμα και αν βρίσκονται στο κενό χώρο, μακριά το ένα από το άλλο.
Αν ένα σωματίδιο δέχεται μία συνισταμένη δύναμη, που οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις βαρύτητας με άλλα σώματα ή σωματίδια, μπορούμε να πούμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται σε ένα πεδίο βαρύτητας που παράγεται από τα άλλα

σώματα.
Όταν ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σώμα δέχεται δύναμη, που οφείλεται σε ηλεκτρικά φορτία κατανεμμημένα πάνω σε άλλα γειτονικά σώματα,τότε προκύπτει ότι το φορτισμένο σωματίδιο βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.
Όλες οι παραπάνω δυνάμεις χαρακτηρίζονται σα δυνάμεις πεδίου.
Οι δυνάμεις επαφής, όπως η τάση του νήματος που συγκρατεί τη μάζα ενός εκκρεμούς,η δύναμη που ασκεί ένα επίπεδο σώμα που ηρεμεί πάνω σε αυτό, η δύναμη τριβής.
Συχνά οι δυνάμεις πεδίου και οι δυνάμεις επαφής που συνυπάρχουν,στις ταλαντώσεις του εκκρεμούς μέσα σε βαρυτικό πεδίο, όπου η μάζα του σώματος ασκείται η δύναμη από το νήμα(δύναμη επαφής) και το βάρος του σώματος (δύναμη πεδίου).

2.3 Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

“Μεταξύ δύο σωμάτων μαζών m_1 και $m2$ που βρίσκονται σε απόσταση r αναπτύσσεται μια αμοιβάια δύναμη έλξης F , η οποία είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης αυτών”

$$F=-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$ στη διανυσματική έχει πάντοτε φορά από το ελκτικό κέντρο προς τα έξω, αντιθέτως η ελκτική δύναμη F έχει φορά προς το ελκτικό κέντρο και αυτό δηλώνεται με το αρνητικό πρόσημο. Ο παράγοντας G είναι μια θετική σταθερά που λέγεται σταθερά της παγκόσμιας έλξης και έχει τιμή

$$G = 6{,}67 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης εξαρτάται μόνο από τις μονάδες που εκφράζεται και καθόλου από το χρόνο,τη θερμοκρασία, τη θέση ή κάποια άλλη ιδιότητα της ύλης. Ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης όπως διατυπώθηκε από τον Newton, ισχύει μόνο για σώματα(υλικά σημεία) και όχι για εκτεταμένα σώματα, προφανώς διότι ο ακριβής ορισμός της απόστασης μεταξύ των σωμάτων είναι αβέβαιος.
Γνωρίζουμε ότι όταν υπάρχει κάπου μία μάζα m,τότε ο χώρος γύρω της ενεργοποιείται. Η ενεργοποίηση αυτή εκδηλώνεται με την εμφάνιση δυνάμεων. Ο χώρος γύρω από την μάζα m καθιστάται τότε ένα πεδίο δυνάμεων, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το πεδίο βαρύτητας.Κάθε σημείο του πεδίου βαρύτητας, όπως και σε κάθε άλλο πεδίο, χαρακτηρίζεται από δύο μεγέθη την ένταση που είναι διανυσματικό μέγεθος και το δυναμικό που είναι βαθμωτό μέγεθος.

Βάρος ενός σώματος λέγεται η ελκτική δύναμη που ασκεί η Γη πάνω στο σώμα.

$$B = m * g$$

g=επιτάχυνση βαρύτητας
ένταξη πεδίου βαρύτητας

$$F = B \quad \Rightarrow \quad G = \frac{m * M}{r^2} = m * g \quad \Rightarrow \quad g = G \frac{M}{r^2}$$

2.4 Ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις σε φορτισμένο σωματίδιο

Ο νόμος του Coulomb:
Δύο σημείακά ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2 ετερώνυμα ή ομώνυμα, έλκονται ή απωθούνται αντίστοιχα με δύναμη F που είναι ανάλογη με το γινόμενο των φορτίων και αντίστροφα ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης τους.

$$F = k\frac{Q1 * Q2}{r^2} \quad , \quad k = 9*10^2\, Nm^2/c^2$$

το r σε (m), τα $Q_1 \kappa\alpha\iota Q_2$ σε Coulomb.

Ο παραπάνω νόμος του Coulomb ισχύει για φορτισμένα σωματίδια που δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο ή σχετικά με τον παρατηρητή.

2.5 Κίνηση ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο

α) $\vec{U} \perp \vec{B}$ $\quad R = \frac{mu}{B\rho}$

$$U=\omega * R \Rightarrow U=\omega \frac{mu}{B\rho} \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{Bp}{m} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi m}{Bp}$$

β) $\vec{U}\, \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varphi\, \vec{B}$

$$Uox=Uocosy$$

$$Uoy=Uosiny$$

$$Ux=Uocosyt$$

$$R=\frac{mUoy}{Bp} \quad \Rightarrow \quad R=\frac{mUsiny}{Bp}$$

2.6 Δυνάμεις επαφής (τριβή)

Η δύναμη τριβής εξαρτάται κατά πολύπλοκο τρόπο από την ταχύτητα του σώματος. Εδώ εξετάζουμε την απλούστερη περίπτωση κατά την οποία η δύναμη τριβής θεωρείται σταθερή, είτε το σώμα κινείται είτε είναι σε ηρεμία.Όταν το σώμα μένει ακίνητο,η δύναμη τριβής(στατική τριβή) είναι τόση,όση χρειάζεται για να διατηρηθεί η ισορροπία. Στην περίπτωση που το σώμα ολισθαίνει σχετικά με ένα άλλο, έχουμε τριβή ολίσθησης.

α) Τριβή ολίσθησης:

Οφείλεται στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στα μόρια των δυο σωμάτων, το αποτέλεσμα των οποίων λέγεται συνοχή, ανάλογα με το αν δύο σώματα είναι από το ίδιο ή διαφορετικό υλικό. Η δύναμη της τριβής είναι: $T=\mu \cdot N$ όπου η σταθερά της αναλογίας (μ) λέγεται συντελεστής ολίσθησης. Η φορά της Τ είναι πάνοτε αντίθετη από την φορά της σχετικής ταχύτητας του σώματος.

β) Στατική τριβή:

Πριν ακόμα αρχίσει η μετακίνηση του σώματος, όσο αυξάνει η δύναμη F τόσο αυξάνει και η τριβή f. Αυτή λέγεται στατική τριβή. Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής είναι : $f_s, max = \mu_s N$ όπου μ_s ο συντελεστής στατικής τριβής.

2.7 Δυνάμεις τριβής σε ρευστά

2.7.1 Μελέτη κίνησης Σωματίου υπό την επίδραση τριβής ρευστού

Όταν ένα σώμα κινείται με μικρή ταχύτητα μέσα σε ρευστό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη τριβής, είναι ανάλογη με την ταχύτητα και έχει φορά αντίθετη από αυτήν. Δηλαδή είναι: $T = -K \cdot n \cdot u$ όπου ο το K εξαρτάται από το σχήμα του σώματος.

Στρωτή Ροή: $\vec{F} = -6\pi r n \vec{u}$

Ο συντελεστής n εξαρτάται από την εσωτερική τριβή του ρευστού, δηλαδή τη δύναμη τριβής μεταξύ των διαφόρων στρωμάτων που κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες.Αν η ταχύτητα, σε κάθε σημείο του πεδίου, έχει τιμή ανεξάρτητη του χρόνου, η ροή ονομάζεται στρωτή ή μόνιμη.

Διαστατική Ανάλυση: $[F]=[r^2][n][u] \Rightarrow N=m[n]ms^{-2}$

$$\Rightarrow \quad kg\, s^{-1}=m\, s^{-2}[n]$$

$$\Rightarrow \quad [n]=kg*m^{-1}s^{-1} \quad \Rightarrow \quad Poise=g*c\,m^{-1}s^{-1}$$

$$\Sigma F=m*a \Rightarrow F-6\pi r n U=m*a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{r}U$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}U \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}}U=dt$$

$$g=\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}U \quad \Rightarrow \quad d\xi=\frac{-6\pi r n}{m}du \Rightarrow du=\frac{-m}{6\pi r n}d\xi$$

$$\frac{du}{\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}}U \quad \Rightarrow \quad dt \Rightarrow -\frac{m}{6\pi r n}*\frac{d\xi}{\xi}=dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\xi}{\xi}=\frac{-6\pi r n}{m}dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}U$$

$$\ln\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{6\pi r n}{m}t \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}U}{\frac{F}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{6\pi r n}{m}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{F}{m}-\frac{6\pi r n}{m}U}{\frac{F}{m}} \quad \Rightarrow \quad e\frac{-6\pi r n}{m}t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{m} - \frac{6\pi rn}{m} U \Rightarrow \frac{F}{m} e - \frac{6\pi rn}{m} t \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{m}(1 - e - \frac{6\pi rn}{m})t \quad \Rightarrow \quad \frac{6\pi rn}{m} U$$

$$y = \frac{F}{6\pi rn} t - \frac{F}{6\pi rn} * \frac{m}{6\pi rn}(1 - e - \frac{6\pi rn}{m} t) \quad \Rightarrow \quad U o\rho = \frac{F}{6\pi rn}$$

$$\Rightarrow \quad y = U o\rho\, t - U o\rho \frac{m}{6\pi rn}(1 - e - \frac{6\pi rn}{m} t) \quad \Rightarrow$$

$$y = U o\rho (t - \frac{m}{6\pi rn}(1 - e - \frac{6n}{m} t))$$

<u>Κίνηση υπό την επίδραση Fout,A , mg</u>

Ισορροπία δυνάμεων: $T + A = mg \Rightarrow 6\pi rn \mathrm{U}o\rho - \varepsilon V = mg$

$$\Rightarrow \quad 6\pi rn \mathrm{U}o\rho - dsg \frac{4}{3} \pi r^3 = ds * \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi rn \mathrm{U}o\rho = (ds - du) \frac{4}{3} \pi / r^2 g$$

$$\Rightarrow \quad U o\rho = (ds - du) \frac{4r^2}{18} \pi g$$

2.8 Μελέτη κίνησης υπό την επίδραση τριβής ρευστού τύπου τυρβώδους

Όταν η ταχύτητα είναι μεγάλη, η ροή γίνεται τυμβώδης και εμφανίζονται περιοχές που το ρευστό εκτελεί περιστροφική κίνηση (στρόβιλοι).
Στην περιοχή των στροβίλων η ταχύτητα του ρευστού είναι μεγάλη, με συνέπεια η πίεση P2 να είναι μικρότερη από την πίεση P1(υποπίεση). Εκτός από την αντίσταση λόγω τριβών, ασκείται και μία δύναμη λόγω της διαφοράς πίεσης.

Ελεύθερη πτώση μεγάλου σώματος: $\Sigma f = m*a \Rightarrow m*g - f = m*a$

$$m*g-\frac{1}{2}cdsu^2=m*a \Rightarrow a=g-\frac{cds}{2\mathrm{m}}u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt}=g-\frac{cds}{2\mathrm{m}}u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{g-\frac{cds}{2\mathrm{m}}u^2}=dt$$

$$\frac{du}{g-\frac{cds}{2\mathrm{m}}u^2}dt=\frac{du}{\frac{cds}{2\mathrm{m}}(g\frac{2\mathrm{m}}{cds}-u^2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{B}*\frac{du}{(\frac{2\mathrm{gm}}{cds}-u^2)} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{cds}{2\mathrm{m}}$$

$$\frac{du}{\frac{2\mathrm{gm}}{cds}-u^2}=\frac{du}{A-u^2}=\frac{du}{(A-u)(A+u)} \quad \Rightarrow \quad A=\sqrt{\frac{2\mathrm{mg}}{cds}}$$

Υπολογισμός $\frac{du}{(A-u)(A+u)}$

$$\frac{1}{(A-u)(A+u)}=\frac{\alpha}{A-u}+\frac{\beta}{A+u}\Rightarrow\frac{1}{(A-u)(A+u)}=\frac{\alpha(A+u)+\beta(A-u)}{(A-u)(A+u)}$$

$$(\alpha A+\beta A)+(\alpha A-\beta A)U=1+0 \quad \Rightarrow \quad \alpha A+\beta A=1$$

$$\Rightarrow \qquad 2\alpha A=1 \Rightarrow \alpha A=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}A$$

$$\alpha A-\beta A=0$$

$$\frac{1}{2}+\beta A=1 \Rightarrow \beta A=\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}A$$

$$\frac{1}{(A-u)(A+u)}=\frac{1}{2}*\frac{1}{A-u}+\frac{1}{2}*\frac{1}{A+u} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{(A-u)(A+u)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{A-u}du+\frac{1}{2})\frac{1}{A+u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln(A-u)+\frac{1}{2}\ln|A+u| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln(A-u)(A+u) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\ln(A^2-u^2)$$

$$\frac{\int du}{g-\frac{cds}{2\mathrm{m}}u^2}=\int dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\frac{1}{B}*1}{2}\ln(A^2-u^2)-t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{cds}*\frac{1}{2}\ln(\frac{2\mathrm{ms}}{cds}-u^2)t$$

$$\Rightarrow \qquad \ln(\frac{2\mathrm{ms}}{cds}-u^2)=2\mathrm{cdst} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2\mathrm{ms}}{cds}-u^2=e^{t2cdst} \qquad \Rightarrow \qquad U^2=\frac{2\mathrm{mg}}{cds}-e^{2\mathrm{cdst}}$$

2.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΥ

Κίνηση ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο: $\vec{F}=m\vec{a}x \Rightarrow \vec{E}*e=m\vec{a} \Rightarrow \vec{a}=\frac{\vec{E}*e}{m}$

α) $\vec{U}o \uparrow\uparrow \vec{E}$: Επιβραδυνόμενο

$$\alpha=\frac{E*e}{m} \quad , \quad U=Uo-at \quad , \quad X=Uot-\frac{1}{2}at^2$$

Χρόνος μέχρι να σταματήσει :

$$U=0 \Rightarrow Uo-at_{OA}=0 \Rightarrow t_{OA}=\frac{Uo}{0}$$

$$Xo=Uot_{OA}-\frac{1}{2}\alpha\mu^2 \Rightarrow X_{OA}=\frac{Uo^2}{2\alpha}$$

β) $\vec{U} \uparrow\downarrow \vec{E}$:Επιταχυνόμενο

$$\vec{a}=\frac{\vec{E}*e}{m}$$

Χρόνος:

$$U=Uo+\alpha t \quad , \quad X=Uot+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

γ) $\vec{U} \perp \vec{E}$

Ταχύτητα : $\vec{U}=\vec{U}x+\vec{U}y$

Ταχύτητα σε ένα σημείο : $U=\sqrt{Ux^2+Uy^2}$, $tan\Theta=\frac{Ux}{Uy}$

δ) $\vec{U}o\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ \varphi\ \pi\rho o\varsigma\ \vec{E}$

$$Ux=Uocosy$$

$$X=Uxt\Rightarrow X=Uocost$$

$$Uy=Uosin-\alpha t$$

$$y=Uosin-\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$U=\sqrt{Ux^2+Uy^2}$, $tany=\frac{Ux}{Uy}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 | ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

3.1 Εισαγωγή

Μία σημαντική εφαρμογή της διανυσματικής άλγεβρας είναι η σύνθεση δυνάμεων. Ο ακριβής ορισμός της δύναμης θα δοθεί παρακάτω,όπου θα αναπτυχθεί η δυναμική της κίνησης. Για να αυξήσουμε όμως τη δεξιοτεχνία μας στο χειρισμό διανυσμάτων, θα μελετήσουμε εδώ τη σύνθεση δυνάμεων και ειδικότερα την ισορροπία δυνάμεων, ένα πρόβλημα που έχει πλατιά εφαρμογή στη μηχανική.
Η καθημερινή εμπειρία μας επιτρέπει να σχηματίσουμε την έννοια της δύναμης ,όπως είναι η δύναμη που χρειάζεται για να σηκώσει ένα ορισμένο βάρος,η δύναμη που εξασκείται από ορισμένα εργαλεία κτλ. Η έννοια αυτή μας καθοδηγεί να συμπεράνουμε ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος,έχει δηλαδή μέτρο(ή ένταση) και μία φορά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε μόνο δυνάμεις που εξασκούνται σε σημαντικές μάζες ή σωματίδια και σε στερεά σώματα.
Στο σύστημα SI, η μονάδα της δύναμης είναι το newton(που συμβολίζεται με N)

3.2 Σύνθεση συντρεχουσών δυνάμεων

Αν οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες (αν δηλαδή εφαρμόζονται όλες στο ίδιο σημείο),η συνισταμένη τους είναι το διανυσματικό τους άθροισμα. Επομένως, η συνισταμένη R των συντρεχουσών δυνάμεων F1, F2,F3..........είναι

$$R=F1+F2+F3+.......=\Sigma F1$$

Αν οι δυνάμεις είναι συνεπίπεδες, πχ όλες βρίσκονται στο επίπεδο XY, έχουμε ότι

$R = u\chi R\chi + uyRy$ όπου $R\chi = \Sigma Fi\chi$ $Ry = \Sigma Fiy$

Το μέτρο της R είναι ίσο με $R = \sqrt{R^2\chi + R^2 y}$ και η φορά της δίνεται από τη γωνία α που ορίζεται από τη σχέση $\tan\alpha = Ry/R\chi$

Παράδειγμα 3.1

Να βρεθεί η συνισταμένη των ακόλουθων δυνάμεων που εξασκούνται στο σημείο Ο ενός σώματος.Η δύναμη F1,είναι ίση με 1200 N,η F2 με 900 N και η F3 με 300 N.Οι κατυθύνσεις των δυνάμεων φαίνονται στο σχήμα.

Πρώτα εκφράζουμε κάθε δύναμη συναρτήσει των συνιστωσών της, κατά μήκος των αξόνων X και Y χρησιμοποιώντας κάθε φορά τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του θετικού άξονα των X και της δύναμης. Έχουμε δηλαδή ότι:

F1=uχ(1200)N,

$$F2 = u\chi(F2\cos 40^0) + uy(F2\sin 40^0) = u\chi(689.4) + uy(578.5)N$$

$$F3 = u\chi(F3\cos 120^0) + uy(F3\sin 120^0) = u\chi(-150) + uy(259.8)N$$

Επομένως, αφού R= F1+F2+F3 , έχουμε

Rχ=1200+689.4-150=1739.4 N

Ry=0+578.5+259.8=838.3 N

ή

R=uχ(1739.4)+uy(838.3)N

από την τελευταία αυτή σχέση εξάγονται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης R=1930.9 N και α=25.7

3.3. Ροπή

Θεωρήστε μία δύναμη F, με σημείο εφαρμογής το Α, που εξασκείται σε σώμα C, το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σημείο 0. Αν η δύναμη δεν περνάει από το σημείο 0, το σώμα θα αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το 0. Από την καθημερινή εμπειρία γνωρίζουμε ότι η ικανότητα της F να θέσει σε περιστροφή το σώμα αυξάνει με την απόσταση (που ονομάζεται μοχλοβραχίονας δύναμης) b=OB του 0 από τον άξονα εφαρμογής της δύναμης. Αναφέρουμε για παράδειγμα,ότι όταν θέλουμε να ανοίξουμε μία πόρτα, πάντοτε σπρώχνουμε ή τραβούμε δυο το δυνατό μακρύτερα από τους μεντεσέδες και προσπαθούμε η διεύθυνση της δύναμης που εξασκούμε να είναι κάθετη προς την πόρτα. Η εμπειρία αυτή μας υποδεικνύει να ορίσουμε μια φυσική ποσότητα τ,που ονομάζεται ροπή,σύμφωνα με τη σχέση $\tau = Fb$ ή ροπή=δύναμη x μοχλοβραχίονας δύναμης. Συνεπώς, η ροπή πρέπει να εκφραστεί σα γινόμενο της μονάδας της δύναμης επί τη μονάδα της απόστασης. Έτσι,στο σύστημα SI,η ροπή εκφράζεται ως newton – μέτρα ή Nm. Σημειώστε ότι η δύναμη μπορεί να μετατοπιστεί κατά μήκος του άξονα εφαρμογής της, χωρίς να αλλάξει η ροπή της προς το 0,γιατί η απόσταση b παραμένει η ίδια.

Από το σχήμα έχουμε ότι το b=τsinθ, οπότε μπορούμε να γράφουμε :

$$\tau = Frsin\theta$$

Συμπεραίνουμε ότι η ροπή μπορεί να θεωρηθεί διανυσματική ποσότητα που δίνεται από το διανυσματικό γινόμενο

$$\tau = r * F$$

όπου r είναι η επιβατική ακτίνα, ως προς το 0 του σημείου A, στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη. Σύμφωνα με τις ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου, η ροπή παριστάνεται με διάνυσμα που είναι κάθετο και στην r και στην F, δηλαδή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τις r και τις F. Η ροπή έχει την ίδια φορά που δείχνει ο αντίχειρας του δεξιού χεριού,όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα κλείνουν κατά την φορά περιστροφής που προκαλεί η F γύρω από το 0.Σημειώστε ότι η ροπή μιας δύναμης ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο συγκεκριμένο σημείο. Αν το σημείο αναφοράς αλλάξει , αλλάζει συνήθως και η ροπή της δύναμης.

Αν και η r και η F βρίσκονται στο επίπεδο XY, η διεύθυνση της ροπής $\tau = r * F$ είναι παράλληλη προς τον άξονα Ζ. Το μέτρο της μπορεί να υπολογιστεί με τον παρακάτω τρόπο.Οι ροπές των συνιστωσών της ως προς το 0 είναι :

ροπή της $F_x = -yF_x$

ροπή της $F_y = xF_y$

Η ροπή της F έχει μέτρο :

$$\tau = xF_y - yF_x$$

σε διανυσματική μορφή

$$\tau = uz(zF_y - yF_x)$$

Παράδειγμα 3.2.

Να υπολογιστεί η ροπή που εξασκείται στο σώμα του Σχ.4-5,όπου η F έχει μέτρο 6N και σχηματίζει γωνία 30 με τον άξονα X και το r έχει μήκος 45 cm και σχηματίζει γωνία 50 μοίρες με τον άξονα +x.

Μπορούμε να προχωρήσουμε κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτα από το σχήμα βλέπουμε ότι ο μοχλοβραχίονας της F (επειδή r=45 cm =0.45 m) είναι ίσος με $b = r \sin 20^0 = (0.45\mathrm{m})(0.342) = 0.154\mathrm{m}$ Έτσι το μέτρο της ροπής γύρω από το 0 είναι ίσο με :

$$\tau = Fb = (6\mathrm{N})(0.154\mathrm{m}) = 0.924\mathrm{Nm}$$

Η φορά της είναι κατά τη διεύθυνση των δειχτών του ρολογιού.

Δεύτερον, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση(4.7), αφού το πρόβλημα είναι δύο διαστάσεων. Έχουμε ότι:

$$x = r\cos 50^0 = 0.289\mathrm{m} \qquad y = r\sin 50^0 = 0.345\mathrm{m}$$

$$Fx = Fcos30^{0} = 5.196\text{N} \qquad Fy = F\sin 30^{0} = 3.0\text{N}$$

και

$$\tau = xFy - yFx = 0.867 - 1.792 = 0.925\text{Nm}$$

Η μέθοδος αυτή έχει το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι δίνει όχι μόνο το μέτρο, αλλά και τη φορά της ροπής.

3.4. Ροπή πολλών συντρεχουσών δυνάμεων

Αν θεωρήσουμε τώρα τη περίπρωση πολλών συντρεχουσών δυνάμεων F1,F2,F3... με κοινό σημείο εφαρμογής Α. Η ροπή καθεμιάς από τις δυνάμεις F1, ως προς το σημείο 0 είναι $r = r * F1$
Σημειώστε ότι γράφουμε r και όχι n γιατί όλες οι δυνάμεις συντρέχουν στο Α. Η ροπή της συνισταμένης R είναι ίση με $\tau = r * R$ όπου R=F1+F2+F3+..... και r είναι η κοινή επιβατική ακτίνα. Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα του διανυσματικού γινομένου και παίρνουμε :

$$r * R = r * (F1 + F2 + F3 + ...) \quad \Rightarrow \quad r * F1 + r * F2 + r * F3 + ...$$

Επομένως,

$$\tau = T1 + T2 + T3 + ... = \Sigma n$$

Δηλαδή, η ροπή της συνισταμένης ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών δυνάμεων όταν είναι συντρέχουσες. Η Εξ (4.8) δείχνει ότι το σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων μπορεί να αντικατασταθεί από μια μόνο δύναμη την συνισταμένη του, που είναι εντελώς ισοδύναμη με το σύστημα,όσον αφορά τις περιστροφές και τις μετατοπίσεις.

Παράδειγμα 4.3

Θεωρήστε τρεις δυνάμεις με κοινό σημείο εφαρμογής το Α του Σχ. 4-7 όπου r=1.5 m και

F1=u1(6)+ur(3)N

F2=u2(-2)+ur(7)N

F3=u3(5)+ur(-8)N

Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή αυτών των δυνάμεων ως προς το σημείο 0.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση τ=r*R , όπου R=ΣFi και παίρνουμε

R=ux(6-2+5)+uy(3+7-8)N = ux(9)+uy(2)N

Η τιμή αυτή και η σχέση r=ux(1.06)+ uy(1.06)m , μας δίνει τη συνισταμένη ροπή Εξ(4.7),

$$\tau = r * R = uz\left(xRy - yRx\right) \Rightarrow uz\left(2.12 - 9.54\right) = uz\left(-7.42\right) Nm$$

Η συνισταμένη ροπή μπορεί ακόμα να βρεθεί από την Εξ(4.8) ως τ=Τ1+Τ2+Τ3.

Εφαρμόζουμε τώρα την Εξ(4.7) σε κάθε συνιστώσα και βρίσκουμε

Τ1=r*F1=uz(-3.18)Nm

T2=r*F2=uz(9.54)Nm

T3=r*F3=uz(-13.78)Nm

Με πρόσθεση των τριών αυτών ροπών βρίσκουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για την Τ. Με αυτό τον τρόπο επαληθεύσαμε την Εξ(4.8).

3.5 Δυνάμεις που εξασκούνται σε στερεό σώμα

Όταν οι δυνάμεις δεν εξασκούνται στο ίδιο σημείο αλλά σε ένα στερεό σώμα , ξεχωρίζουμε δύο φαινόμενα,μετατοπίσεις και περιστροφές. Η μετατόπιση του σώματος καθορίζεται από το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων.

$$R = F1 + F2 + F3 + F4 + ... = \Sigma Fi$$

Σε αυτή την περίπτωση το σημείο εφαρμογής της R είναι ακόμα ορισμένο.Η περιστροφή του σώματος καθορίζεται από το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που υπολογίζονται ως προς το ίδιο σημείο.

$$\tau = \tau 1 + \tau 2 + \tau 3 + ... = \Sigma \tau i$$

Με μια πρώτη ματιά,φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι η δύναμη R θα έπρεπε να εξασκείται σε κάποιο σημείο έτσι ώστε η ροπή που ορίζεται στην R να είναι ίση με την τ,συνθήκη που πάντοτε ισχύει στην περίπτωση των συντρεχουσών δυνάμεων. Αν η εκλογή αυτή είναι δυνατή,η δύναμη R είναι ισοδύναμη με το σύστημα και ως προς την μετατόπιση του και ως προς την περιστροφή του.
Γενικά όμως,η εκλογή αυτή δεν είναι δυνατή γιατί η ροπή της R είναι διάνυσμα κάθετο στην R,ενώ σε πολλές περιπτώσεις τα διανύσματα R και τ,που δίνονται από τις παραπάνω εξισώσεις δεν είναι κάθετα. Επομένως,γενικά,σύστημα δυνάμεων που εξασκείται σε στερεό σώμα δεν μπορεί να αναχθεί σε μία μόνο δύναμη ή συνισταμένη ίση με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων.

Παράδειγμα 3.4

Ζεύγη

Ως ζεύγος ορίζεται ένα σύστημα δύο δυνάμεων με ίσο μέτρο και αντίθετη φορά,που βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες. Η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, R=F1+F2=0,δείχνοντας ότι το ζεύγος δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση. Από την άλλη πλευρά,το διανυσματικό άθροισμα των ροπών, λαμβάνοντας υπόψη το ότι F2=-F1, είναι

$$\tau=\tau 1+\tau 2=r1*F1+r2*F2=r1*F1-r2*F1=(r1-r2)*F1=b*F1$$

όπου b=r1-r2 είναι ο μοχλοβραχίονας του ζεύγους. Συνεπώς, $\tau \simeq c$ και το ζεύγος προκαλεί περιστροφή. Σημειώστε ότι το b είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου 0 και επομένως η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο 0 και επομένως η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο γύρω από το οποίο υπολογίζεται η ροπή. Προφανώς είναι αδύνατο να βρεθεί μία μόνο δύναμη που να ικανοποιεί όλες αυτές τις συνθήκες έτσι ώστε το ζεύγος δεν μπορεί με κανένα τρόπο να αντικατασταθεί από μία μόνο δύναμη.

Ένα σύστημα δυνάμεων μπορεί πάντοτε να αναχθεί σε μια δύναμη και ένα ζεύγος. Η δύναμη εκλέγεται να είναι ίση με R, έτσι που να προκαλεί την ίδια μετατόπιση και το σημείο εφαρμογής της είναι ίσο με το σημείο γύρω από το όποιο υπολογίζονται οι ροπές έτσι ώστε η ροπή της είναι μηδέν.Το ζέυγος εκλέγεται να έχει ροπή ίση προς τ έτσι ώστε να προκαλεί την ίδια περιστροφή.

Παράδειγμα 3.5

Να υπολογιστεί η συνισταμένη του συστήματος των συνεπίπεδων δυνάμεων .Τα μέτρα των δυνάμεων είναι F1=10N, F2=8N, F3=7N.Οι πλευρές κάθε τετραγωνιδίου είναι 2.1m.

Πρώτα γράφουμε κάθε δύναμη σε διανυσματική μορφή

$$F1 = ux(10)N$$
$$F2 = ux(F2cos135) + uy(F2sin135) = ux(-5{,}66) + uy(-5{,}66)N$$
$$F3 = -uy(7)N$$

Η συνισταμένη δύναμη R=F1+F2+F3 είναι ίση με $R = ux(4.34) + uy(-1.34)N$ ή R=4.54N και σχηματίζεται γωνία α=-17.1 μοίρες με τον άξονα X. Οι συντεταγμένες των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων είναι A(0.5m ,0.3m), B(0, 0.5m) και C(0.2m,0). Από την παραπάνω εξίσωση υπολογίζουμε τις ροπές

$$\tau = -(0.3\text{m})(10\text{N}) = -3.00\text{Nm}$$
$$\tau 2 = -(0.5\text{m})(-5.66\text{N}) = +2.83\text{Nm}$$
$$\tau 3 = (0.2\text{m})(-7\text{N}) = -1.40\text{Nm}$$

Επομένως , τ=τ1+τ2+τ3=-1.57 Nm και η ροπή είναι διάνυσμα κατά μήκος του άξονα Z.Για να βρούμε το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης,που έχει συντεταγμένες (x,y) εφαρμόζουμε την εξ(4.7). Βρίσκουμε :

$$x(-1.34) - y(4.34) = -1.57$$

ή

$$1.34\text{x} + 4.34\text{y} = 1.57$$

Αφού η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις,συμπεραίνουμε ότι η R μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σημείο της ευθείας SU.

3.6 Σύνθεση παράλληλων δυνάμεων

Θεωρήστε σύστημα παράλληλων δυνάμεων F1,F2,F3...Για ευκολία υποθέστε ότι όλες έχουν διεύθυνση κάθετη στον άξονα X στα σημεία χ1,χ2,χ3,... από την αρχή 0.

Η αλγεβρική τιμή της συνισταμένης αυτών των δυνάμεων είναι

$$R = \Sigma Fi = F1 + F2 + F3 + ...$$

Η ολική ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το 0 είναι :

$$\tau = \Sigma xiFi = xiF1 + x2F2 + x3F3 + ...$$

Η συνισταμένη δύναμη R πρέπει να εξασκηθεί σε σημείο C που έχει απόσταση xc

από το 0 έτσι ώστε xcR=τ ή $xc = \frac{\tau}{R} = \frac{\Sigma xiFi}{\Sigma Fi}$

Στη γενική περίπτωση,όπου οι παράλληλες δυνάμεις κατανέμονται σε χώρο τριών διαστάσεων οι συντεταγμένες του C δίνονται από τις σχέσεις :

$$xc = \frac{\Sigma xiFi}{\Sigma Fi} \quad , \quad yc = \frac{\Sigma yiFi}{\Sigma Fi} \quad , \quad zc = \frac{\Sigma zcFi}{\Sigma Fi}$$

Το σημείο C που δίνεται από τις παραπάνω εξισώσεις ονομάζεται κέντρο των παράλληλων δυνάμεων.Σε διανυσματική μορφή οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται :

$$r = \frac{\Sigma Fi}{\Sigma Fi}$$

Παράδειγμα 3.6

Να βρεθεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο του Σχ.4-10.

Παίρνουμε τη διεύθυνση προς τα πάνω σαν θετική και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση βρίσκουμε :

$$R = \Sigma iFi = F1 - F2 + F3 = 400\text{N}$$

Για να υπολογίσουμε το σημείο εφαρμογής της χρησιμοποιούμε τις Εξίσωση. Μόνο η πρώτη εξίσωση χρειάζεται, αφού οι δυνάμεις είναι παράλληλες προς τον άξονα Y. Παίρνοντας το σημείο A σαν αρχή βρίσκουμε :

$$xc=\frac{\Sigma Fixi}{\Sigma Fi}=\frac{(200\mathrm{N})(0.08\mathrm{m})+(-100\mathrm{N})(0.2\mathrm{m})+(300\mathrm{N})(0.4\mathrm{m})}{400\mathrm{N}}=0.29\mathrm{m}$$

Το σημείο εφαρμογής είναι ανεξάρτητο από την εκλογή της αρχής των αξόνων. Για να δείξουμε αυτό, ας πάρουμε το σημείο D σαν αρχή. Τότε :

$$xc=\frac{(200\mathrm{N})(-0.12\mathrm{m})+(-100\mathrm{N})(0\mathrm{m})+(300\mathrm{N})(0.2\mathrm{m})}{400\mathrm{N}}=0.09\mathrm{m}$$

Το σημείο αυτό είναι το ίδιο με το προηγούμενο αφού AD=0.20m

3.7 Κέντρο Μάζας

Σε κάθε σωματίδιο που βρίσκεται κάτω από την επίδραση του βαρυντικού πεδίου της γης,ασκείται δύναμη W, που ονομάζεται βάρος.Όταν m είναι η μάζα του σωματιδίου και g η επιτάχυνση της βαρύτητας,ισχύει η σχέση : $W=m*g$
Μολονότι η κατεύθυνση του g μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο,τα βάρη των σωματιδίων που συνιστούν ένα σώμα με μικρές σχετικά διαστάσεις,μπορούν να θεωρηθούν παράλληλα . Επομένως,το συνιστάμενο βάρος ενός σώματος δίνεται από την σχέση : $W=\Sigma i*mi*g$ όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα σωματίδια που αποτελούν το σώμα και έχει σημείο εφαρμογής το

$$rc = \frac{\Sigma rmg}{\Sigma} mg = \frac{\Sigma mr}{\Sigma m}$$

Μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες του rc ως,

$$xc = \frac{\Sigma mxi}{\Sigma m} \quad , \quad yc = \frac{\Sigma myi}{\Sigma m} \quad , \quad zc = \frac{\Sigma mzi}{\Sigma mi}$$

Το σημείο που ορίζεται από τις εξισώσεις, ονομάζεται κέντρο μάζας του συστήματος των σωματιδίων. Η έννοια του κέντρου μάζας είναι πολύ σπουδαία,όχι μόνο σε σχέση με τη σύνθεση παράλληλων δυνάμεων, αλλά ακόμα και με την ανάλυση της κίνησης ενός συστήματος σωματιδίων και ειδικότερα ενός στερεού σώματος.
Όταν ένα σώμα έχει κάποια συμμετρία ο υπολογισμός χρησιμοποιείται γιατί το κέντρο πρέπει να συμπίπτει με το στοιχείο συμμετρίας. Αν όπως σε μία σφαίρα,σε ένα παραλληλεπίπεδο κτλ, υπάρχει κέντρο συμμετρίας,το κέντρο μάζας συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας. Αν όπως σε ένα κώνο υπάρχει άξονας συμμετρίας, το κέντρο μάζας βρίσκεται πάνω στον άξονα .

Παράδειγμα 3.7

Να βρεθεί το κέντρο μάζας των σωματιδίων που είναι διατεταγμένα όπως φαίνεται στο Σχ 4-11. Οι τιμές των μαζών είναι m1=5Kg , m2=30Kg, m3=20Kg, m4=15Kg.Η πλευρά κάθε τετραγώνου είναι 5cm.

Πρώτα πρέπει να βρούμε την ολική μάζα m:

$$m = \Sigma mi = 5\mathrm{Kg} + 30\mathrm{Kg} + 20\mathrm{Kg} + 15\mathrm{Kg} = 70\mathrm{Kg}$$

Μετά χρησιμοποιούμε τη πρώτη και τη δεύτερη από τις εξισώσεεις. Το αποτέλεσμα είναι:

$$xr=\frac{(5)(0)+(30)(15)+(20)(30)+(15)(-15)}{70}=11.8\text{cm}$$

$$yc=\frac{(5)(0)+(30)(20)+(20)(0)+(15)(10)}{70}=10.7\text{cm}$$

Έτσι το κέντρο μάζας είναι το σημείο CM του Σχ.4-11

3.8 Ισσοροπία σωματιδίου

Ένα σωματίδιο βρίσκεται σε ισσοροπία όταν το άθροισμα όλων των δυνάμεων που εξασκούνται σε αυτό είναι μηδέν $\Sigma Fi=0$
Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις :

$$\Sigma Fix=0 \quad , \quad \Sigma Fiy=0 \quad , \quad \Sigma Fiz=0$$

Θα δούμε τώρα πως λύνονται μερικά προβλήματα ισορροπίας ενός σωματιδίου.

Παράδειγμα 3.8

Ισορροπία τριών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε σωματίδιο.

Θα θεωρήσουμε τις τρεις δυνάμεις που εικονίζονται. Αν οι δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία θα ισχύει η συνθήκη $F1+F2+F3=0$

Έτσι ώστε αν σχηματίσουμε ένα πολύγωνο με πλευρές τις δυνάμεις θα πάρουμε ένα τρίγωνο,όπως δείχνει το Σχ 4-13. Οι τρεις συντρέχουσες δυνάμεις πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Αν εφαρμόσουμε το νόμο των ημιτόνων σε αυτό το τρίγωνο έχουμε :

$$\frac{F1}{sin\alpha}=\frac{F2}{sin\beta}=\frac{F3}{sin\gamma}$$

είναι μία πολύ χρήσιμη σχέση που συνδέει τις τιμές των δυνάμεων και τις μεταξύ τους γωνίες.

Παράδειγμα 3.9

Ισορροπία σωματιδίου σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.

Στο σωματίδιο που ισορροπεί στο κεκλιμένο επίπεδο ΑΒ(Σχ 4-14),ασκούνται οι παρακάτω δυνάμεις: το βάρος του W, η έλξη F και η αντίδραση N κάθετη στο επίπεδο.Θέλουμε να εκφράσουμε τις F και N συναρτήσει των W, α και θ. Μπορούμε να προχωρήσουμε κατά δύο τόπους: Χρησιμοποιώντας την Εξ(4-13) και θεωρώντας τη γεωμετρία του Σχ 4-14 έχουμε

$$\frac{F}{\sin(180-\alpha)}=\frac{N}{\sin(90+\alpha+\theta)}=\frac{W}{\sin(90-\theta)}$$

από την οποία παίρνουμε για τα F και N

$$F=\frac{Wsin\alpha}{cos\theta} \qquad N=\frac{Wcos(\alpha+\theta)}{cos\theta}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να εισάγουμε άξονες X και Y, όπως φαίνεται στο σχήμα και να εφαρμόσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις(4.20).Το αποτέλεσμα είναι

$$\Sigma Fix = Fcos\theta - Wsin\alpha = 0$$

$$\Sigma Fiy = Fsin\theta - Wcos\alpha + N = 0$$

Από την πρώτη παίρνουμε:

$$Fcos\theta = Wsin\alpha \quad \text{ή} \quad F = \frac{Wsin\alpha}{cos\theta}$$

σε συμφωνία με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Από τη δεύτερη και από το αποτέλεσμα που ήδη πήραμε για την F, έχουμε :

$$N = Wcos\alpha - Fsin\theta = Wcos\alpha - \frac{Wsin\alpha sin\theta}{cos\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{W\left(cos\alpha cos\theta - sin\alpha sin\theta\right)}{cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{Wcos\left(\alpha+\theta\right)}{cos\theta}$$

πάλι δηλαδή το προηγούμενο αποτέλεσμα.Ο σπουδαστής θα πρέπει να αποφασίσει, σε κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα,ποια μέθοδος είναι η πιο σύντομη ή πιο βολική.

3.9 Ισορροπία στερεού σώματος

Όταν οι δυνάμεις ασκούνται σε στερεό σώμα,είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε ισορροπία και ως προς τις μετατοπίσεις και ως προς τις περιστροφές.Επομένως, απαιτείται να ικανοποιούνται και οι παρακάτω συνθήκες:

I. Το άθροισμα όλων των δυνάμεων πρέπει να είναι ίσο με μηδέν(ισορροπία ως προς τη μετατόπιση)

$$\Sigma Fi = 0$$

II. Το άθροισμα όλων των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν(ισορροπία ως προς την περιστροφή).

$$\Sigma ri = 0$$

Αν όλες οι δυνάμεις βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, οι συνθήκες ανάγονται στις παρακάτω τρεις εξισώσεις :

$$\Sigma Fix = 0 \quad , \quad \Sigma Fiy = 0 \quad , \quad \Sigma \tau i = 0$$

Αφού οι σχέσεις αυτές αντιστοιχούν σε σύστημα τριών εξισώσεων,για να υπάρχει λύση,θα πρέπει να έχουμε τρεις αγνώστους, επομένως, προβλήματα Στατικής σε επίπεδο λύνονται μόνον όταν υπάρχουν τρεις άγνωστες ποσότητες.

Παράδειγμα 3.10

Η ράβδος του Σχ.4-15 υποστηρίζεται από τα σημεία Α και Β και ισορροπεί κάτω από την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα.Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ράβδο στα σημεία Α και Β. Η ράβδος ζυγίζει 40N και το μήκος είναι 8m.

Εφαρμόζουμε πρώτα τη συνθήκη(4.22) ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις και παίρνουμε :

$$\Sigma Fi = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

ή

$$F + F' = 1140\text{N}$$

Μετά εφαρμόζουμε τη συνθήκη (4.23) ισορροπίας ως προς τις περιστροφές. Είναι πιο βολικό να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Α, γιατί με αυτό το τρόπο η ροπή της δύναμης F είναι μηδέν. Έτσι,

$$\Sigma ri = (-200)(-1) + F(0) + (-500)(2) + (-40)(3) + (-100)(4.5) + F'(5.5) + (-300)(7) = 0$$

ή $F' = 630.9\text{N}$. Από το αποτέλεσμα αυτό και την Εξ.(4.25) παίρνουμε $F = 509.1\text{N}$

Παράδειγμα 3.11

Μία σκάλα ΑΒ που ζυγίζει 160Ν, ακουμπάει σε κατακόρυφο τοίχο και σχηματίζει γωνία 60 μοίρες με το πάτωμα. Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σημεία Α και Β. Στο Α η σκάλα έχει ρόδες έτσι που η τριβή με τον κατακόρυφο τοίχο να θεωρείται αμελητέα.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα φαίνονται στο Σχ. 4-16. Το βάρος W βρίσκεται στο κέντρο C της σκάλας. Η δύναμη F1 χρειάζεται για να εμποδίσει τη σκάλα να γλιστρήσει και είναι αποτέλεσμα της τριβής με το πάτωμα.Οι δυνάμεις F2 και F3 είναι οι κάθετες αντιδράσεις στο πάτωμα και στον κατακόρυφο τοίχο. Χρησιμοποιώντας τις τρεις συνθήκες ισορροπίας που εκφράζονται με τις Εξ.(4.24), έχουμε :

$$\Sigma Fix = -F1 + F3 = 0$$

$$\Sigma Fiy = -W + F2 = 0$$

Έστω ότι L είναι το μήκος της σκάλας. Υπολογίζουμε τις γύρω από το σημείο B έτσι ώστε οι ροπές των άγνωστων δυνάμεων F1 και F2 να είναι μηδέν και έχουμε :

$$\Sigma ri = W\left(\frac{1}{2}cos60\right) - F3\left(Lsin60\right) = 0$$

$$F3 = \frac{W\left(\frac{1}{2}L\,cos60\right)}{2\sin 60} = 138.6\mathrm{N}$$

Οι Εξισώσεις δίνουν :

$$F1 = F3 = 138.6\mathrm{N}$$

και

$$F2 = W = 160\mathrm{N}$$

Σημειώστε ότι αν η σκάλα δεν έχει ρόδες στο A, στο ίδιο σημείο θα ασκείται μια πρόσθετη αντίσταση τριβής. Επομένως,θα έχουμε τέσσερις άγνωστες δυνάμεις και απαιτούνται πρόσθετες υποθέσεις για να λυθεί το πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 | ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο 1, μελετήσαμε την κινητική,δηλαδή τα στοιχεία που περιγράφουν την κίνηση ενός σώματος. Τώρα θα ερευνήσουμε τι κάνουν τα σώματα να κινούνται όπως κινούνται. Για τα σώματα που είναι κοντά στην επιφάνεια της γης πέφτουν με σταθερή επιτάχυνση. Γιατί η γη κινείται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά: Γιατί τα άτομα δένονται μεταξύ τους και φτιάχνουν μόρια. Θέλουμε να καταλάβουμε αυτές καθώς και άλλες κινήσεις που συνεχώς παρατηρούμε γύρω μας. Αυτή η κατεύθυνση είναι σπουδαία όχι μόνο γιατί πρέπει να καταλάβουμε τη φύση,αλλά και για τις πολλές μηχανολογικές και άλλες πρακτικές εφαρμογές. Για την κατανόηση της αιτίας και παραγωγής των κινήσεων μας δίνει τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε μηχανές και συσκευές που κινούνται. Η μορφή της σχέσης μεταξύ της κίνησης ενός σώματος και στις αιτίες κίνησης λέγεται δυναμική.

Από την καθημερινή μας εμπειρία ξέρουμε ότι η κίνηση ενός σώματος είναι το κατευθείαν αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων του με τα σώματα που βρίσκονται γύρω του. Όταν χτυπάτε μία μπάλα σε μία ρακέτα αλληλεπιδράτε με τη μπάλα και αλλάζει το αποτέλεσμα την κινησή της. Η τροχιά μιας οβίδας δεν είναι τίποτε άλλο παρά το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης της με τη γη.

Η κίνηση ενός ηλεκτρονίου γύρω από έναν πυρήνα είναι αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων του ηλεκτρονίου με τον πυρήνα και με άλλα ηλεκτρόνια. Περιγράφουμε τις αλληλεπιδράσεις με μία έννοια που την ονομάζουμε δύναμη. Η δυναμική βασικά είναι η ανάλυση της σχέσης ανάμεσα στη δύναμη και στις αλλαγές της κίνησης ενός σώματος.

Οι νόμοι της κίνησης που θα εκθέσουμε είναι γενικεύσεις που προέρχονται από μία προσεκτική ανάλυση των κινήσεων που παρατηρούμε γύρω μας και προέκταση των παρατηρήσεων μας σε μερικά ιδεώδη στοχευμένα πειράματα. Πρώτος “ευάγγελος” των νόμων αυτών ήταν ο Ησαακ ο Νεύτων, (1642-1727) αν και πολλές από τις ιδέες εισηγήται αναφερόταν ήδη από το Γαλλιλαίο.

4.2 Ο νόμος της αδράνειας

Ένα ελεύθερο σώμα είναι ένα σώμα που δεν υπόκειται σε καμμία αλληλεπίδραση. Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει ελεύθερο σώμα γιατί κάθε σώμα αλληλεπιδρά με τα υπόλοιπα σώματα του κόσμου. Επομένως,ένα ελεύθερο σώμα πρέπει να είναι εντελώς απομονωμένο ή το μόνο σώμα στον κόσμο. Αλλά τότε θα ήταν αδύνατο να παρατηρήσουμε αυτό το σώμα γιατί η διαδικασία της παρατήρησης σημαίνει αλληλεπίδραση του παρατηρητή και του σώματος.Στην πράξη πάντως,μπορούμε να δούμε μερικά σώματα ελεύθερα, επειδή βρίσκονται αρκετά μακριά έτσι ώστε οι αλληλεπιδράσεις τους είναι αμελητέες ή οι αλληλεπιδράσεις τους με τα άλλα αλληλοαναιρούνται δίνοντας τους καθαρή αλληλεπίδραση.
Ο νόμος της αδράνειας λέει: Ένα ελεύθερο σώμα κινείται πάντοτε με σταθερή ταχύτητα ή (ισοδύναμα) χωρίς επιτάχυνση.
Ένα ελεύθερο σώμα κινείται σε μία ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα ή είναι ακίνητο (ταχύτητα μηδέν).
Αυτός είναι ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα.
Επομένως,όταν χρησιμοποιούμε το νόμο της αδράνειας μπορούμε να ορίζουμε σε σχέση με τι κινείται το ελεύθερο σώμα. Υποτίθεται ότι ένα σώμα κινείται αν κινείται σε σχέση με έναν παρατηρηρτή, είναι ο ίδιος ένα ελεύθερο σώμα,δηλαδή που δεν υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις με τον υπόλοιπο κόσμο. Ένας τέτοιος παρατηρητής λέγεται αδρανειακός παρατηρητής και χρησιμοποιεί ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
Υποθέτουμε ότι τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς δεν περιστρέφονται,ενώ οι περιστροφές υποδηλώνουν την ύπαρξη επιταχύνσεων (ή άλλες την ταχύτητα εξαιτίας αλλαγών στη διεύθυνση) και επομένως αλληλεπιδράσεων πράγμα που δεν

συμβιβάζεται με τον ορισμό που δώσαμε στον αδρανειακό παρατηρητή, ότι είναι δηλαδή “ένα ελεύθερο σώμα” χωρίς επιτάχυνση.Σύμφωνα με τον νόμο της αδράνειας, διάφοροι αδρανειακοί παρατηρητές μπορούν να κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλο με σταθερή ταχύτητα. Επομένως, μπορούν να συγκρίνουν τις παρατηρήσεις τους χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Γαλλιλαίου, ανάλογα με την τιμή της σχετικής τους ταχύτητας.
Η γη δεν είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς εξαιτίας της περιστροφής γύρω από τον άξονα της και των αλληλεπιδράσεων τους με τον ήλιο και τους άλλους πλανήτες. Πάντως, σε πολλές περιπτώσεις τα αποτελέσματα της περιστροφής της γης και των αλληλεπιδράσεων της είναι αμελητέα,έτσι χωρίς να κάνουμε μεγάλο λάθος θα είναι αδρανειακά.Ούτε αυτός ο ήλιος δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς,γιατί εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων του με τα άλλα σώματα του γαλαξία ο ήλιος διαγράφει καμπύλη τροχιά γύρω από το κέντρο του γαλαξία.Μία και η κίνηση του ήλιου είναι πιο ευαίσθητη και πιο ομαλή από την κίνηση της γης(η τροχιακή επιτάχυνση της).

Το σύστημα συντεταγμένων που είναι στερεωμένο στη γη δεν είναι αδρανειακό εξαιτίας της ημερήσιας περιστροφής της γης και της επιταχυνόμενης κίνησης της γύρω από τον ήλιο.Αλλά ούτε ο ήλιος είναι αδρανειακό σύστημα εξαιτίας της κίνησης του γύρω από το σώμα του γαλαξία.Πάντως,για πρακτικούς λόγους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε το ένα είτε το άλλο από αυτά τα σώματα για τον ορισμό ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Πολλά πειράματα που έγιναν σε γήινα εργαστήρια υποστηρίζονται από το νόμο της αδράνειας. Μια σφαίρα ακουμπισμένη σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια θα παραμείνει ακίνητη,εκτός αν κάποιος την αγγίξει,η ταχυτητά της θα παραμείνει σταθερή με μηδενική τιμή. Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια πάνω στην οποία ακουμπάει η σφαίρα εξισορροπεί την αλληλεπίδραση τσφαίρας και της γης έτσι ώστε η σφαίρα είναι ελεύθερη στις αλληλεπιδράσεις. Όταν παίζοντας μπιλιάρδο χτυπάμε μία μπάλα,η μπάλα στιγμιαία υφίσταται αλληλεπίδραση (με τη στέκα) και κερδίζει ταχύτητα, αλλά μετά είναι πάλι ελεύθερη και κινείται σε ευθεία με την ταχύτητα που είχε όταν η μπάλα χτυπήθηκε. Αν η μπάλα είναι σκληρή και τέλεια σφαίρα και αν η επιφάνεια είναι τέλεια και επίπεδη και λεία,τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μπάλα θα κινείται στο άπειρο με την ίδια ταχύτηατα. Στην πράξη όμως η μπάλα επιβραδύνεταικαι τελικά σταματάει. Αυτό συμβαίνει γιατί ανάμεσα στην μπάλα και το επίπεδο υπάρχει μια αλληλεπίδραση που λέγεται τριβή.

4.3 Μάζα

Η μάζα είναι ένας αριθμός που βάζουμε σε κάθε σώμα και το βρίσκουμε και σε σύγκριση με ένα πρότυπο σώμα χρησιμοποιώντας ζυγούς στους βραχίονες.
Αυτή η διαδικασία στον προσδιορισμό του σώματος βασίζεται στην έλξη της γης πάνω σε όλα τα σώματα καθώς στη βαρυντική έλξη της γης. Γι'αυτό το λόγο τη μάζα την λέμε βαρυντική μάζα του σώματος.
Αυτός ο ορισμός της μάζας δεν είναι πάντα πολύ βολικός.Πρώτα έτσι δεν μπορούμε να βάλουμε όλα τα σώματα σε ζυγαριά για να δούμε την μάζα τους.Έπειτα εκτο΄ς από την βαρυντική αλληλεπίδραση που έχουν τα σώματα μπορεί να έχουν και άλλα είδη αλληλεπίδρασης επομένως,πρέπει να ερευνήσουμε,αν η έννοια της μάζας είναι ίδια και γι'αυτές τις περιπτώσεις.
Τέλος,ο λειτουργικός ορισμός που δώσαμε υποθέτει ότι το σώμα είναι ακίνητο. Δεν ξέρουμε αν η μάζα παραμένει η ίδια,όταν το σώμα κινείται.
Ένα κατευθείαν αποτέλεσμα του νόμου της αδράνειας είναι ότι ο αδρανειακός παρατηρητής καταλαβαίνει ότι ένα σώμα δεν είναι ένα ,δηλαδή ότι αλληλεπιδρά με άλλα σώματα όταν παρατηρείται ότι η ταχυτητά του δεν είναι σταθερή,δηλαδή ότι το σώμα επιταχύνεται.

Ας εξετάσουμε τώρα μία ιδεατή περίπτωση. Ας θεωρήσουμε ότι παρατηρούμε ένα απομονωμένο σώμα στο σύμπαν,όπως λέει ο νόμος της αδράνειας,παρατηρούμε δύο σώματα που υπόκειται στην αλληλεπιδρασή τους μόνο, δηλαδή είναι απομονωμένα από τον υπόλοιπο κόσμο.
Σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασής τους οι ταχύτητες δεν είναι σταθερές, αλλά αλλάζουν με το χρόνο και οι τροχίες τους είναι σαν καμπύλες. Σε ένα χρόνο t,το σώμα (1) βρίσκεται στο A με ταχύτητα u1, και το σώμα (2)είναι στο B με ταχύτητα u2. Αργότερα,στο χρόνο t, τα σώματα βρίσκονται στο A και στο B με ταχύτητες u1 και u2 αντιστοίχως.
Η αλλαγή στη ταχύτητα του σώματος (1) όταν πηγαίνει από το A στο A' στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t - t'$ είναι $\Delta u1 = u1' - u1$

και η αλλαγή στην ταχύτητα του σώματος (2) στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι
$\Delta u2 = u2' - u2$
Πειραματικά,βρίσκουμε ότι οι δύο αλλαγές στις ταχύτητες είναι οποιοδήποτε χρονικό διάστημα έχουν αντίθετη διεύθυνση,δηλαδή διανύσματα Δu1 και Δu2 έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Το πείραμα επίσης δείχνει ότι άσχετα με το διάστημα Δt, ο λόγος των μετρήσεων των ταχυτήτων είναι πάντοτε ο ίδιος. Επομένως, έχουμε:

$$\Delta u1 = -K \Delta u2$$

όπου K είναι το ίδιο για κάθε ζευγάρι σωμάτων,ανεξάρτητα από το αν κινούνται.
Υποθέτουμε ότι διαλέγουμε ένα σώμα σαν “πρότυπο” και θα συμβολίζεται με το {0}.Κατόπιν αφήνουμε το κάθε σώμα (1),(2),(3), κ.λ.π να αλληλεπιδράσει με το πρότυπο σώμα (0) προκαλώντας την ορισμένη μεταβολή Δu0 στην ταχύτητα του πρότυπου σώματος και σε αυτή τη περίπτωση προσδιορίζουμε τη σταθερά K στην Εξίσωση για το ζευγάρι {(0),(1)},{(0),(2)},{(0),(3)},κ.λ.π,θα συμβολίσουμε τη σταθερά K για κάθε ένα από τα ζευγάρια με m1, m2, m3,κ.λ.π
Επομένως γράφουμε:

$$\Delta u0 = -m1 \Delta u1 \qquad \Delta u0 = -m2 \Delta u2 \qquad \Delta u0 = -m3 \Delta u3 \quad \text{κ.λ.π}$$

και ονομάζουμε τους συντελεστές m1, m2, m3 κ.λ.π αδρανειακή μάζα των σωμάτων

(1),(2),(3) , κ.λ.π, βάζοντας τη μάζα του πρότυπου σώματος ίση με τη μονάδα (m0=1)

Ένα αποτέλεσμα αυτού του πειράματος είναι ότι οι αδρανειακές μάζες m0=1,m1,m2, κ.λ.π συμπίπτουν με τις τιμές των βασικών μαζών που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ζυγαριάς στην Παράγραφο 2.3. Δηλαδή, όσον αφορά τα πειραματά μας η βαρυντική και αδρανειακή μάζα είναι ταυτόσημες.

Ένα άλλο σπουδαίο αποτέλεσμα είναι ότι όταν κάνουμε το πείραμα με τα σώματα (1) και (2) η σταθερά K (Εξίσωση) είναι ίση με το λόγο m2/m1 δηλαδή,

$$\Delta u1 = -\frac{m2}{m1}\Delta u2 \quad \text{ή} \quad m1\Delta u1 = -m2\Delta u2$$

Η ίδια σχέση ισχύει για ένα και για όλα τα ζευγάρια των σωμάτων.

4.4 Γραμμική ορμή

Ορίζουμε ως γραμμική ορμή ενός σώματος το γινόμενο της μάζας επί την ταχυτητά του. Συμβολίζοντας την με το p γράφουμε:

$$p = mu$$

Η γραμμική ορμή είναι διάνυσμα και έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα.Η ορμή είναι πολύ σπουδαία φυσική έννοια γιατί συνδυάζει τα στοιχεία που περιγράφουν τη δυναμική κατάσταση ενός σώματος,τη μάζα επί την ταχύτητα του. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τη λέξη ορμή αντί για “γραμμική ορμή”. Οι μονάδες της ορμής στο σύστημα είναι $mkgs^{-1}$ (δεν έχουμε ειδικό όνομα γιαυτή τη μονάδα).

Η ορμή μας δίνει περισσότερη δυναμική πληροφορία από την ταχύτητα,όπως μπορούμε να δούμε κάνοντας διάφορα απλά πειράματα. Για παράδειγμα,είναι πιο δύσκολο να σταματήσουμε ή να επιταχύνουμε ένα φορτωμένο φορτηγό,παρά ένα άδειο,ακόμα και αν έχουμε την ίδια ταχύτητα,γιατί το φορτωμένο έχει μεγαλύτερη

ορμή.
Μπορούμε να ξαναγράψουμε το νόμο της αδράνειας λέγοντας ότι ένα ελεύθερο σώμα κινείται πάντοτε με σταθερή ορμή.

$$p = σταθερό$$

Αν έχουμε δύο σώματα μαζών m1 και 2 που κινούνται με ταχύτητες u1 και u2 η ολική ορμή του συστήματος για κάθε χρονική στιγμή είναι:

$$P = p1 + p2 = m1u1 + m2u2$$

Αν έχουμε ένα σύστημα πολλών σωμάτων η ολική ορμή του συστήματος είναι:

$$p = \Sigma pi = p1 + p2 + p3 + ...$$

4.5 Αρχή της διατήρησης της ορμής

Ας προσπαθήσουμε να δικαιολογήσουμε την εισαγωγή της έννοιας της ορμής.Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα μάζας m έχει ταχύτητα u τη στιγμή m' και u' τη στιγμή t'. Η αλλαγή στην ταχύτητα στο διάστημα Δt=t'-t είναι Δu=u'-u και η αλλαγή στην ορμή είναι :

$$\Delta\rho = \Delta(mu) = m\Delta u$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι για δύο αλληλεπιδρώντα σώματα η αλλαγή της ορμής του ενός σώματος,σε ένα χρονικό διάστημα,είναι ίση με το αντίθετο της αλλαγής της ορμής του άλλου στο ίδιο χρονικό διάστημα. Το παραπάνω μπορούμε να το εκφράσουμε ότι μία αλληλεπίδραση παράγει μία ανταλλαγή ορμής,έτσι ώστε η ορμή που “έχασε” το ένα από τα αλληλεπιδρώντα είναι ίση με την ορμή που “κέρδισε” το άλλο.
Η αλλαγή στην ορμή του σώματος(1) στο χρονικό διάστημα είναι :

$$\Delta\rho 1=\rho 1'-\rho 1$$

και η αλλαγή στην ορμή του σώματος (2) είναι:

$$\Delta\rho 2=\rho 2'-\rho 2$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε την Εξ(7.6) ως :

$$\rho 1'-\rho 1=-(\rho 2'-\rho 2)=-\rho 2'+\rho 2$$

ξαναγράφοντας τους όρους έχουμε:

$$\rho 1'+\rho 2'=\rho 1+\rho 2$$

Το αριστερό μέρος είναι η ολική ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων τη στιγμή t και το δεξιό η ολική ορμή τη στιγμή t. Έτσι,βγάζουμε το συμπέρασμα ότι ανεξάρτητα από τους χρόνους t και t',επομένως η ολική ορμή παραμένει σταθερή . Δηλαδή ,

η ολική ορμή ενός συστήματος που αποτελείται από δύο σώματα που υπόκειται στην αλληλεπίδραση τους μόνο παραμένει σταθερή.

$$\rho 1+\rho 2=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι η αρχή της διατήρησης της ορμής που είναι μία από τις πιο θεμελιώδεις και παγκόσμιες αρχές της φυσικής. Για παράδειγμα,ας θεωρήσουμε ένα άτομο υδρογόνου,που αποτελείται από ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται γύρω από ένα πρωτόνιο και υποθέτουμε επίσης ότι τα άτομα είναι απομωνομένα,έτσι ώστε έχουμε μόνο την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου – πρωτονίου. Το άθροισμα των ορμών του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου μετρημένων σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς παραμένει σταθερό. Παρομοίως, ας θεωρήσουμε το σύστημα γης και σελήνης. Αν μπορούμε να αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις που οφείλονται στην ύπαρξη της του ήλιου και των άλλων πλανητών,το άθροισμα των ορμών της γης και της σελήνης, μετρημένων σε κάποιο αδρανειακό σύστημα θα παραμείνει σταθερό. Η

αρχή της διατήρησης της ορμής παρουσιάστηκε πρώτα από τον Ολλανδό φυσικό Christian Huygens(1629-1695).
Αν και στην παραπάνω μελέτη μας της αρχής της διατήρησης της ορμής έχουμε υπόψη μόνο δύο σώματα,η αρχή αυτή ισχύει για ένα οποιοδήποτε αριθμό σωμάτων που αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα,δηλαδή ένα που υπόκεινται στις αλληλεπιδράσεις τους μόνο και όχι σε αλληλεπιδράσεις με άλλα μέρη του σύμπαντος. Έτσι μπορούμε να ξαναπούμε την αρχή της διατήρησης της ορμής στη γενικότερη μορφή: η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων είναι σταθερή .

$$P=\Sigma\rho i=\rho 1+\rho 2+\rho 3+....$$

Δεν ξέρουμε απολύτως καμία περίπτωση που να μην ισχύει η αρχή διτήρησης της ορμής . Μάλιστα,οποτεδήποτε σε ένα πείραμα που μπορεί να μην ισχύει αυτή η αρχή, ο φυσικός αμέσως κοιτάζει μήπως υπάρχει κάποιο άγνωστο η μη ανιχνευόμενο σώμα,που πιθανά είναι υπεύθυνο για την περίπτωση αυτή που φαινομενικά δεν ισχύει η διατήρηση της ορμής.
Αυτή η διερεύνηση οδήγησε τους φυσικούς στην ανακάλυψη του κετρονίου,του νετρίνου,του φωτονίου και πολλών άλλων στοιχείων σωματιδίων.
Αργότερα θα δώσουμε διαφορετική μορφή στην αρχή της διατήρησης της ορμής , αλλά για τη μεγάλη πλειοψηφία των προβλημάτων που μελετούμε, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή αυτή με τη μορφή που της δώσαμε εδώ.
Παραδείγματα της αρχής της διατήρησης της ορμής βλέπουμε συνέχεια γύρω μας.Το “κλώτσιμα” (ανάκρουση”) ενός πυροβόλου όπλου για παράδειγμα.Στην αρχή το σύστημα όπλου και σφαίρας είναι ακίνητο και η ορμή είναι μηδέν.Όταν το όπλο εκπυρσοκροτεί ανακρούει για να εξισορροπήσει την ορμή που κέρδισε η σφαίρα.
Όταν ένας πυρήνας διασπάται, εκπέμποντας για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο και ένα νέτρινου , η ορμή του ηλεκτρονίου συν την ορμή του νετρίνου συν την ορμή του πυρήνα που προκύπτει πρέπει να είναι μηδέν, μια και αρχικά το σύστημα ήταν ακίνητο στο αδρανειακό σύστημα.Παρομοίως, αν μια χειροβομβίδα ή μία βόμβα εκραγούν και χτυπήσουν στο έδαφος,η ολική ορμή των θραυσμάτων πρέπει να είναι

ίση με την ορμή της χειρομβοβίδας ή της βόμβας αμέσως πριν την έκρηξη.

Παράδειγμα 4.1

Από ένα όπλο μάζας 0.80kg πυροδοτείται σφαίρα μάζας 0.016kg με ταχύτητα $700\,ms^{-1}$. Βρείτε την ταχύτητα με την οποία ανακρούει το όπλο.

Αρχικά το όπλο και η σφαίρα είναι ακίνητα και η ολική ορμή είναι μηδέν. Μετά την πυροδότηση η σφαίρα κινείται μπροστά με ορμή

$$\rho 1 = m1u1 = (0.016\mathrm{kg}) * (700\mathrm{ms}^{-1}) = 11.20\mathrm{mkgs}^{-1}$$

Επομένως,το όπλο πρέπει να οπισθοχωρήσει με ίση και αντίθετη ορμή.
Επομένως, πρέπει να έχουμε:

$$\rho 2 = 11.20\mathrm{mkgs}^{-1} = m2u2$$

ή μία και m2=0.80kg,

$$u2 = \frac{11.20\mathrm{mkgs}^{-1}}{0.80\mathrm{kg}} = 14.0\mathrm{ms}^{-1}$$

Παράδειγμα 4.2

Ανάλυση της διατήρησης της ορμής σε αλληλεπίδραση ατομικών σωματιδίων.

Στη φωτογραφία θαλάμου νέφους του Σχ.(7-5) βλέπουμε ένα εισερχόμενο σωματίδιο α(δηλαδή πυρήνα ηλίου) το οποίο αλληλεπιδρά με ένα άτομο υδρογόνου,που είναι αρχικά ακίνητο και το οποίο είναι μέρος του αερίου του θαλάμου.Το σωματίδιο α αλλάζει διεύθυνση και το άτομο του υδρογόνου αρχίζει να κινείται. Αν ξέρουμε τις αντίστοιχες μάζες,που σε αυτή την περίπτωση έχουν λόγο 4 προς 1 και μετρήσαμε έτσι ώστε, οι στιγμιαίοι ρυθμοί της (διανυσματικής) αλλαγής της ορμής των σωμάτων, σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι ίσοι και αντίθετοι.Έτσι χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να πούμε ότι ο ρυθμός αλλαγής της ορμής του ηλεκτρονίου σε ένα απομονωμένο άτομο υδρογόνου είναι ίσος και αντίθετος με το ρυθμό της ορμής του πρωτονίου.Αν υποθέσουμε ότι η γη και η σελήνη αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα ο ρυθμός αλλαγής της ορμής της είναι ίσος και αντίθετος με το ρυθμό αλλαγής της ορμής της σελήνης.Όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούν λέμε ότι το ένα σώμα δίνει μία δύναμη στο άλλο. Σύμφωνα με το Νεύτωνα, ο ρυθμός ως το χρόνο αλλαγής της ορμής ενός σώματος είναι ένα μέτρημα της δύναμης πάνω στο σώμα.Έτσι, η δύναμη που “δρα” πάνω σε ένα σώμα σχετίζεται με την ορμή του σώματος με τη σχέση:

$$F=\frac{dp}{dt}$$

Αυτή η σχέση είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,η λέξη “δρα” είναι κακή εκλογή γιατί δίνει την εντύπωση ότι κάτι δεν εφαρμόζεται στο σώμα. Η δύναμη είναι μια έννοια που, εξ ορισμού είναι ίση με το ρυθμό αλλαγής της ορμής ενός σώματος,η ορμή με τη σειρά της οφείλεται στην αλληλεπίδραση του σώματος με τα άλλα σώματα. Έτσι,μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι η έκφραση μιας αλληλεπίδρασης. Αν ένα σώμα είναι ελεύθερο , $\rho=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ (πρώτος νόμος του Νεύτωνα) και $F=dp/dt=0$. Έτσι λέμε ότι πάνω από ένα ελεύθερο σώμα δεν ασκείται καμία δύναμη.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της δύναμης, ξαναγράφουμε την Εξ(7.11)

$$F1=-F2$$

όπου $F1=dp/dt$ είναι η δύναμη πάνω στο σώμα (1) εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του με το σώμα (2) και $F2=dp2/dt$ είναι η δύναμη που στο σώμα (2) εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του με το σώμα (1). Έτσι καταλήγουμε στο όταν δύο σώματα αλληλεπιδρούνται ή δύναμη πάνω στο ένα είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη πάνω στο άλλο.

Αυτός είναι ο τρίτος νόμος κίνησης του Νεύτωνα και είναι αποτέλεσμα της έννοιας της δύναμης και της αρχής της διατήρησης της ορμής.

Υπενθυμίζοντας τον ορισμό (7.3) της ορμής $p=mu$ ξαναγράφουμε την Εξ(7.12) με τη μορφή

$$F=\frac{d(mu)}{dt}$$

αν η μαζα m είναι σταθερή , έχουμε :

$$F=m\frac{du}{dt} \quad \text{ή} \quad F=m\alpha$$

Επειδή,η δύναμη είναι ίση με τη μάζα επί την επιτάχυνση,αν η μάζα είναι σταθερή.

Προσέξτε το γεγονός ότι η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την επιτάχυνση.Από την Εξ(7.15) βλέπουμε ότι,αν η δύναμη είναι σταθερή,η επιτάχυνση είναι επίσης σταθερή και η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη.Αυτό συμβαίνει στα σώματα που πέφτουν κοντά στην επιφάνεια της γης.Όλα τα σώματα πέφτουν στη γη με την ίδια επιτάχυνση g, έτσι η δύναμη της βαρυντικής αλληλεπίδρασης η οποία λέγεται βάρος είναι :

$$W=mg$$

Στη συζητησή μας υποθέτουμε ότι το σώμα αλληλεπιδρά με ένα άλλο σώμα(Σχ7-6).Πάντως, αν το σώμα m αλληλεπιδρά με άλλα σώματα m1,m2,m3,.....(Σχ7-7) το κάθε ένα επιφέρει μια αλλαγή στην ορμή του m, που περιγράφεται από τις αντίστοιχες δυνάμεις F1,F2,F3,...σύμφωνα με την Εξ(7.12).Τότε ο ολικός ρυθμός αλλαγής της ορμής του σώματος m είναι:

$$\frac{dp}{dt}=F1+F2+F3+....=F$$

Το διανυσματικό άθροισμα στη δεξιά μεριά λέγεται συνισταμένη δύναμη Φ που δρα πάνω στο m.

Μονάδες δύναμης :Οι εξισώσεις (7.12) και (7.15) δείχνουν ότι η μονάδα της δύναμης εκφράζεται συναρτήσει των μονάδων μάζας και επιτάχυνσης. Στο σύστημα SI η δύναμη μετριέται σε $mkgs^{-2}$, η μονάδα αυτή λέγεται newton και συμβολίζεται με N.

Έτσι, $N=mkgs^{-2}$. Το newton είναι δύναμη που όταν δράσει σε ένα σώμα μάζας ενός kg, παράγει επιτάχυνση ενός ms^{-2} .

Μια και το βάρος είναι δύναμη το εκφράζουμε σε newton και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίδια για όλα τα σώματα και στην επιφάνεια της γης, το βάρος και η μάζα συνδέονται με μία σταθερά αναλογίας.Αυτή είναι η αιτία να χρησιμοποιούμε τις έννοιες μάζας και βάρος ανακατεμένα , πράγμα που πρέπει να αποφύγουμε στην επιστημονική εργασία.

4.6 Η έννοια της δύναμης

Ας κάνουμε μια κριτική ανάλυση της έννοιας της δύναμης.Έτσι εισάγει την έννοια $F=\frac{dp}{dt}$ για να περιγράψουμε το ρυθμό αλλαγής της ορμής του σώματος εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων του με άλλα σώματα.Πάντως,στην καθημερινή μας ζωή έχουμε μια διαφορετική άποψη της έννοιας δύναμη. “Αισθανόμαστε” μία δύναμη όταν χτυπίσει μία μπάλα με ρακέτα,όταν χτυπάμε ένα καρφί με το σφυρί,όταν γροθοκοπούμε κάποιον.

Προφανώς,είναι δύσκολο να συμβιβάσουμε αυτή την καθημερινή εικόνα που έχουμε για μία δύναμη,με την έννοια της δύναμης του ήλιου και της γης.

Στις δύο περιπτώσεις αυτές έχουμε μια αλληλεπίδραση μεταξύ δύο

σωμάτων.Μεταξύ του ήλιου και της γης υπάρχει μία πολύ μεγάλη απόσταση,αλλά όταν ένας παίζει τέννις η ρακέτα αγγίζει τη μπάλα.Με αυτό ακριβώς το χέρι σας “στον τύπο των ήλων”, τα πράγματα θα ήταν τόσο διαφορετικά.
Όσο πυκνό και συμπαγές φαίνεται ένα πράγμα,τα άτομα απέχουν το ένα από το άλλο και κρατιούνται εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων,με το ίδιο τρόπο που οι ηλιακτίδες κρατιούνται στις θέσεις τους,εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων τους με τον ήλιο.Μικροσκοπικά,η ρακέτα ποτέ δεν αγγίζει τη μπάλα, αν και τα μόρια της ρακέτας πλησιάζουν πολύ τα μόρια της μπάλας,δημιουργώντας με την αλληλεπίδραση τους μια προσωρινή διακοπή στην διάταξη των τελευταίων.
Έτσι, όλες οι δυνάμεις στη φύση προχωρούν σε αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε σώματα που απέχουν μεταξύ τους. Σε μερικές περιπτώσεις η απόσταση είναι τόσο μικρή στην ανθρώπινη κλίμακα των εμπειριών, ώστε πιστεύουμε ότι είναι μηδέν σε άλλες περιπτώσεις πιστεύουμε ότι είναι πολύ μεγάλη.Πάντως, από την μία σκοπιά της φυσικής δεν υπάρχει βασική διαφορά στα δύο είδη δυνάμεων.
Πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη χρήση αισθησιακών εννοιών,όπως η “επαφή” όταν μελετάμε διαδικασίες στην ατομική κλίμακα.
Σε πολλά προβλήματα μπορούμε να εκφράσουμε τις δυνάμεις F1 και F2,σε δύο σώματα που αλληλεπιδρούν σαν συνάρτηση του διανύσματος της σχετικής τους απόστασης , r12 , και πιθανόν σαν συνάρτηση της σχετικής τους ταχύτητας.
Ένα από τα πιο σπουδαία προβλήματα της φυσικής είναι ο προσδιορισμός του F(r12) για τις αλληλεπιδράσεις που υπάρχουν στη φύση.Διευκολυνόμαστε χρησιμοποιώντας την έννοια της δύναμης για τον λόγο ότι για τις διαφορετικές αλληλεπιδράσεις βρίσκουμε τις αντίθετες συναρτήσεις (Fr12).
Το γεγονός ότι τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν,όταν απέχουν μια απόσταση μας υποχρεώνει να ερευνήσουμε να βρούμε το μηχανισμό με τον οποίο μεταδίδεται η αλληλεπίδραση.Θα βρούμε το μηχανισμό αυτό αργότερα, αλλά θα χρειαστεί να αναθεωρήσουμε την Εξ(7.8). Στην τωρινή της μορφή η Εξ(7.8) υποθέτει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο σωμάτων συμβαίνει ακαριαία.Πάντως, οι αλληλεπιδράσεις μεταδίδονται με πεπερασμένη ταχύτητα, που είναι ίση με την

ταχύτητα του φωτός.
Για να λάβουμε υπόψην μας το αποτελέσμα της πεπερασμένης ταχύτητας της αλληλεπίδρασης θα προσθέσουμε έναν όρο ακόμα στην Εξ(7.8). Με αυτή την αλλαγή η έννοια της δύναμης περνάει σε δευτερεύοντα ρόλο και ο νόμος δράση-αντίδραση χάνει τη σημασία του,για τις περιπτώσεις που τα σώματα κινιούνται πολύ αργά σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός ή αλληλεπιδρούν πολύ ασθενώς,η Εξ(7.8) και η θεωρία που βασίζεται σε αυτή είναι μία άριστη προσέγγιση που την γράφει η φυσική κατάσταση.
Σε αυτό το κεφάλαιο,θα υποθέσουμε ότι η συνισταμένη δύναμη F είναι η συνάρτηση των συντεταγμένων του σώματος μόνο και θα οργανώσουμε την κίνηση των σωμάτων με τα οποία το σώμα μας αλληλεπιδρά.
Η πολύ χρήσιμη προσέγγιση λέγεται δυναμική του σώματος.Σε άλλα κεφάλαια θα μελετήσουμε τις κινήσεις των σωμάτων και τις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις διάφορες αλληλεπιδράσεις.

Παράδειγμα 4.3

Τραβάμε ένα αμάξι μάζας 8kg προς το πάνω μέρος του κεκλιμένου επιπέδου, που σχηματίζει γωνία 20(μοίρες) με το ριζόντιο επίπεδο.Βρείτε τη δύναμη F,αν το αμάξι κινείται (α) με σταθερή ταχύτητα και με (β) με επιτάχυνση 0.2 ms^{-2}

Συμβολίζουμε την μάζα του αμαξιού με m. Στο Σχ(7.8) έχουμε συνδέσει τις δυνάμεις που αφορούν πάνω στο αμάξι:το βάρος του $W = mg$ με κατεύθυνση προς τα κάτω,η δύναμη F που έλκει στον ανήφορο και η δύναμη N του επίπεδου που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο.
Χρησιμοποιώντας ορθογώνιους άξονες και την Εξ(7.15), ασκούμε ότι η κίνηση στη

διεύθυνση X ικανοποιεί τη σχέση:

$$F - mgsina = mu \quad \text{ή} \quad F = m(\alpha + gsin\alpha)$$

όπου α είναι η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου.Μία και το αμάξι κινείται στη διεύθυνση των Y, έχουμε:

$$N - mgcosa = 0 \quad \text{ή} \quad N = mgcosa$$

έτσι η δύναμη του επιπέδου N είναι ανεξάρτητη της επιτάχυνσης του αμαξιού.Αντικαθιστώντας τις τιμές, βρίσκουμε N=73.7N.
Η δύναμη F όμως εξαρτάται από την επιτάχυνση του αμαξιού που στην περιπτωσή μας F=26.8N. (β) Όταν το αμάξι έλκεται με επιτάχυνση $0.2 \mathrm{ms}^{-2}$, τότε F=28.4N. O αναγνώστης πρέπει να καταλάβει ότι η δύναμη 26.8N προς τα πάνω αφήνει το αμάξι να κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα, ενώ μία προς τα πάνω δύναμη μικρότερη από 26.8N θα είχε σαν αποτέλεσμα την προς τα κάτω επιταχυνόμενη κίνηση του αμαξιού.
Όταν κάνουμε πειράματα μέσα σε ένα μη αδρανειακό σύστημα πρέπει να είμαστε βέβαιοι ότι στην εξίσωση της δύναμης συμπεριλαμβάνεται και η επιτάχυνση a0. Αν εργαζόμαστε μέσα σε ένα μη αδρανεικό σύστημα,είναι συχνά πιο βολικό να σκεφτόμαστε με τη βοήθεια μιας δύναμης F0 τέτοιας,ώστε η Εξ(4.6) να μπορεί να γραφτεί:

$$F + F0 = Ma$$

$$F0 = -Ma0$$

όπου η F0 ονομάζεται υποθετική δύναμη ή ψευδόνυμη (ή δύναμη της αδράνειας).Η υποθετική δύναμη είναι η ποσότητα εκείνη που πρέπει να προστεθεί στην πραγματική δύναμη έτσι ώστε το άθροισμα να γίνει ίσο με Ma, όπου a η επιτάχυνση στο μη αδρανειακό σύστημα.Αν το αδρανειακό σύστημα έχει μία μεταφορική επιτάχυνση a0 η υποθετική δύναμη είναι ακριβώς -Ma0.

Πιο κάτω διερευνούμε την περίπτωση ενός περιστρεφόμενου συστήματος,μέσα στο οποίο η υποθετική δύναμη εξαρτάται από τη θέση μέσα στο σύστημα.Κάθετι το υποθετικό στη φυσική κάνει να φαίνεται μπερδεμένο.Μπορούμε όμως πάντοτε να λύσουμε ένα πρόβλημα γυρίζοντας πίσω στην Εξ(4.6).

Παράδειγμα 4.4 Μετρητής Επιτάχυνσης

Υποθέτουμε ότι η δύναμη που εφαρμόζεται σε μία μάζα M από ένα ελατήριο , τεντωμένο κατά τη διεύθυνση x,είναι $F=-Cx$ όπου C μία σταθερά. Θεωρούμε ένα μη αδρανειακό σύστημα , με μία επιτάχυνση $a0=\alpha 0\,\hat{x}$ κατά τη διεύθυνση x. Αν η μάζα M είναι ακίνητη μέσα στο μη αδρανεικό σύστημα,τότε η επιτάχυνση της a μέσα σ'αυτό το σύστημα είναι μηδέν και η εξίσωση F=M(a+a0) γίνεται:

$$Fx=M\alpha 0=-Cx$$
$$x=\frac{-Ma0}{C}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της υποθετικής δύναμης, βρίσκουμε :

$$F+Fox=Ma=0$$

$$Fx=-Fox$$

$$-Cx=Ma0$$

δηλαδή ξαναρχόμαστε στην Εξ(4.9).Η μετατόπιση x είναι ανάλογη και έχει αντίθετη κατεύθυνση από την επιτάχυνση α0 του μη αδρανειακού συτήματος.Το μη αδρανεικό σύστημα θα μπορούσε να είναι αεροπλάνο ή αυτοκίνητο.

Βλέπουμε ότι η εξίσωση (4.9) περιγράφει τη λειτουργία ενός μετρητή επιτάχυνσης, στον οποίο μια μάζα M προσδένεται σε ένα ελατήριο και εξαναγκάζεται να κινείται προς την κατεύθυνση της επιτάχυνσης.Η μετατόπιση x της μάζας μας δίνει το μέτρο της επιτάχυνσης a0,του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Παράδειγμα 4.5

Φυγόκεντρη Δύναμη και Κεντρομόλος Επιτάχυνση σε σύστημα που περιστρέφεται ομοιόμορφα.

Μολονότι διερευνούμε τα περιστρεφόμενα συστήματα κάπως συντομέστερα στα “θέματα προχωρημένου επιπέδου” στο τέλος αυτού του κεφαλαίου,αξίζει ωστόσο τον κόπο να συζητήσουμε εδώ ένα απλό και γνωστό παράδειγμα.

Θεωρούμε μια σημειακή μάζα M ακίνητη μέσα σε ένα μη αδρανειακό σύστημα έτσι, ώστε να έχουμε ως προς το σύστημα αυτό. Το μη αδρανειακό σύστημα περιστρέφεται ομοιόμορφα γύρω από τον άξονα σταθερό ως προς ένα αδρανειακό σύστημα.Η επιτάχυνση της σημειακής μάζας είναι όπως βρήκαμε στο Κεφ.2:

$$a0=-\omega^2 r$$

προς το αδρανειακό σύστημα, όπου το r κατευθύνεται από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω και είναι κάθετο προς αυτόν.

Η εξίσωση (4.10) εκφράζει την γνωστή κεντρομόλο επιτάχυνση.Η μάζα θα μπορούσε να εξαναγκαστεί να παραμείνει ακίνητη με τη βοήθεια ενός τεντωμένου ελατηρίου. Το a=0 μέσα στο μη αδρανειακό σύστημα,οδηγεί σύμφωνα με τις Εξ(4.7) και (4.8) στις σχέσεις:

$$F=-F0=Ma0=-M\,\omega^2 r \qquad (4.11)$$

Η υποθετική δύναμη F, σε αυτό το παράδειγμα ονομάζεται φυγόκεντρη δύναμη,έχει την έκφραση F0=M{ω^2}r και κατευθύνεται από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω. Η φυγόκεντρη δύναμη αντισταθμίζεται,σε αυτό το παράδειγμα, από την

ελαστική δύναμη του ελατηρίου και έτσι η μάζα έχει,ηδενική επιτάχυνση (είναι ακίνητη) μέσα στο περιστρεφόμενο μη αδρανειακό σύστημα.
Αν M=0,1kg, r=10cm και το σύστημα περιστρέφεται με 100 στροφές ανά δευτερόλεπτο , ποια είναι η τιμή της φυγόκεντρης δύναμης; Έχουμε :

$$F0=M\,\omega^2 r=(0,1)(2\pi*100)^2(0,1)4*10^3\,N$$

Παράδειγμα 4.6

Πειράματα με Ανελκυστήρα σε ελεύθερη πτώση

Έστω ότι η επιτάχυνση ενός μη αδρανειακού συστήματος,π.χ ενός ανελκυστήρα σε ελεύθερη πτώση είναι:

$$a0=-g\,\hat{y}$$

όπου $\hat{y}$ το μοναδιαίο σιάνυσμα με κατεύθυνση από την επφάνεια της γης προς τα πάνω και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.Η επιτάχυνση αυτή αντιστοιχεί στην ελεύθερη πτώση των σωμάτων μέσα στο σημείο της βαρύτητας.Απο την εξίσωση (4.8) βρίσκουμε ότι η υποθετική δύναμη στη μάζα M μέσα στο μη αδρανειακό σύστημα είναι:

$$F0=-Ma0=Mg\,\hat{y}$$

Ένα σώμα που δεν είναι δεμένο μέσα στον ανελκυστήρα,δέχεται την επενέργεια του αθροίσματος των δύο δυνάμεων, αφ'ενός της δύναμης της βαρύτητας $F=-Mg\,\hat{y}$ και αφετέρου της υποθετικής δύναμης $F0=Mg\,\hat{y}$ έτσι ώστε, η ολική φαινομενική δύναμη μέσα στο μη αδρανειακό σύστημα του ανελκυστήρα σε ελεύθερη πτώση να είναι:

$$F+F0=0$$

Αυτό σημαίνει ότι το σώμα μέσα στο μη αδρανειακό σύστημα επιταχύνεται.Έχουμε έτσι ένα είδος “απουσίας βαρύτητας”.Το σώμα φαίνεται σαν να αιωρείται στο χώρο, αν και δεν έχει αρχική βαρύτητα ως προς τον ανελκυστήρα.

Η επιτάχυνση ως προς τους απλανείς αστέρες έχει κάποιο νόημα είναι μία εκδοχή που είναι γνωστή ως αρχή Mach. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή , το νερό μέσα στο αρχείο θα 'πρεπε να πάρει την παραβολική μορφή.

Μολονότι δεν υπάρχει πειραματική επιβεβαίωση,αλλά ούτε αντίρρηση σχετικά με την πιο πάνω εκδοχή,μερικοί φυσικοί,συμπεριλαμβανομένου και του Einstein,είχαν αυτή την αρχή σαν εκ των προτέρων ελκυστική,και άλλοι πάλι όχι.Πρόκειται για ένα ζήτημα που αφορά την αφηρημένη κοσμολογία.

Αν δεχτεί κανείς ότι η μέση κίνηση του υπόλοιπου σύμπαντος επηρεάζει τη συμπεριφορά των απομονωμένων σωμάτων ,τότε προκύπτουν ένα πλήθος από σχετικά ερωτήματα,χωρίς να υπάρχει κάποια βάση, για να δοθούν απαντήσεις.

Υπάρχουν άραγε άλλες σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων ενός απομονωμένου σώματος και της κατάστασης του υπόλοιπου σύμπαντος.

Άραγε το φορτίο ή μάζα ενός ηλεκτρονίου ή η ενέργεια της αλληλέδρασης μεταξύ νουκλεόνιων μεταβάλλονται,αν μεταβληθεί κατά κάποιο τρόπο ο αριθμός ή η πυκνότητα των σωματιδίων που υπάρχουν μέσα στο σύμπαν.

Ως σημειώνεται το βαθυστόχαστο αυτό ερώτημα , που αφορά τη σχέση που έχει το μακρινό σύμπαν με τις ιδιότητες των απομονωμένων σωμάτων,παραμένει χωρίς απάντηση.

4.7 Υποθετικές Δυνάμεις

Δίνουμε πιο κάτω μερικά παραδείγματα για δυνάμεις που φαίνονται να υπάρχουν,

επειδή το σύστημα αναφοράς είναι επιταχυνόμενο.
Αρχίζουμε με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,διατηρώντας πρώτα το πρόβλημα μας ως προς ένα αδρανειακό σύστημα,αφού ξέρουμε ότι τότε η διατύπωση είναι έγκυρη.Κατόπιν,προχωρούμε για να συμπεριλάβουμε την επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος και να συσχετίσουμε με τη δύναμη που φαίνεται να υπάρχει όταν διατυπώσουμε το πρόβλημα ως προς αυτό το δεύτερο σύστημα αναφοράς.Κατα το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$F = Mai \quad (4.5)$$

Αφού το πρώτο μέρος της εξίσωσης εκφράζει την εφαρμοσμένη δύναμη και ai είναι η επιτάχυνση,όπως τη μετράει ένας παρατηρητής μέσα στο αδρανειακό σύστημα.Η μάζα M υποτίθεται ότι είναι σταθερή.Ο δείκτης I είναι για να δηλώσει την αναφορά σε ένα αδρανειακό σύστημα.Ως προς ένα μη αδρανειακό σύστημα π.χ το σύστημα της περιστρεφόμενης γης, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση (4.5) δεν ισχύει έτσι, όπως γράφτηκε πιο πάνω.Ο λόγος είναι ότι έχει παραλειφθεί μία επιτάχυνση a0 που θα'πρεπε να συμπεριληφθεί,και συγκεκριμένα η αδρανειακή επιτάχυνση,που το θεωρούμενο έχει εξαιτίας της επιτάχυνσης ή της κίνησης του συστήματος αναφοράς. Αν a είναι η επιτάχυνση ενός σώματος,όπως μετριέται μέσα στο μη αδρανειακό σύσημα , θα έχουμε : $a0 = aI^2$ οπότε:

$$F = M\left(a + a0\right) \quad (4.6)$$

Ένα νουκλεόνιο είναι ένα πρωτόνιο ή ουδέτερονιο.Ένα αντινουκλεόνιο είναι ένα αντιπρωτόνιο ή ένα αντιουδετερόνιο.
Στα θέματα προχωρημένου επιπέδου αναλύουμε τη γενική πεεριγραφή της κίνησης μέσα σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς,όπου $a1-a$ εξαρτάται από την ταχύτητα και τη θέση μέσα στο επιταχυνόμενο σύστημα.

4.8 Φυγόκεντρος Δύναμη

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη νήματος και διαγράφει κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα,(ω=σταθ), τότε το σώμα ασκείται η δύναμη F_N (κεντρομόλος) από το χέρι μας διαμέσου του τεντωμένου νήματος.Σύμφωνα με το νόμο "δράσης-αντίδρασης" στο χέρι μας ασκείται μία άλλη δύναμη F_φ , που είναι η αντίδραση της κεντρομόλου.Αυτή η δύναμη λέγεται φυγόκεντρος δύναμη και παρατηρείται σε όλες τις περιπτώσεις που εμφανίζεται κεντρομόλος δύναμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 | ΕΡΓΟ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Από τους νόμους του Newton παίρνουμε λύσεις στις οποίες η θέση r(t),η ταχύτητα u(t), και η επιτάχυνση a(t) εκφράζονται ως συνάρτηση του χρόνου. Όμως πολλές φορές θέλουμε να μάθουμε τη θέση ή την ταχύτητα ενός σώματος χωρίς, να μας ενδιαφέρει η χρονική τους εξάρτηση.Σε αυτή την περίπτωση έχουμε βεβαίως μία πληροφορία λιγότερη(δεν γνωρίζουμε τη χρονική εξάρτηση).
Η σπουδαιότητα της ενέργειας αυτής έγκειται στο γεγονός,ότι αν και υπάρχουν πολλές μορφές ενέργειας,η ολική ενέργεια ενός μενώμενου συστήματος παραμένει σταθερή.

5.1 ΕΡΓΟ

Το έργο που παράγει η δυναμη F κατά τη μετατόπιση dr ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$dw = F \cdot dr$$

Η σχέση γράφεται με τη μορφή:

$$dw = F \cdot dr \cdot cos\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των F και dr.
Αν η δύναμη F είναι κάθετη στη μετατόπιση θ το έργο είναι μηδέν.Αυτή είναι η περίπτωση της κεντρομόλου δύναμης F_N κατά την κυκλική κίνηση.
Το ολικό έργο που παράγεται πάνω στο σωματίδιο, όταν κινείται από το A στο B, είναι το άθροισμα όλων των απειροστών έργων που παράγονται κατά διαδοχικές απειροστές μετατοπίσεις:

$$W=\vec{F}_1\vec{dr}+\vec{F}_2\vec{dr}+.....+\vec{F}_N\vec{dr} \qquad \Rightarrow \qquad W=\int_A^B F*dr$$

Το διάνυσμα dr που περιγράφει μία απειροστή μετατόπιση γράφεται:

$$\vec{dr}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}$$

και η δύναμη F :

$$\vec{F}=F_x\hat{i}+F_j\hat{j}+F_Z\hat{k}$$

Το έργο της δύναμης F , $W=\int_A^B F\cdot dr$ μπορεί να γραφτεί:

$$W=\int_A^B F_x dx+\int_A^B F_y dy+\int_A^B F_z dz$$

5.2 ΙΣΧΥΣ

Σε προβλήματα εφαρμογών είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε το ρυθμό παραγωγής του έργου,γι'αυτό ορίζουμε την έννοια της ισχύς.
Ονομάζουμε στιγμιαία ισχύ και τη συμβολίζουμε με το σύμβολο P ή N :

$$P=\frac{dw}{dt}$$

όπου dw το στοιχειώδεις έργο που παράγεται σε χρόνο dt.
Από τον ορισμό του έργου $dw=F\cdot dr$, μπορούμε να γράψουμε για την ισχύ:

$$P=F\cdot\frac{dr}{dt}$$

ή

$$P = F \cdot u$$

Αν $\quad Fcost(t) \Rightarrow P = \vec{F} * \vec{U}$

5.3 ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ενέργεια ενός σωματιδίου είναι το φυσικό μέγεθος που οι μεταβολές του οφείλονται στην παραγωγή ή κατανάλωση έργου από το σώμα.

Κινητική ενέργεια:Είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της ταχύτητας του και δίνται από τη σχέση :

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$

Έστω σωματίδιο μάζας m πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη F και το μετατοπίζει από τη θέση A σε θέση B. Το έργο που παράγεται είναι:

$$W = \int_A^B \vec{F} * \vec{dr} = \int m \frac{du}{dt} dr = \int du \frac{dr}{dt} = m \int_A^B u * du$$

$$W = \frac{1}{2} m U_B^2 - \frac{1}{2} m U_A^2$$

όπου $\quad U_A \quad , \quad U_B \quad$, η ταχύτητα του σωματιδίου στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Έργο Δυνάμεων:

F=Cost: $W=\int_A^B \vec{F}*\vec{dr} \Rightarrow W=\vec{F}\int_A^B \vec{dr} \quad \Rightarrow \quad W=\vec{P}(\vec{V}_B-\vec{V}_A)$

F=-kx : $W=\int_A^B -kx\,dx=-k\int_A^B x\,dx \quad \Rightarrow \quad W=-\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2$

Έργο Βάρους: $W=mgh$

$$\vec{V}_A-\vec{V}_B=(x_B-x_A)\Delta^2+(y_B-y_A)\Delta^2$$

$$W=\vec{B}\,\Delta\vec{\Gamma}=B*\Delta y \quad \Rightarrow \quad W=B(y_B-y_A) \quad \Rightarrow \quad W=B*h$$

Δυναμική Ενέργεια: $W=\int_A^B \vec{F}*\vec{dr}=E_{PA}-E_{PB}$

$$W=-\Delta U_{AB} \qquad W=\int_A^B \vec{F}*\vec{dr}=-\int_A^B d\,E_P$$

Η δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για την διατήρηση της δύναμης.

<u>Σχέση Έργου-Δύναμης -Ενέργειας:</u>

$$\vec{F} * \vec{dr} = F * ds * cos\theta \qquad Fdscos\theta = -dE_P$$

$$\vec{P} * \vec{dr} = -d\,E_P \qquad Fcos\theta = -\frac{dE_P}{ds}$$

Το γινόμενο Fcosθ είναι η συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση ds. Αν γνωρίζω το E_P μπορώ να υπολογίζω τη συνιστώσα της F ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

$$\vec{F} = -grad\,E_P \Rightarrow \vec{F} = -\vec{V}\,E_P$$

$$F_x = \frac{\theta E_P}{\theta x} \quad , \quad F_y = \frac{\theta E_P}{\theta y} \quad , \quad F_z = \frac{\theta E_P}{\theta z}$$

$$\vec{V} = \frac{\theta}{\theta x} i^2 + \frac{\theta}{\theta y} j^2 + \frac{\theta}{\theta z} k^2$$

5.4 Ορισμός Δυναμικής Ενέργειας:

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις,στις οποίες το έργο,το παραγόμενο από την δύναμη , μπορεί να κάνει την εμφανισή του κάποια άλλη χρονική στιγμή.Έτσι, όταν ανεβάζουμε ένα σώμα από το πάτωμα σε κάποιο ύψος, χρειάζεται να δαπανήσουμε έργο.Το έργο αυτό εκδηλώνεται υπό την μορφή κινητικής ενέργειας, όταν το σώμα πέσει στο πάτωμα.Ακριβώς, λόγω αυτής της αντιστρεπτής ιδιότητας,λέμε ότι το σώμα στο ύψος εκείνο έχει αποθηκευμένη ενέργεια,που καλείται δυναμική ενέργεια και συμβολίζεται με U.

$$W_{AB} - \Delta U_{AB} = -(U_B - U_A) = U_A - U_B$$

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} \Rightarrow \int_A^B \vec{F} * \vec{dr} = -\int_A^B dU_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} * \vec{dr} = -dU_{AB} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{du}{\vec{dr}}$$

Γενικά: $F(\vec{r}) = -\vec{V} * U$

$$\vec{V} = -\frac{\theta}{\theta x} i^2 + \frac{\theta}{\theta y} j^2 + \frac{\theta}{\theta z} k^2$$

Έτσι:

$$F_x = -\frac{\theta U_x}{\theta x} \quad , \quad F_y = -\frac{\theta U}{\theta y} \quad , \quad F_z = -\frac{\theta U}{\theta z}$$

Σχέση ορισμού της δύναμικής ενέργειας:

$$F = -\vec{V}\, U$$

Δυναμική Ενέργεια Ελατηρίου

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{AB} = -\Delta U_{AB}$$

$$-\Delta U_{AB} = W_{AB} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{AB} - \Delta U_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{AB} - U_{AB} = cost$$

5.5 Το Ηλεκτρικό Δυναμικό

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου

Υποθέτουμε ότι το Β είναι το πεδίο κάποιας στατικής κατανομής ηλεκτρικών φορτίων. Τα P_1 και P_2 είναι δύο τυχούσες θέσεις στο χώρο του πεδίου.Το επικαμπύλιον ολοκλήρωμα του Ε κατά μήκος ενός δρόμου,που συνδέει τα P_1 και P_2, όπως στο Σχ.2.1, συμβολίζεται με $\int_{P_1}^{P_2} E * ds$. Η σημασία του είναι η εξής: Διαιρούμε το δρόμο σε μικρά τμήματα, που το καθένα παριστάνεται με ένα διάνυσμα το οποίο ενώνει τα άκρα του,παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο του κάθε τμήματος με το Ε στη θέση αυτή. Προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά για όλο το δρόμο. Το ολοκλήρωμα ως συνήθως θεωρείται σαν το όριο αυτού του αθροίσματος, όταν τα τμήματα του δρόμου γίνονται μικρότερα και πολυαριθμότερα χωρίς περιορισμό.
Ας διαπραγματευτούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.Υποθέτουμε πως έχουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο Ε τέτοιο, που να είναι $E_x = K_y$ και $E_y = K_x$ με το Κ= σταθερό. Αυτό τυχαίνει να είναι μία δυνατή μορφή ηλεκτροστατικού πεδίου. {Σε λίγο θα μάθουμε πως μπορούμε αυτό να το αναγνωρίζουμε εύκολα}. Το Σχ.2.2α δείχνει μερικές γραμμές του πεδίου. Ποια είναι η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του Ε μεταξύ των σημείων Α και C κατά μήκος του δρόμου ABC του διαγράμματος. Το διάνυσμα που παριστάνει ένα στοιχειώδη δρόμο είναι :

$$ds = \hat{x}\, dx + \hat{y}\, dy$$

και επειδή εδώ είναι

$$E = K(\hat{x}\, y + \hat{y}\, x)$$

το εσωτερικό γινόμενο E*ds για κάθε στοιχειώδη δρόμο είναι :

$$E * ds = K(y\, dx + x\, dy)$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα από το A στο B έχουμε y=2x και dy=2dx

$$\int_A^B E * ds = K \int_A^B y\, dx + x\, dy = K \int_0^1 2\mathrm{x}\, dx + 2\mathrm{x}\, dx = 4\mathrm{K} \int_0^1 x\, dx = 2\mathrm{K}$$

Κατά μήκος του δρόμου από το B στο C έχουμε y=2 και dy=0. Επομένως,

$$\int_B^C E * ds = K \int_B^C y\, dx + x\, dy = K \int_1^2 2\, dx = 2\mathrm{K}$$

<u>Το Ηλεκτρικό Δυναμικό</u>

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο στο δρόμο ABC είναι συνεπώς 2K + 2K ή 4K.

Το ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού φορτίου διευθύνεται ακτινικά και το μέτρο του εξαρτάται μονάχα από την ακτίνα r. Αν τα P_1 και P_2 είναι δύο τυχόντα σημεία του πεδίου που δημιουργεί το σημειακό φορτίο,είναι αρκετά προφανές ότι το επικαμπύλιο ολοκήρωμα του E είναι το ίδιο για όλους τους δρόμους που συνδέουν τα δύο σημεία. Στην πραγματικότητα η μόνη διαφορά μεταξύ του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της δυνάμεως F,που εξασκείται σε ένα δοκιμαστικό φορτίο q, και του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του E,του πεδίου δηλαδή μέσω του οποίου κινείται το φορτίο q, είναι ο παράγοντας q. Κάθε ηλεκτροστατικό πεδίο είναι τώρα απλώς η επαλληλία των πεδίων ορισμένων φορτίων , όπως εκφράζεται από τις Εξ. 1.14 και 1.15. Σε κάθε τέτοι πεδίο συνεπώς το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του E, που είναι το συνολικό Ε που οφείλεται σε όλες τις πηγές, πρέπει να είναι ανεξάρτητο του δρόμου , δηλαδή:

$$\text{Το} \int_{P_1}^{P_2} E*ds \text{ έχει την ίδια για όλους τους δρόμους που ενώνουν τα σημεία } P_1 \text{ και } P_2 \text{ σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο.}$$

Ως παράδειγμα θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του προηγούμενου πεδίου Ε από το Α στο C μέσω του δρόμου που διέρχεται από το σημείο (2,0) όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2c. Κατά μήκος του πρώτου τμήματος,δηλαδή στο τμήμα των x από την αρχή ως το x=2, το πεδίο είναι κάθετο στο δρόμο οπότε το E*ds είναι μηδέν. Στο δεύτερο σκέλος είναι $E_y = Kx = 2\mathrm{K}$ το μήκος του δρόμου αυτού είναι 2 μονάδες. Έτσι παίρνουμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα την τιμή 4Κ όπως ακριβώς και πρίν. Στην πράξη, εφόσον αναγνωρίσουμε ότι το επικαμπούλιο ολοκλήρωμα πρέπει να είναι ανεξάρτητο του δρόμου , θα είναι ανόητο να το υπολογίσουμε μέσω ενός δρόμου σαν το ABC. Πάντως, δε θα χρειαστούμε να υπολογίσουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα πολλές φορές. Ο κύριος σκοπός του παραπάνω παραδείγματος ήταν να καταλάβεται τι ακριβώς σημαίνει επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

5.6 Διαφορά δυναμικού και συνάρτηση δυναμικού

Μια και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ανεξάρτητο , μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε,για να ορίσουμε μία βαθμωτή ποσότητα V21 ως εξής:

$$V_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} E*ds$$

Το V21 είναι τότε το έργο ανά μονάδα φορτίου,που παράγεται κατά μετακίνηση ενός θετικού φορτίου από το σημείο P_1 ως το P_2 μέσα στο πεδίο E. Έτσι, το V21 είναι μία μονότιμη βαθμωτή συνάρτηση των δύο θέσεων P_1 και P_2 . Το V21 το ονομάζουμε διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων.
Η μονάδα διαφοράς δυναμικού στο M.K.S . σύστημα είναι το volt. Αυτό ισοδυναμεί με διαφορά δυναμικού τέτοια, που να απιτείται έργο ενός Joule για τη μετακίνηση φορτίου ενός Coulomb.
Υποθέτουμε τώρα ότι κρατάμε το σημείο P_1 σε μια σταθερή θέση αναφοράς.Τότε η V21 γίνεται συνάρτηση μόνο του P_2 , δηλαδή συνάρτησητων συντεταγμένω χώρου x,y,z. Μπορούμε να γράψουμε απλώς V(x,y,z) χωρίς δείκτες, αρκεί να θυμόμαστε ότι ο ορισμός του συνεπάγεται μια συμφωνία σχετικά με κάποιο σημείο αναφοράς.Λέμε τότε ότι το V είναι το δυναμικό που σχετίζεται με το διανυσματικό πεδίο E. Το δυναμικό είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσεως ή ένα βαθμωτο πεδίο (που είναι το ίδιο πράγμα). Η τιμή του σε κάθε σημείο είναι απλώς ένας αριθμός (σε μονάδες έργου ανά μονάδα φορτίου) και δεν έχει κάποια διεύθυνση συσχετισμένη με αυτό. Όταν δλινεται ένα διανυσματικό πεδίο E, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δυναμική συνάρτηση V,στην οποία πάντα πρέπει να προσθέτουμε μία αυθαίρετη σταθερά που ορίζει το δυναμικό του P_1 και που εμείς εκλέγουμε αυθαίρετα.
Για παράδειγμα, ας βρούμε το δυναμικό που σχετίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο που περιγράφεται στο Σχ.2.2. Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το P_1 στην αρχή των συντεταγμένων, στο σημείο A του Σχ.2.2.. Για να προσδιορίσουμε το ,

$$\int E * ds$$

από αυτό το σημείο αναφοράς προς το τυχόν σημείο(x,y) ο ευκολότερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα δρόμο σαν το διακεκομμένο του Σχ.2.2 , δηλαδή

$$V(x,y)=-\int_{(0,0)}^{(x,y)} E*ds=-\int_{(0,0)}^{(x,0)} E_x dx-\int_{(x,0)}^{(x,y)} E_y dy$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν,όπως είπαμε στα προηγούμενα,επειδή σε αυτό το E_x είναι μηδέν κατά μήκος του άξονα των x. Η δεύτερη ολοκλήρωση γίνεται με x σταθερό και μία και $E_y=Kx$, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$-Kx\int_{0}^{y} dy$$

που έχει την τιμή -Kxy.Για το πεδίο αυτό λοιπόν το δυναμικό είναι :

$$V=-Kxy$$

<u>Το Ηλεκτρικό Δυναμικό</u>

Σε αυτό μπορεί να προστεθεί οποιαδήποτε σταθερά. Αυτό το μόνο που σημαίνει είναι ότι το σημείο αναφοράς που θεωρήσαμε ότι έχει δυναμικό μηδέν έπρεπε να τοποθετηθεί κάπου αλλού.
Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να μη συγχέουμε το δυναμικό V που σχετίζεται με κάποιο πεδίο E με τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων.Η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος φορτίων είναι το συνολικό έργο που χρειάζεται , για να συγκεντρώσουμε στις θέσεις που βρίσκονται. Στην Εξ.1.8 για παράδειγμα, εκφράσαμε με U τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων του Σχ.1.6. Το ηλεκτρικό δυναμικό V(x,y,z) , που σχετίζεται με το πεδίο του Σχ.1.6 , είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου που απαιτείται,για να φέρουμε ένα μοναδιαίο δοκιμαστικό θετικό φορτίο από το άπειρο ως το σημείο (x,y,z) του πεδίου,της δομής αυτής των οκτώ

φορτίων.

<u>Βαθμίδα βαθμωτής συναρτήσεως</u>

Άμα δοθεί το ηλεκτρικό πεδίο,μπορούνε να βρούμε τη συνάρτηση ηλεκτρικού δυναμικού.Μπορούμε όμως να δουλέψουμε και κατά την αντίστροφη πορεία,δηλαδή από το δυναμικό να βρούμε πεδίο.Θα μπορούσαμε να συνεπάγουμε από την Εξ.7 ότι το πεδίο είναι κατά κάποιο τρόποή παράγωγος της συναρτήσεως δυναμικού.Για να ορίσουμε ακριβώς αυτή την έννοια,εισάγουμε τη βαθμίδα (gradient) μιας βαθμωτής συναρτήσεως θέσεως.Έστω f (x,y,z)
κάποια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση των συντεταγμένων.Με τις μερικές παραγώγους $\frac{\theta f}{\theta x}$, $\frac{\theta f}{\theta y}$ και $\frac{\theta f}{\theta z}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε σε κάθε σημείο του χώρου ένα διάνυσμα, που οι συνιστώσες του x,y,z να είναι ίσες προς τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους. Το διάνυσμα αυτό το λέμε βαθμίδα της f και το συμβολίζουμε με grad f ή Vf, δηλαδή:

$$Vf = \hat{x}\frac{\theta f}{\theta x} + \hat{y}\frac{\theta f}{\theta y} + \hat{z}\frac{\theta f}{\theta z}$$

Το Vf είναι ένα διάνυσμα, που λέει πως μεταβάλλεται η συνάρτηση f στη γειτονιά ενός σημείου. Η x συνιστώσα του είναι η μερική παράγωγος της f ως προς x, ένα μέτρο δηλαδή του ρυθμού μεταβολής της f, όταν κινούμαστε στη διεύθυνση των x. Η κατεύθυνση του διανύσματος Vf σε κάθε σημείο είναι η κατεύθυνση,στην οποία πρέπει να κινηθούμε από το σημείο,για να έχουμε την πιο αργή αύξηση στη συνάρτηση f. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε μία συνάρτηση δύο μόνο μεταβλητών x και y έτσι ώστε η συνάρτηση να μπορεί να [αρασταθεί με μία επιφάνεια στο χώρο των τριών διαστάσεων. Αν σταθούμε πάνω σε αυτή την επιφάνεια σε κάποιο σημείο, βλέπουμε την επιφάνεια να ανεβαίνει προς κάποια κατεύθυνση και να κλίνει προς τα κάτω στην αντίθετη κατεύθυνση. Υπάρχει μία κατεύθυνση,στην οποία ένα μικρό βήμα θα μας ανεβάσει ψηλότερα από ότι ένα βήμα του ίδιου μήκους σε κάποια άλλη κατεύθυνση.Η βαθμίδα της συναρτήσεως είναι ένα διάνυσμα σε αυτή την κατεύθυνση της πιο απότομης αναρριχήσεως,που το μέτρο του είναι η κλίση που μετράμε κατά την κατεύθυνση αυτή.

Το σχήμα 2.3 βοηθάει ίσως να πάρει κανένας μια εικόνα γιαυτά που είπαμε παραπάνω.Υποθέτουμε πως κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση των δύο συντεταγμένων x και y παριστάνεται με την επιφάνεια f(x,y),που φαίνεται σχεδιασμένη στο Σχ.2.3α.Στην θέση $(x_{1,} y_1)$ η επιφάνεια ανεβαίνει πιο απότομα κατά τη διεύθυνση που σχηματίζει γωνία περίπου 80 μοίρες με το θετικό ημιάξονα των x. Η βαθμίδα της f(x,y) , Vf είναι μια διανυσματική συνάρτηση των x και y.Ο διανυσματικός της χαρακτήρας υποδηλώνεται στο Σχ.2.3b με έναν αριθμό διανυσμάτων σε διάφορα σημεία του δισδιάστατου χώρου,που περιέχουν και τα σημεία $(x_{1,} y_1)$. Η διανυσματική συνάρτηση Vf, που ορίζεται στην Εξ.12 , είναι απλώς μία επέκταση της έννοιας αυτής στον τρισδιάστατο χώρο.(Προσέξτε και μη συγχέεται το Σχ.2.3α με το πραγματικό τρισδιάστατο χώρο (x,y,z), η τρίτη συντεταγμένη του σχήματος αυτού είναι οι τιμές της συναρτήσεως f(x,y))

Σαν παράδειγμα συναρτήσεως στον τρισδιάστατο χώρο ας υποθέσουμε ότι είναι η f, που είναι συνάρτηση μονάχα του r,όπου r είναι η απόσταση από κάποιο σταθερό σημείο 0.Σε μία σφαίρα που έχει ακτίνα r_0 και κέντρο το 0 ή $f=f(r_0)$ είναι σταθερή.Σε μία λίγο μεγαλύτερη σφαίρα ακτίνας r_0+dr η f είναι πάλι σταθερή, αλλά έχει τιμή $f=f(r_0+dr)$. Αν θέλουμε να μεταβάλλουμε την $f(r_0)$ σε $f(r_0+dr)$, ο μικρότερο βήμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να κινηθούμε ακτινικά . Η “κλίση” της f είναι συνεπώς μέγιστη κατά την ακτινική διεύθυνση, οπότε το Vf σε κάθε σημείο θα είναι ένα διάνυσμα συγγραμικό της ακτίνας.Στην περίπτωση αυτή δηλαδή είναι $Vf=\hat{r}(\frac{df}{dr})$, όπου με το $\hat{r}$ συμβολίζουμε για κάθε σημείο το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την ακτινική φορά.

Παραγωγή του πεδίου από το δυναμικό

Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση της βαθμωτής συναρτήσεως f προς τη διανυσματική συνάρτηση Vf είναι η ίδια,εκτός από ένα πρόσημο πλην,με τη σχέση μεταξύ δυναμικού v και του πεδίου E. Θεωρούμε την τιμή του V σε δυο γειτονικά σημεία (x,y,z) και (x+dx. y+dy,z+dz). Η μεταβολή του V,όταν πηγαίνουμε από το πρώτο σημείο στο δεύτερο, είναι:

$$dV = \frac{\theta V}{\theta x} dx + \frac{\theta V}{\theta y} dy + \frac{\theta V}{\theta z} dz$$

Από την άλλη μεριά,από τον ορισμό του V η μεταβολή αυτή μπορεί επίσης να εκφραστεί σαν :

$$dV = -E * ds$$

Η απειροστή μετατόπιση ds του διανύσματος είναι απλώς $\hat{x}\, dx + \hat{y}\, dy + \hat{z}\, dz$. Έτσι, αν ταυτίσουμε το E με το -V οι Εξ.13 και 14 γίνονται εντελώς οι ίδιες. Με αυτό τον τρόπο βρίσκεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με την αρνητική τιμή της βαθμίδος του δυναμικού,δηλαδή :

$$E = -\vec{V}\, V$$

Μπαίνει το αρνητικό πρόσημο γιατί το ηλεκτρικό πεδίο κατευθύνεται από περιοχή θετικού δυναμικού σε περιοχή αρνητικού δυναμικού,ενώ το δίανυσμα VV ορίζεται έτσι ώστε να δείχνει προς την καεύθυνση προς την οποία αυξάνει το V.

Για να δείξουμε πως γίνεται αυτό , γυρνάμε πίσω στο παράδειγμα του πεδίου του Σχ.2.2. Από το δυναμικό που δίνεται από την Εξ.11, $-V=-Kxy$, μπορούμε να ξαναβρούμε το ηλεκτρικό πεδίο από το οποίο αρχίσαμε,όπως φαίνεται από την παρακάτω παράσταση:

$$E=-V(-Kxy)=-(\hat{x}\frac{\theta}{\theta x}+\hat{y}\frac{\theta}{\theta y}+\hat{z}\frac{\theta}{\theta z})(-Kxy)=K(\hat{x}\,y+\hat{y}\,x)$$

5.7 Δυναμικό κατανομής φορτίου

Γνωρίζουμε ήδη το δυναμικό που χαρακτηρίζει ένα μοναχικό σημειακό φορτίο,γιατί υπολογίσαμε με την Εξ.3 το έργο που χρειάζεται,για να φέρουμε ένα φορτίο στη γειτονία ενός άλλου.Το δυναμικό σε κάθε σημείο του χώρου, που οφείλεται στην παρουσία ενός μοναχικού σημειακού φορτίου q, είναι απλώς $q/(4_{\pi\varepsilon 0r})$,όπου r είναι η απόσταση αυτού του σημειακού χώρου από την πηγή q. Για τα σημεία που βρίσκονται σε άπειρη απόσταση από την πηγή έχουμε καθορίσει ότι το δυναμικό είναι μηδέν.

Η αρχή της επαλληλίας πρέπει να ισχύει τόσο για τα δυναμικά όσο και για τα πεδία.Αν έχουμε πολλές πηγές,η συνάρτηση δυναμικού είναι απλώς το άθροισμα των συναρτήσεων δυναμικού που θα είχαμε για καθεμιά από αυτές ξεχωριστά, αρκεί

,

$$E_x=K_y$$

$$E_y=K_x$$

$$d\vec{s} = dx\,\hat{ux} + dy\,\hat{uy} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = E_x\,\hat{ux} + E_y\,\hat{uy} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = K_y\,\hat{U}_x + K_x\,\hat{U}_y$$

$$\int_A^C \vec{E} * d\,\vec{s} = \int_A^B \vec{E} * \vec{ds} + \int_B^C \vec{E} * ds \qquad AB = y = 2\text{x} \quad , \quad BC = y = 2$$

$$\Rightarrow \quad \int_A^B (E_x\,dx + E_y\,dy) + \int_B^C (E_x\,dx + E_y\,dy)$$

$$\int_A^B K_y\,dx + \int_A^b K_x\,dy + \int_B^C K_y\,dx + \int_B^C K_x\,dy \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 K2xdx + \int_0^1 Kx\,2\,dx + \int_1^2 K2dx + \int_1^2 Kx * 0$$

$$4\int_0^1 Kx\,dx + 2\int_1^2 Kdx$$

$$4K\frac{x^2}{2}\int_0^1 + 2\text{k} * 1$$

$$4\text{K}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 2\text{K} \quad \Rightarrow \quad 2\text{K} + 2\text{K} \quad \Rightarrow \quad \int_A^C \vec{E}\,\vec{ds} = 4\text{K}$$

$$\int_A^C \vec{E} * \vec{ds} = \int_A^{B'} \vec{E} * ds + \int_{B'}^C \vec{E} * ds \quad \Rightarrow \quad \int_A^{B'} E_x\,dx + \int_A^{B'} E_y\,dy + \int_{B'}^C E_x\,dx + \int_{B'}^C E_y\,dy$$

$$\int_0^2 K_y\,dx + \int_0^2 K_x\,dy \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 K0\,dx + K\int_0^2 2 * dy \quad \Rightarrow \quad 2\text{K}\int_0^2 dy$$

$$2\text{K} * 2 \Rightarrow 4\text{K} \quad \Rightarrow \quad \int_A^C \vec{E} * \vec{ds} = 4\text{K}$$

Το $\int \vec{E} * \vec{ds}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.Άρα μπορεί να εκφραστεί ως διαφορά μεταξύ δύο θέσεων ενός μεγέθους (Δ.Δ).

$$-\int_{A}^{C} \vec{E} * ds = \Delta V_{21} = V_2 - V_1$$

Διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων ηλεκτροστατικών πεδίων ισούται με :

$$\Delta V_{21} = -\int_{1}^{2} \vec{E} * \vec{ds}$$

$$V_2 - V_1 = -\int_{1}^{2} \vec{E} * \vec{ds}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $\vec{F} = \vec{E} * q \Rightarrow q \int_{1}^{2} \vec{E} * \vec{ds} = \int \vec{F} * \vec{ds} = -\Delta U_{12} = -(U_2 - U_1)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 |ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δομή και η συμπεριφορά του φυσικού κόσμου μπορούν να περιγράψουν πλήρως με την ύπαρξη τεσσάρων θεμελιωδών δυνάμεων (αλληλεπιδράσεις).
Οι δυνάμεις αυτές είναι : δυνάμεις βαρύτητας (G), ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις (E), ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις (S) , ασθενείς πυρηνικές δυνάμεις (W).
Οι τέσσερις αυτές αλληλεπιδράσεις κάνουν την εμφανισή τους κυρίως στα ζεύγη των στοιχειωδών σωματιδίων. Σε ορισμένα εμφανίζονται συγχρόνως και οι τέσσερις, σε άλλα μόνον μερικές, ενώ σε κάποια άλλα κανένα.

6.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Βαρυντική Δύναμη

Η φύση των δυνάμεων της βαρύτητας είναι σχεδόν άγνωστη. Αυτό εξηγείται εύκολα από το γεγονός ότι οι βαρυντικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς. Είναι επομένως πολύ δύσκολο να μελετηθούν πειραματικά.Για να διευκολυνθεί η μελέτη τους χρησιμοποιούνται έννοιες ανάλογες με αυτές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Ηλεκτρομηγνητικές Δυνάμεις

Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις οφείλονται στην ύπαρξη ηλεκτρικών φορτίων και εκφράζονται από τον γνωστό τύπο : $F = q \cdot E + q \cdot v * B$
Όταν πρόκειται για στατικά φορτία,έχει έννοια μόνο ο πρώτος όρος και η δύναμη ανάγεται στην ηλεκτροστατική δύναμη,δηλαδή τη δύναμη που εμφανίζεται μεταξύ δύο ακίνητων φορτίων. Η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων Q1 και Q2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r εκφράζεται από το νόμο Coulomb :

$$F_e = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

Το μέτρο της δύναμης (έλξης ή άπωσης) είναι ανάλογο του γινομένου των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της αποστάσως.

Ισχυρές Πυρηνικές Δυνάμεις

Οι ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις είναι ανεξάρτητες του φορτίου. Οι δυνάμεις αυτές είναι κορεσμένες καθώς επίσης έχουν μικρή εμβέλεια.

Ασθενείς Πυρηνικές Δυνάμεις

Στις δυνάμεις αυτές συμμετέχουν μόνο τα λεπτόνια,η εμβελειά τους είναι μικρή.Οι ασθενείς δυνάμεις δημιουργούν ένα βαθμό αστάθειας για τον πυρήνα και είναι κυρίως υπεύθυνες για τη β-αποδιέγερση που συνοδεύεται από την εκπομπή ενός ηλεκτρονίου και ενός νετρονίου.

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Επιτάχυνση Δέσμης

$$\frac{1}{2} mUo^2 = Vo \Rightarrow Uo^2 = \frac{2\mathrm{eVo}}{m} \Rightarrow Uo^2 = 2\left(\frac{e}{m}\right)Vo \quad \Rightarrow \quad Uo^2 = 2\mathrm{nVo} \Rightarrow Uo = \sqrt{2\mathrm{nVo}}$$

Παραβολική Τροχιά

$$Fx = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow Ux = Uo \Rightarrow x = Uo*t$$

$$Fy = E*e \Rightarrow a_y = E\frac{a}{m} \Rightarrow a_y = E*n \Rightarrow U_y = a_y*\mu \quad \Rightarrow \quad U_y = En*t$$

$$y = \frac{1}{2} En*t^2$$

$$x = l \Rightarrow l = Uo*\mu \Rightarrow t_{OA} = \frac{l}{Uo}$$

Ευθύγραμμη Διαδρομή

$$Y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{xl} (x - x_1)$$

$$Y = \frac{Vp}{4\mathrm{dVo}} x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\mathrm{Vp}}{4\mathrm{dVo}} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Vp}{2\mathrm{dVo}} x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{xl} = \frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}}$$

$$Y_1 = \frac{Vp}{4\mathrm{dVo}} x_1^2$$

$$\Rightarrow \qquad Y_1=\frac{Vp}{4\mathrm{dVo}}l^2$$

$x_1=l$

Τελικά :

$$Y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{xl}(x-x_1) \qquad\qquad Y-\frac{Vp}{4\mathrm{dVo}}l^2=\frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}}(x-l)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{xl}=\frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}} \qquad\qquad y=\frac{Vpl^2}{4\mathrm{dVo}}+\frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}}x-\frac{Vpl^2}{2\mathrm{dVo}}$$

$$x_1=l \qquad\qquad y=\left(\frac{Vpl^2}{4\mathrm{dVo}}-\frac{2\mathrm{Vpl}^2}{4\mathrm{dVo}}\right)+\frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}}x$$

$$y_1=\frac{Vp}{4\mathrm{dVo}}l^2 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{-Vpl^2}{4\mathrm{dVo}}+\frac{Vpl}{2\mathrm{dVo}}x$$

ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Εντός Μαγνητικού Πεδίου

$$R=\frac{Uo}{nB}$$

Για μικρές γωνίες Θ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} tan\theta \approx sin\theta \\ tan\theta = \dfrac{l}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad sin\theta \approx \frac{l}{R} \Rightarrow \theta \approx \frac{l}{R}$$

Από την άλλη πλευρά:

$$tan\theta = \frac{Y_p}{L + \frac{l}{2}} \quad \Rightarrow \quad tan\theta \approx \frac{Y_p}{L}$$ και επειδή $tan\theta \approx \theta \approx g$

$$\left.\begin{array}{l} \theta \approx \dfrac{Y_p}{L} \\ \theta \approx \dfrac{l}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{Yp}{L} = \frac{l}{R} \Rightarrow Y_p = \frac{L*l}{R} \quad \Rightarrow \quad Yp = L*l\frac{nB}{Uo} \quad \Rightarrow \quad Y_p = L*lnB$$

$$R = \frac{Uo}{nB} \qquad Uo = \sqrt{2nVo} \qquad Uo = \sqrt{2nVo}$$

$$\Rightarrow \quad Y_p = L*l\sqrt{\frac{nl}{2nVo}}B \Rightarrow Y_p = L*l\sqrt{\frac{n}{2Vo}}B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_p}{B} = L*l\sqrt{\frac{n}{2Vo}}$$

32α) $R = \dfrac{mVo}{Bg}$

$$sin\theta = \frac{L}{R}$$

$d = R - R\,cos\theta$

32s) $U = 2\mathrm{Uo}$

$Ux = Uo$

$$U = \sqrt{Ux^2 + Uy^2} \Rightarrow 2\mathrm{Uo} = \sqrt{Uo^2 + Uy^2} \Rightarrow 4\mathrm{Uo}^2 = Uo^2 + Uy^2 \Rightarrow Uy^2 = 3\mathrm{Uo}^2 \Rightarrow Uy = \sqrt{3}\,Uo$$

$$tan\theta = \frac{Uy}{Uo} \Rightarrow tan\theta = \sqrt{3}\frac{Uo}{Uo} \Rightarrow tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 600$$

$F = -6\mathrm{\pi rnu}$

$$\Sigma F = F - Fori \Rightarrow m\frac{du}{dt} = F * \lambda u \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{F}{m} - \frac{\lambda}{m}u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{\frac{F}{m} - \frac{\lambda}{m}U} = dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{\xi} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{-m}{\lambda}\frac{d\xi}{\xi} = dt \Rightarrow \frac{d\xi}{\xi} = \frac{-\lambda}{m}dt \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{F}{m} - \frac{\lambda}{m}U$$

$$\int \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{\lambda}{m}\int dt$$

$$d\xi = \frac{-\lambda}{m}du$$

$$\ln \int_{\frac{F}{m}-\frac{\lambda}{m}}^{\frac{F}{m}-\frac{\lambda}{m}U} \frac{-\lambda}{m} t \Rightarrow \ln \frac{\frac{F}{m}-\frac{\lambda}{m}U}{\frac{F}{m}} = -\frac{\lambda}{m} t$$

$$du = \frac{-m}{\lambda} d\xi \qquad \frac{\frac{F}{m}}{\frac{P}{m}} - \frac{\frac{1}{m}}{\frac{P}{m}} U = e - \frac{\lambda}{m} t \Rightarrow 1 - \frac{\lambda}{P} U = e -^{(\frac{\lambda}{n})} t$$

$$\frac{\lambda}{F} U = 1 - e -^{(\frac{\lambda}{n})} t \Rightarrow U = \frac{F}{\lambda}(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} t)$$

$$U = \frac{F}{6\pi \mathrm{rn}}(1 - e^{-(\frac{\lambda}{n})} t)$$

$$\alpha = \frac{du}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d}{dt}[\frac{F}{\lambda}(1 - e^{-(\frac{\lambda}{n})} t)] \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F}{\lambda} \Rightarrow (\frac{-\lambda}{m}) e^{-\frac{\lambda}{mt}} \Rightarrow \alpha = \frac{F}{m} e^{-\frac{\lambda}{mt}}$$

$$U = \frac{F}{\lambda}(1 - e^{-(\frac{\lambda}{m})} t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{F}{\lambda}(1 - e^{-(\frac{\lambda}{m})} t) \quad \Rightarrow$$

$$dy = \frac{F}{\lambda}(1 - e^{-(\frac{\lambda}{m})} t) dt \Rightarrow y = \frac{F}{\lambda} t - \left| e^{-\frac{\lambda}{m}} \right| t\, dt \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{F}{\lambda} t - \frac{m}{\lambda} \int e^{-\frac{\lambda}{m} t} d(-\frac{\lambda}{m} t) \Rightarrow y = \frac{F}{\lambda} t + \frac{m}{\lambda} \int e^{-u} du \Rightarrow y = \frac{F}{\lambda} t + \frac{m}{\lambda} [\varepsilon^{-u}]$$

$$y=\frac{F}{\lambda}t+\frac{m}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda}{mt}}-1) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{F}{\lambda}t-\frac{m}{\lambda}(1-e^{-\frac{\lambda}{mt}})$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

38) $F=\lambda*\frac{1}{u}$

$$F=m*a\Rightarrow F=m\frac{du}{dt}\Rightarrow\lambda\frac{1}{u}-m\frac{du}{dt}\Rightarrow\lambda dt=mudu$$

$$\lambda\int_0^t dt=m\int_{Uo}^0 udu\Rightarrow\lambda t=m(\frac{u^2}{2}-\frac{uo^2}{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{m}t+\frac{uo^2}{2}=\frac{U^2}{2}\Rightarrow U^2=\frac{2\lambda}{m}t+Uo^2 \quad \Rightarrow$$

$$u=\sqrt{\frac{2\lambda}{m}t+Uo^2}$$

$$a=\frac{du}{dt}\Rightarrow a=[(\frac{2\lambda}{m}t+Uo^2)]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a=\frac{1}{2}(2\lambda+Uo^2)^{\frac{1}{2}-1}(2t+Uo^2)$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}(\frac{2t}{m}+Uo^2)\Rightarrow a=(\frac{2t}{m}+Uo^2)^{\frac{-1}{2}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 | ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

7.1 Κλίση ανάρτησης

grad Φ(x,y,z) ή $\vec{V}\,\Phi(x,y,z)=\frac{\theta\Phi}{\theta x}\hat{i}+\frac{\theta\Phi}{\theta y}\hat{j}+\frac{\theta\Phi}{\theta z}\hat{k}$

Το grad Φ είναι ένα διάνυσμα,που εφαρμόζεται στο εν λόγω σημείο,είναι κάθετο στην ισοτιμική επιφάνεια που περιέχει το σημείο, και έχει φορά προς τα σημεία με τη μεγαλύτερη τιμή του Φ.

Το grad μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι <u>διάνυσμα.</u>

$$d\,\Phi(x,y,z)=\frac{\theta\Phi}{\theta x}dx+\frac{\theta\Phi}{\theta y}dy+\frac{\theta\Phi}{\theta z}dz \quad , \quad \vec{dr}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}+dz\,\hat{k}$$

$d\,\Phi(x,y,z)=\vec{dr}*grad\,\Phi$, προσοχή $\vec{dr}$ μοναδιαίο.

$$\bar{V}(k\,f)=k\,\bar{V}\,f$$
$$\bar{V}(f*g)=\bar{V}(f)+\bar{V}\,g$$
$$\bar{V}(fg)=f\,\bar{V}\,g+g\,\bar{V}\,f$$
$$Du\,\Phi=\bar{V}\,\Phi*\vec{u}=|\bar{V}\,\Phi||u|*cos\theta\,,\,u=unit\ vector$$

1) Σε δισδιάσταστο χώρο η παράγωγος,μου δείχνει αν μετακινηθώ λίγο πάνω στον άξονα θα αυξηθεί το Φ.

Σε ν-διάστατο χώρο η Du μου δείχνει σε διεύθυνση $\vec{U}$ αν κινηθώ μεταβάλλεται η Φ.

2) $\bar{V}\,\Phi$ δείχνει την διεύθυνση που αυξάνεται γρηγορότερα η Φ.

$-\bar{V}\,\Phi$ Δείχνει την διεύθυνση που μειώνεται γρηγορότερα η Φ.

3) $\frac{d\Phi}{dx}=\vec{\bar{V}}\Phi\,\hat{i}$, $\frac{d\Phi}{dy}=\vec{\bar{V}}\Phi\,\hat{j}$, $\frac{d\Phi}{dz}=\vec{\bar{V}}\Phi\,\hat{k}$

7.2 Ο τελεστής $\bar{V}$

$$ba\vec{r}V=\frac{\theta}{\theta x}\hat{i}+\frac{\theta}{\theta y}\hat{j}+\frac{\theta}{\theta z}\hat{k}$$ Από αριθμό Φ(x,y,z) ⇒ διάνυσμα

$V\Phi^{-}_{(x,y,z)}$

7.3 Από κλίση διανυσματικής συνάρτησης

$\vec{A}=\vec{A}(\vec{r})\Rightarrow \quad A1=A1(x,y,z)$

$A2=A2(x,y,z)$

$A3=A3(x,y,z)$

$d\,\vec{A}=\frac{\theta A_1}{\theta x}+\frac{\theta A_2}{\theta v}+\frac{\theta A_3}{\theta z}$ Από το διάνυσμα (Α) μεταβαίνουμε στο αριθμητικό πεδίο

$d\,\vec{A}=\vec{\bar{V}}*\vec{A}$

7.4 Ο τελεστής $\bar{V}^2$

$$\Phi(x,y,z) \Rightarrow grad\Phi = \frac{\theta\Phi}{\theta x}\hat{i} + \frac{\theta\Phi}{\theta y}\hat{j} + \frac{\theta\Phi}{\theta z}\hat{k}$$

$$d(grad\Phi) = \vec{\bar{V}} * grad\ \Phi \Rightarrow \div(grad\Phi) = \frac{\theta}{\theta x}(\frac{\theta\Phi}{\theta x}) + \frac{\theta}{\theta y}(\frac{\theta\Phi}{\theta y}) + \frac{\theta}{\theta z}(\frac{\theta\Phi}{\theta z})$$

$$d(grad\Phi) = \frac{\theta^{2\Phi}}{\theta x^2} + \frac{\theta^{2\Phi}}{\theta y^2} + \frac{\theta^{2\Phi}}{\theta z^2} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\bar{V}} * \vec{\bar{V}}\Phi = \vec{\bar{V}}^2\,\Phi$$

7.5 Ροή Ανύσματος – Απόκλιση Ανύσματος

$$A = A_x(x,y,z)\hat{i} + A_y(x,y,z)\hat{j} + A_z(x,y,z)\hat{k}$$

Στοιχειώσης Ροή: $d\Phi = \vec{A} * \vec{ds}$

$$\Phi = \int_s d\Phi \Rightarrow \Phi = \int_s \vec{A} * \vec{ds}$$

$$\Phi_{o\lambda} = \Phi\,\vec{A} * \vec{ds} + \Phi\,\vec{A} * \vec{ds}$$

$$\Phi_{o\lambda} = \Phi\,\vec{A} * \vec{ds}$$

$$\Phi_{o\lambda} = \Phi_{s1}\vec{A}\,\vec{ds} + \Phi_{s2}\vec{A}\,\vec{ds} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Phi_{sn}\vec{A}\,\vec{ds} = \Sigma\,\Phi_{si}\vec{A}\,\vec{ds}$$

$\lim_{vi} \frac{\Phi_{si}\vec{A}\,\vec{ds}}{Vi}$ = ορισμένη τιμή = div A

$$A=\lim_{vi}\frac{\Phi_{si}\vec{A}\,\vec{ds}}{Vi}$$ **Η ροή λέγεται και απόκλιση του** $\vec{A}$

$$\frac{d\Phi}{\vec{dr}}=grad\ \Phi\Big/_{(x,y,z)}\Rightarrow d\Phi(x,y,z)=grad\ \Phi_{(x,y,z)}\,\vec{dr}_{(x,y,z)}$$

$$d\Phi_{(x,y,z)}=\theta\Phi\frac{(x,y,z)}{\theta x}+\theta\Phi\frac{(x,y,z)}{\theta y}+\theta\Phi\frac{(x,y,z)}{\theta z}$$

$$\frac{d\Phi_{(u1,u2,u3)}}{dr_{(u1,u2,u3)}}=grad\ \Phi_{(u1,u2,u3)}\Rightarrow d\Phi_{(u1,u2,u3)}=(\frac{1}{h1}e_1du_1+\frac{1}{h2}e_2du_2+\frac{1}{h3}e_3du_3)*grad\ \Phi_{(u1,u2,u3)}$$

$$d\Phi_{(u1,u2,u3)}=h1K_1\frac{\theta\Phi}{\theta u_1}du_1+h2K_2\frac{\theta\Phi}{\theta}u_2du_2+\frac{\theta\Phi}{\theta u_3}du_3$$

Αλλά $$d\Phi=\frac{\theta\Phi}{\theta u_1}du_1+\frac{\theta\Phi}{\theta u_2}du_2+\frac{\theta\Phi}{\theta u_3}du_3$$

Άρα $$K_1=\frac{1}{h_1}\quad,\quad K_2=\frac{1}{h_2}\quad,\quad K_3=\frac{1}{h_3}$$

$$grad\ \Phi_{(u1,u2,u3)}=\frac{1}{h_1}\frac{\theta\Phi}{\theta u_1}\hat{e}_1+\frac{1}{h2}\frac{\theta\Phi}{\theta u_2}\hat{e}_2+\frac{1}{h3}\frac{\theta\Phi}{\theta u_3}\hat{e}_3$$

7.6 Απόκλιση Διανύσματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες

- $F_{(x,y,z)} \Rightarrow F_x(x,y,z)$, $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$
- $\vec{ds}_1 = \hat{z}\, dx * dy$
- $\vec{ds}_2 = -\hat{z}\, dx * dy$
- Ανάπτυγμα Taylor της Fz στη γειτονιά του (x,y,z) είναι:

$$F_z(x+a, y+b, z+c) = F_z(x,y,z) + (a\frac{\theta}{\theta x} + b\frac{\theta}{\theta y} + c\frac{\theta}{\theta y}) F_z + ... + (\frac{1}{n})(a\frac{\theta}{\theta x} + b\frac{\theta}{\theta y} + c\frac{\theta}{\theta z})^n F_z + ...$$

➔ $F_z(x+\frac{dx}{2,} y+\frac{dy}{2,} z+dz) = F_z(x,y,z) + \frac{dx}{2}\frac{\theta F_z}{\theta x} + \frac{dy}{2}\frac{\theta F_z}{\theta y} + dz\frac{\theta F_z}{\theta z}$

➔ $F_z(x+\frac{dx}{2,} y+\frac{dy}{2,} z) = F_z(x,y,z) + \frac{dx}{2}\frac{\theta F_z}{\theta x} + \frac{dy}{2}\frac{\theta F_z}{\theta y}$

- $d\Phi_z = F_z(x+\frac{dx}{2}, y+\frac{dy}{2,} z+dz) * \vec{ds}_1 - F_z(x+\frac{dx}{2,} y+\frac{dy}{2}, z)\vec{ds}_2$

➔ $d\Phi_z = dx * dy * dz\,(\frac{\theta F_z}{\theta z})$

όμοια : $d\Phi_y = dx * dy * dz\,(\frac{\theta F_y}{\theta y})$, $d\Phi_x = dx * dy * dz\,(\frac{\theta F_x}{\theta x})$

Άρα το τελικό : $d\Phi_{ολ} = (\frac{\theta F_x}{\theta x} + \frac{\theta F_y}{\theta y} + \frac{\theta F_z}{\theta z})\, dx * dy * dz$

$$d\Phi_{o\lambda}=\vec{\nabla}*\vec{F}*dV$$

$$\vec{F}=\vec{\nabla}*\vec{F}$$

$$\vec{A}=\frac{\theta A_x}{\theta x}+\frac{\theta A_y}{\theta y}+\frac{\theta A_z}{\theta z}=\vec{\nabla}*\vec{A}$$

7.7 Έκφραση ροής σε γενικευμένες συντεταγμένες

$$\vec{A}=\vec{\nabla}*\vec{A}\left(\kappa\alpha\rho\tau\epsilon\sigma\iota\alpha\nu\acute{\epsilon}\varsigma\right)$$

$$\bar{\nabla}=\frac{1}{h_1}\frac{\theta}{\theta q_1}\hat{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\theta}{\theta q_2}\hat{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\theta}{\theta q_3}\hat{e}_3\left(\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\epsilon\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\epsilon\varsigma\right)$$

7.8 Κυκλοφορία Ανύσματος- Στροβιλισμός Διανύσματος

$$r=\Phi\vec{A}*\vec{dl}$$

$$r_0=\Phi_{c1+D}\vec{A}*\vec{dl}+\Phi_{c2+D}\vec{A}*\vec{dl}$$

$$r_0=\Sigma_{i=1}\Phi_{c1}\vec{A}*\vec{dl}$$

$$\lim\Phi_{c1}\frac{\vec{A}*\vec{dl}}{si}=o\rho\iota\sigma\mu\acute{\epsilon}\nu\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}=rot\,\vec{A}*\hat{n}$$

$$rot\,\vec{A}=\hat{n}*\lim\Phi_{c1}\frac{\vec{A}*\vec{dl}}{si}$$

$rot\,\vec{A} = σρτοβιλισμός\ εκφράζει\ προς\ ποια\ διεύθυνση\ επιφάνειας\ έχει\ μεγαλύτερο\ Φ_{ci}\,\vec{A}*\vec{dl}$

7.9 Έκφραση στροβιλισμού σε καρτεσιανές συντεταγμένες

- $A(x, y)$
- $A_x(x+\frac{dx}{2}, y) = A_x(x, y) + \frac{dx}{2}\frac{θA_x}{θx}$ (στο μέσο της κάτω πλευράς)
- $A_x(x+\frac{dx}{2,} y+dy) = A_x(x, y) + \frac{dx}{2}\frac{θA_x}{θx} + dy\frac{θA_y}{θy}$ (στο μέσο της πάνω πλευράς)
- Άρα τελικά : $[A_x(x+\frac{dx}{2,} y+dy) * A_x(x+\frac{dx}{2,} y)] * (dx) = (\frac{θA_x}{θy} dy)(-dx)$ x=άξονας

όμοια: $(\frac{θA_y}{θx} dx) dy$

y=άξονας

- $\int \vec{A}*\vec{dl} = (-dx)(\frac{θA_x}{θy}) dy + dy(\frac{θA_y}{θy}) dy$

➔ $\int \vec{A}*\vec{dl} = dx*dy(\frac{θA_y}{θx} - \frac{θA_x}{θy})$

7.10 Θεώρημα Gauss και διαφορική μορφή του νόμου του Gauss

$$\int_s \vec{F}*\vec{ds}=\Sigma_{\iota=1}\left|\vec{F}*\vec{ds}i=\Sigma_{i=1}Vi\right|\int_{si}\frac{\vec{F}*\vec{ds}i}{Vi}$$

$$\int_s \vec{F}*\vec{ds}=\vec{F}\div dV\ Θεώρημα\ Gauss$$

7.11 Θεώρημα Stokes

Στην πραγματικότητα,ένα σώμα που κινείται μέσα σε ένα πραγματικό ρευστό δέχεται εξαιτίας εξωτερικών τριβών την επίδραση δύναμης,που αντιστέκεται στην κίνηση. Όταν η σχετική ταχύτητα είναι μικρή,η ροή γύρω από το σώμα είναι μόνιμη. Η αντίσταση εξαρτάται από το ιξώδες n, την ταχύτητα u,τη χαρακτηριστική διάσταση του σώματος και μία σταθερά αναλογίας που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος. Για την περίπτωση της σφαίρας η αντίσταση είναι: $F=6\cdot\pi\cdot n\cdot r\cdot u$ τύπος του Stokes.

$$\int_c \vec{F}*\vec{dl}=\Sigma_{i=1}si\left(\int_{si}\frac{\vec{F}*\vec{dl}}{si}\right)$$

$$N\rightarrow 00\Rightarrow si\rightarrow 0\Rightarrow\int_{si}\frac{\vec{F}*\vec{dl}}{si}=\left(curl\,\vec{F}\right)*\hat{n}_i$$

$$\int_c \vec{F}*\vec{dl}=\int_c\left(curl\,\vec{F}\right)*n_i ds_i=\int_s\left(curl\,\vec{F}\right)*\vec{ds}$$

➔ $\int_c \vec{F}*\vec{dl}=\int_c curlF*\vec{ds}$ θεώρημα Stokes

7.12 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Γραμμική Κατανομή φορτίου(λ=const)

<u>Α' τρόπος</u>

$$dE = \frac{1}{4\pi r \omega} \frac{dQ}{R^2} \hat{U}_R$$

$$dE_1 = \frac{R}{4\pi r \omega} \frac{dq}{R^2} cos\theta \, \hat{U}_R$$

$$x = r\, tan\theta .... r = Rcos\theta \Rightarrow dE_1 = \frac{1}{2\pi r \omega} \frac{dqcos\theta}{R^2} \hat{U}_R$$

$$6 = \frac{dq}{ds} \Rightarrow dq = 6\mathrm{ds}$$

$$\Rightarrow \qquad dq = 6\mathrm{x}\, d\,\theta dx$$

$$ds = xd\theta dx$$

$$\Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{1}{2\pi r \omega} 6\mathrm{xd\theta cos\theta} \frac{dx}{R^2} \hat{U}_R \qquad \Rightarrow \qquad x = rtan\theta \Rightarrow dx = \frac{r}{cos\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{1}{2\pi r \omega} \frac{6\mathrm{r}\, tan\theta\, d\theta\, cos\theta \frac{r}{\cos^2}\theta}{R^2} \hat{U}_R$$

$$\Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{6}{2} \pi r \omega \frac{r^2\, tan\theta \frac{1}{cos\theta} d\theta\, d\theta}{R^2} \hat{U}_R$$

$$\Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{6}{2\pi r\omega} \frac{R^2 \cos^2\theta \frac{1}{cos\theta} tan\theta\, d\theta\, d\theta}{R^2} \hat{U}_1 \qquad \Rightarrow$$

$$dE_1 = \frac{6}{2\pi r\omega} cos\theta\, tan\theta\, d\theta\, d\theta \Rightarrow dE_1 = sin\theta\, d\theta\, d\theta \frac{6}{2\pi r\omega}$$

$$E_1 = \frac{6}{2\pi r\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (sin\theta\, d\theta)\, d\theta \Rightarrow E_1 = \frac{6}{2\pi r\omega} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta\, d\theta \Rightarrow E_1 = \frac{6}{2} E$$

Δυναμικό

$$\vec{E} = -\vec{V} \Rightarrow E = \frac{-\theta V}{\theta r} \Rightarrow dv = -Edv \qquad \Rightarrow \qquad dV = -\frac{6}{2} E_0 dv \Rightarrow V = -\frac{6}{Eo} * r + c$$

- ➔ Φύλλο άπειρων διαστάσεων με πάχος l. Πυκνότητα φορτίου p=cost. Να βρεθεί το πεδίο σε όλο το χώρο.

Το πεδίο είναι ΚΑΘΕΤΟ.

Αν δεν ήταν $\vec{E} = E_1 \hat{u}_1 + E \hat{u}$

Η Ε θα κινούνταν με φορτίο $\Rightarrow$ $n\ p \neq const$

1. Έξω από την κατανομή φορτίου

$$\int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9¿}{Eo} \Rightarrow \int E - ds + \int E * ds = \frac{9¿}{Eo}$$

$$\Rightarrow \qquad 2\,E * ds = \frac{9\text{in}}{Eo} \Rightarrow E * \Delta s = \frac{9\text{in}}{2\text{Eo}} \qquad \Rightarrow E * \Delta s = \frac{9\text{l} * \Delta s}{2\text{Eo}}$$

$$9¿ = 9 * l * \Delta s$$

$$\Rightarrow E = \frac{9\text{l}}{2\text{Eo}}$$

7.12.1 Μέσα στην κατανομή φορτίου

$$\int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9\text{in}}{Eo} \Rightarrow E * \Delta s_{\alpha\rho} + E * \Delta s_{\Delta\varepsilon\xi} + \int E * \vec{ds}$$

$$\Rightarrow E(x) * \Delta s_{\alpha\rho\iota} + \frac{dl}{2\text{Eo}} * \Delta\sigma_{\Delta\varepsilon\xi} = \frac{9\text{in}}{Eo} \qquad \Rightarrow \qquad \left(E(x) + \frac{dl}{2\text{Eo}}\right)\Delta s = \frac{9\text{in}}{Eo}$$

$$9\text{in} = 9 * x\,\Delta s$$

$$E(x) + \frac{dl}{2\text{Eo}} = \frac{dx}{Eo} \Rightarrow E(x) = \frac{D}{Eo}\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Πεδίο δύο στρώσεων φορτίου επιπέδων και παραλλήλων

7.12.2 Εντός των πλαγών

$$E = E_{\alpha\rho\iota} + E_{\Delta\varepsilon\xi} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{6}{2}\,Eo + \frac{6}{2\text{Eo}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{6}{Eo}$$

7.12.3 Εκτός των πλαγών

$$E = E_{\alpha\rho\iota} + E_{\Delta\varepsilon\xi} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{6}{2\mathrm{Eo}} - \frac{6}{2\mathrm{Eo}} \Rightarrow E = 0$$

Πεδίο δύο στρώσεων φορτίου (πολλών l) και παραλλήλων

Όμοια με πριν: $E = \dfrac{Dl}{Eo} \qquad \Rightarrow E = 0$

Σφαιρική κατανομή φορτίου (D=const)

$$\int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9}{Eo}$$

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας το πεδίο είναι ακτίνιο

$$r \le R \qquad \int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9\mathrm{in}}{Eo} \Rightarrow E * 4\pi\mathrm{r}^2 - \frac{9\mathrm{in}}{Eo} \Rightarrow E = \frac{9\mathrm{in}}{4\pi\mathrm{r}^2}\frac{1}{Eo} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{9in}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{9}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow 9in = 9\,\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{9}{4\pi r^2}\,\frac{1}{Eo}\,\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E = \frac{9in}{4\pi Eo}\,\frac{r}{R^3}$$

$$r > R \qquad \int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9}{Eo} \Rightarrow E * 4\pi r^2 = \frac{9}{Eo}$$

$$\Rightarrow \qquad E = \frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{9}{Eo} \qquad \Rightarrow E = \frac{1}{Eo}\,\frac{9\,\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2}$$

Δυναμικό

$$r \leq R \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\, V \Rightarrow E = \frac{-\theta V}{\theta r}$$ σφαιρική συμμετρία

$$dV = -E * dr \Rightarrow dV = \frac{P}{3Eo} r dr$$

$$V = \frac{P}{6Eo} r^2 + c$$

$$r > R \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow E = \frac{-\theta v}{\theta r}$$

$$dV = -E\,dv \Rightarrow dV = \frac{P}{3\mathrm{Eo}} R^3 \frac{1}{r^2}$$

$$V = -\frac{PR^3}{3} Eo \frac{1}{r} + c$$

Επιφανειακή κατανομή φορτίου

- **Εξωτερική επιφανειακή σφαίρα**

$$r\,R^{+¿} \qquad \int \vec{E} * \vec{ds} = \frac{9\mathrm{in}}{Eo}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \vec{E} * \vec{ds} = 4\,\pi r^2 \frac{6}{Eo}$$

$$9\mathrm{in} = 4\pi \mathrm{r}_0^2 6$$

$$E \int ds = 4\pi \mathrm{r}^2 \frac{6}{Eo}$$

$$E * 4\pi \mathrm{r}^2 = 4\pi \mathrm{r}^2 \frac{6}{Eo} \qquad \Rightarrow E = \frac{6}{Eo}$$

- **Εσωτερική επιφανειακή σφαίρα**

$$r = R^{-¿}$$

Από μέσα μέχρι και έξω : $r = R^{-¿}$, $r = R^{+¿}$

$$\int dE_1 = \frac{9}{4\pi^{2\mathrm{Eo}}} \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟ

$$\vec{E} = -\vec{V}\, V \Rightarrow E = \frac{-\theta V}{\theta r} \Rightarrow dV = -E * dr$$

$$\int dV = \frac{-9}{4\pi \mathrm{r}_o} \int \frac{r}{\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} dr \quad \Rightarrow \quad V = \frac{-9}{4\pi \mathrm{r}_o} \int_0^r \frac{r}{\left(x^2 + r^2\right)^{3/2}} dr$$

$$u^2 = x^2 + r^2$$

$$\left(x^2 + r^2\right)^{3/2} = \left(u^2\right)^{3/2} = u^3$$

$$\alpha^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = u^2 - x^2 \Rightarrow r = \sqrt{u^2 - x^2}$$

$$2\mathrm{r}\, dr = 2\mathrm{u}\, du$$

$$r\, dr = u\, du \quad \Rightarrow ..... \quad V = \frac{9}{4\pi \mathrm{r}_o} \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} + c$$

Δακτύλιος με πυκνότητα λ ακτίνα Χ

$$dE = \frac{1}{4\pi \mathrm{Eo}} \frac{dq}{R^2} \hat{u}_R \quad \Rightarrow \quad dE_1 = \frac{2}{4\pi \mathrm{r}_o} \frac{dq}{R^2} \hat{u}_o \quad \Rightarrow \quad dE_1 = \frac{1}{2\pi \mathrm{Eo}} \frac{dq}{R^2} \hat{u}_1$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dq}{dl} = \frac{9}{2\pi \mathrm{x}} \Rightarrow dq = \frac{9}{2\pi \mathrm{x}} dl$$

$$\lambda = \frac{9}{2\pi x}$$

$$dE_1 = \frac{1}{2\pi Eo}\frac{9}{2\pi x}\frac{dl}{R^2}cos\theta\,\hat{u}_1 \qquad x = R\,sin\theta \Rightarrow R = \frac{x}{sin\theta} \Rightarrow R^2 = \frac{x^2}{\sin^2}\theta$$

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi^{2Eo}}9\frac{1}{x}\frac{x\,d\theta}{\frac{x^2}{\sin^2}\theta}cos\theta\,\hat{u}_1$$

$$dE_1 = \frac{9}{4\pi^2}r_o\frac{\sin^2\theta cos\theta}{x^2}d\theta \qquad \Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{9}{4\pi^2}r_0\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}\frac{1}{x^2}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \qquad dE_1 = \frac{9}{4\pi^2}r_0\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\frac{1}{x^2}\frac{x^2}{(r^2+x^2)}d\theta$$

7.13 Ηλεκτρικό Ρεύμα

- **Πυκνότητα Ρεύματος**

$$\vec{J} = \frac{I}{ds}*\hat{u_N} \Rightarrow \vec{J} = ng\,\hat{u} \Rightarrow [J] = \frac{C*m}{s}*m^{-3} \qquad [J] = \frac{C}{m^2}*s$$

$$\vec{J} = \frac{I}{ds}\hat{u}_n \Rightarrow I = \int_s \vec{J}*\vec{ds} = \int \vec{J}\,ds\,\hat{u}_n$$

7.13.1 Νόμος Ohm

Στην πράξη κατά την ανάλυση,των ηλεκτρικών κυκλωμάτων δεν χρησιμοποιείται η μικροσκοπική μορφή του νόμου Ohm αλλά η μακροσκοπική,

$$I=\frac{V}{R}$$

όπου V είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού αντίστασης R,ενώ I είναι το σταθερό ρεύμα που διαρρέι τον αγωγό.

$$E=\frac{V}{l}$$

$$R=p\frac{l}{s}$$

$$I=\frac{E*l}{\frac{p*l}{s}}\Rightarrow I=\frac{E*s}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{s}=\frac{E}{p} \quad |\vec{J}|=\frac{I}{s} \quad , \quad |\vec{J}|=\frac{E}{p}$$

$$\frac{1}{p}=6\,(\alpha\gamma\omega\gamma\iota\mu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha) \qquad |\vec{J}|=E*6 \qquad \Rightarrow \vec{J}=6*\vec{E}$$ (Νόμος Ohm διάνυσμα)

$$\vec{J}=6*\vec{E}$$

$$\vec{J}=np\,\vec{u}_d \quad \Rightarrow \quad np\,\vec{u}_d=6*\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{U}_d=\frac{6}{np}\vec{E}$$

Τοπική εξίσωση- συνέχιση

Το φορτίο σε κάθε τμήμα του αγωγού πρέπει να διατηρείται με το χρόνο.Δηλαδή όσο φορτίο μπαίνει σε μία επιφάνεια ds, τόσο πρέπει να βγαίνει .

$$\frac{\theta}{\theta t} p(\vec{x}, t) + \vec{V} \vec{J}(\vec{x}, t) = 0$$

$$P(x, t) : Q(t) = \int_{v} P(\vec{x}, t) * d^{3} x$$

$$P(\vec{x}) = \vec{V} \vec{E}(\vec{x})$$

7.13.2 ΑΓΩΓΟΙ-ΜΟΝΩΤΕΣ

Αγωγός: Στερεά υλικά σώματα των οποίων τα άτομα διαθέτουν ελεύθερα ηλεκτρόνια με συνέπεια να επιτρέπουν την ελεύθερη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων μέσω αυτών.
Μονωτές: Δεν επιτρέπουν την κίνηση φορτίων στο εσωτερικό τους.

- **ΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ**

Αν το πεδίο $\vec{E} \neq 0$ θα κινηθούν φορτία (ΟΧΙ στατική κατάρτηση)

- Προσθέτω φορτία στον αγωγό $\Rightarrow$ Τα φορτία ανακατανέμοντας ώστε $E = 0$
- Το δυναμικό αγωγού στο εσωτερικό του

$\vec{E}=0$, $\vec{E}=-\vec{\nabla} v \quad \Rightarrow \quad -\vec{\nabla} v=0 \Rightarrow V=const$

- Αγωγός τυχαίου σχήματος

  Τα σημεία με μεγαλύτερη καμπυλότητα έχουν μεγαλύτερη επιφανειακή πυκνότητα φυσικά .

  $¿\vec{E}=\frac{q}{E_o} \Rightarrow \vec{E} * \vec{ds}+0\,ds=\frac{6}{E_0}ds \quad \Rightarrow \quad \vec{E}=\frac{6}{E_o}\hat{u}_1$

7.13.3 Κούφιος Αγωγός

- Στο εσωτερικό της μάζας του αγωγού (διαγραμμένο) και το εσωτερικό της κοιλότητας Ε=0

Βάζω φορτίο στην κοιλότητα

- Ανακατανέμοντας τα φορτία της κοιλότητας στο εσωτερικό πάνε,ώστε $E_{¿}=0$

Στατική κατάσταση $9_{¿}=0 \Rightarrow 9+9_{Eo}=0 \Rightarrow 9_{en}=-9$

<u>Στο εξωτερικό</u>

$$\int \vec{E} * \vec{ds}=\frac{9_{¿}}{E_0} \Rightarrow 9_{¿}=9 \quad \Rightarrow \quad \int \vec{E}\,\vec{ds}=\frac{9}{E_o} \Rightarrow E \int ds=\frac{9}{E_o}$$

$$E-4\pi r^2=\frac{9}{E_o}$$

$$E=\frac{9}{4\pi Eo}r^2$$

Άρα μειώνεται εξωτερικά t ώστε, $9_{¿}=9+9_{+9}+\Rightarrow 9_{¿}=9$

7.13.4 Πλησίασμα φορτίων κοντά σε αγωγό

Φέρνω φορτίο +p στο Α. Επειδή το πεδίο πάνω στην πλάτη πρέπει να είναι 1 ($\vec{E}=\frac{6}{E_o}\hat{u}_1$)

και το δυναμικό 0,μειώνεται το φορτίο -p τοπικά για να εξουδετερώσει το πεδίο.

- Γεινόμενη σφαίρα

  Φέρνω το +p στο Α. Επειδή $E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}=0$ ανακατανέμονται το φορτίο να μφανίζεται κοντά στο +p (τα φορτία έρχονται από την γη).

- Εικονικό Είδωλο

  Λόγω συμμετρίας βρίσκεται πάνω στην ακτίνα.

$$V(p1)=\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{l}-R+\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{2}-r$$

$$V(P1)=0$$

$$\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{l}-R=-\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{R}-r \quad\Rightarrow\quad \frac{9}{l}-R=\frac{9}{R}-r \quad\Rightarrow\quad 9(l-r)=9(R-r)$$

$$V(p2)=\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{l+R}+\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{R+r}$$

$$\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{l+R}=-\frac{1}{4\pi E_o}\frac{9}{R+r} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{l+R}=-\frac{9}{R+r} \quad \Rightarrow$$

$$p(R+r)=-p(l+R)$$

Από τα παραπάνω ελέγχω ότι:

$$p'=-\frac{R}{l}q$$

$$r=\frac{R^2}{l}$$

ΜΟΝΩΤΕΣ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Τα μόρια πολώνονται. Οι διπολικές ροπές περιστρέφουν τα μόρια,αναδιατάσσονται. Το πεδίο στο εσωτερικό αυξάνεται.

$$E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}=E+E_{¿}$$

Χωρητικότητα επιπέδου πυκνωτή ενέργειας

$$E=\frac{6}{E_o}$$

$$E = \frac{9}{AE_o}$$

$$6 = \frac{9}{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow E = -\frac{\theta V}{\theta x} \Rightarrow dV = E\,dx$$

$$\int_0^V dV = \frac{9}{AE_o}\int_0^1 dx \quad \Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \frac{9}{AE_o}1$$

$$C = \frac{9}{V} \Rightarrow C = \frac{9}{\frac{9}{AE_o}1} \quad \Rightarrow \quad C = E_o\frac{A}{L}$$

$$U = \frac{1}{2}E_o\int_V E^2\,dV \int U = \frac{1}{2}E_o\int E^2 A\,dl \int U = \frac{1}{2}E_o\frac{V^2}{l^2}A\int dl$$

$$U = \frac{1}{2}E_o\frac{V^2}{l^2}A*l \Rightarrow U = \frac{1}{2}E_o\frac{V^2}{l}A$$

$$C = E_o\frac{A}{l} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}CV^2$$

7.13.5 Χωρητικότητα ομόκεντρων σφαιρικών φλοιών ακτινών R1,I1.
Νόμος Gauss

$$\int_s \vec{E}*\vec{ds} = \frac{9¿}{E_o}$$

$$E\int_s ds=\frac{9}{E_o}\Rightarrow E*\frac{4}{3}\pi r^2=\frac{9}{E_o}$$

$$E=\frac{9}{4\pi \mathrm{E}_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E}=-\vec{V}\,V\Rightarrow E=-\frac{\theta V}{\theta r}\Rightarrow Edr=-\theta V$$

$$dV=-Eds\Rightarrow\int dV=-E\int dr \qquad \Rightarrow \qquad V=-\int Er+C\Rightarrow V=-\int\frac{9}{4\pi \mathrm{E}_o}\frac{1}{r^2}+c$$

$$V=-\frac{9}{4\pi \mathrm{E}_o}r+c$$

Εξωτερική σφαίρα γινόμενα:

$$V(R=R_2)=0\Rightarrow-\frac{Q}{4\pi \mathrm{E}_o}R^2+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{4\pi \mathrm{E}_o}\frac{Q}{R_2}$$

Άρα,

$$V=\frac{Q}{4\pi \mathrm{E}_{¿}}-\frac{1}{4\pi \mathrm{E}_o}\frac{Q}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad V=\frac{Q}{4\pi \mathrm{E}_o}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$C=\frac{1}{4\pi \mathrm{E}_o}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

7.13.6 Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε ομογενές πεδίο

Έστω σωματίδιο q με ταχύτητα $\vec{U}$ σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

$$F_L = q\vec{U} * \vec{B}$$

Νόμος Newton: $\vec{F}_L = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{U} * \vec{B}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vec{U} * d\vec{p}}{dt} = \vec{U} * (q\vec{U} * \vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{U}\frac{d\vec{p}}{dr} = p\vec{U}(\vec{U} * \vec{B}) \quad , \quad \vec{U}\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad , \quad \vec{U}(\vec{U} * \vec{B}) = 0$$

$$m\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{d\vec{u}^2}{dt} = 0 \Rightarrow m\frac{du^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2\mathrm{m}}u^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = const \Rightarrow I = const$$

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow q\vec{U} * \vec{B} = m\frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow q\vec{U} * \vec{B} = m\frac{d\vec{u}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad q\vec{U} * \vec{B} = m\frac{d\vec{u}}{ds}U \quad \Rightarrow \quad mUU\frac{d\hat{u\tau}}{ds} = qU\hat{U}_\tau * \vec{B} \quad , \quad \vec{U} = uU * \hat{U}_\tau$$

$$\Rightarrow \qquad m\,U\frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=q\,\hat{U}_{\tau}*\vec{B}\Rightarrow p\frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=q\,\hat{U}_{\tau}*\vec{B}$$

$$\frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=\frac{q}{p}\hat{U}_{\tau}*\vec{B}$$

$$B=B\,\hat{U}_{B} \quad : \qquad \frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=\frac{Bq}{p}\hat{U}_{\tau}*\hat{U}_{B}$$

$$\vec{U}=U\,\hat{U}_{\tau}\Rightarrow\hat{U}_{\tau}=\frac{\vec{U}}{U} \quad , \qquad U=\frac{ds}{dt}=const$$

$$\hat{U}_{\tau}=\left(\frac{1}{U}\frac{dx}{dt},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\left(\hat{U}_{x},\hat{U}_{y},\hat{U}_{z}\right)$$

1. $$\frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=\frac{Bq}{p}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix},\ \vec{B}=B\cdot\vec{k}$$

$$\frac{d\hat{U}_{\tau}}{ds}=\omega_{B}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$\frac{d\hat{U}_{x}}{ds}=\omega_{B}\hat{U}_{y}(\alpha) \qquad , \qquad \omega_{B}=\frac{Bq}{mV}=\frac{Bpq}{p}$$

$$\frac{d\hat{U}_{y}}{ds}=-\omega_{B}\hat{U}_{x}(b)$$

$$\frac{d\hat{U}_z}{ds}=0(c)$$

(a) $$\frac{d^2\hat{U}_x}{ds^2}=\omega_B\frac{d\hat{U}_y}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\hat{U}_x}{ds^2}=-\omega_B^2\hat{U}_x \quad \Rightarrow \hat{U}_x=Acos\omega_B\cdot s+Bsin\,\omega_B\cdot s$$

$$\frac{d\hat{U}_y}{ds}=-\omega_B\hat{U}_y \qquad U_y=Ccos\omega_B\cdot s+D\,sin\omega_B\cdot s$$

όμοια:

$$(C):\frac{d\hat{U}_z}{ds}=0\Rightarrow\hat{U}_z=c\cdot z$$

<u>Μέθοδος B λύση ως προς το χρόνο</u>

$$F_L=q\vec{U}*\vec{B}$$

Νόμος Newton: $\vec{F}_L=\frac{\vec{dp}}{dt}\Rightarrow r\frac{\vec{du}}{dr}=p\vec{U}*\vec{B}$

$$\Rightarrow \quad m\left(\frac{du_x}{dt}\hat{i}+\frac{du_y}{dt}\hat{j}+\frac{du_z}{dt}\hat{k}\right)=q\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ 0 & 0 & B\end{vmatrix} \quad , \quad B=B_z$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{dU_x}{dt}=qB\,U_y$$

$$\frac{m\,dU_y}{dt}=-qB\,U_x$$

$$\frac{du_z}{dt}=0$$

$$\frac{dU_x}{dt}=U_y(a) \quad , \quad \frac{dU_y}{dt}=-U_x(b) \quad , \quad \frac{dU_z}{dt}=0(c) \qquad \omega=\frac{Bq}{m}$$

$$\frac{d^2U_x}{dt^2}=\frac{qB}{m}\frac{dU_y}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2U_x}{dt^2}=-\omega^2 U_x$$

$$\Rightarrow \quad U_x=A cos\,\omega t+B\sin\omega t$$

$$\frac{dx}{dr}=A\,cos\omega t+B\,sin\omega t$$

$$\int dx=\int A\,cos\omega t+B\,sin\omega t\,dt \quad \Rightarrow \quad x=x_o-\omega A sin\omega t+\omega B\,cos\omega t$$

όμοια: $y=y_o-\omega A\,sin\omega t+\omega B\,cos\omega t$

<u>Βήμα Έλεγχος</u>

$$\omega=\frac{qB}{m}\Rightarrow\frac{2\pi}{\tau}=\frac{qB}{m}\Rightarrow T=\frac{2\pi m}{Bq}$$

$$\beta=U_z\cdot T\Rightarrow\beta=U_z\frac{2\pi m}{b\cdot p}$$

<u>Κίνηση κάθετα στο πεδίο</u> $\vec{B} \perp \vec{U}$

$$\vec{F}_L = q\,\vec{U} * \vec{B} \Rightarrow F_L = q\,UB$$

$$F_L = F_N \Rightarrow m\frac{u^2}{R} = F_L \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mu^2}{R} = p\,UB \Rightarrow R = \frac{mU}{Bp}$$

Γωνιακή απόκλιση σωματιδίου με ταχύτητα $\vec{U}$ **όταν περνάει μέσα από μαγνητικό πεδίο** $\vec{B}$ **.**

Από την (Α).: $\frac{d\hat{U}_\tau}{ds} = \frac{q}{p}\hat{U}_\tau * \vec{B}$, $\hat{U}_\tau * \vec{B} = b\,\hat{U}n(\kappa\varepsilon\nu\tau\rho o\mu\acute{o}\lambda o\varsigma)$

$$|\hat{U}_n| = |d\hat{U}_\tau| = |\hat{U}_\tau| \cdot d\,\partial$$

$$\frac{d\hat{U}_\tau}{ds} = \frac{d\,\partial}{ds}\hat{U}_N$$

Α) $d\,\partial\,\hat{U}_n = \frac{q}{p}B\,\hat{U}_N \Rightarrow \frac{d\,\partial}{ds} = \frac{q}{p}B \Rightarrow p\,d\,\partial = qB\,ds \Rightarrow p\,\partial = p\int Bds$

<u>Εκτροπή σε ελαφρύ πεδίο</u>

$$p\,\partial = p\,B \cdot L \Rightarrow \partial\,q\frac{(BL)}{p}$$

7.14 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού απείρων διαστάσεων

Νόμος Ampere

Ο νόμος Ambere συσχετίζει το μαγνητικό πεδίο σε ένα κλειστό βρόγχο με το ηλεκτρικό ρεύμα που περνά μέσα από τον βρόγχο.

$$\int_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu o i$$

Άπειρο μήκος : συμμετρία $\vec{B} \Rightarrow B\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o$

$$\int_c B\cdot dl = \mu o i \Rightarrow \int dl = \mu o i \Rightarrow B\cdot 2\pi\mathrm{r} = \mu o i \Rightarrow B = \frac{\mu o i}{2\pi\mathrm{r}}$$

$$\int \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu o i$$

$$j = \frac{i}{s}$$

$$i = j\cdot s \Rightarrow i = j\,4\,\pi r^2$$

Το B σταθερό λόγω συμμετρίας.

$$\int B\cdot dl = \mu o i \Rightarrow B\int dl = \mu o\, j\, 4\pi\mathrm{r}^2$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu o j \cdot 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad B \cdot 2\pi r = \mu o \frac{I}{4\pi R^2} 4\pi r^2$$

$$B = \frac{\mu o}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

7.14.1 Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου σύρματος

Με τα πειράματα του Oersted αποδείχθηκε ότι γύρω από ρευματοφόρους αγωγούς δημιουργείται μαγνητικό πεδίο.Ας εξετάσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου αγωγού.Για το σκοπό αυτό περνάμε ένα κατακόρυφο αγωγό από μία τρύπα ενός οριζόντιου χαρτονιού πάνω στο οποίο σκορπίζουμε ρινίσματα σιδήρου.Για να γίνει το πείραμα καλύτερα διαβιβάζουμε από τον αγωγό ρεύμα μεγάλης έντασης. Χτυπώντας ελαφρά το χαρτόνι,τα ρινίσματα σιδήρου διατάσσονται σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο τον αγωγό.Οι δυναμικές γραμμές λοιπόν του μαγνητικού πεδίου,είναι ομόκεντροι κύκλοι,έχουν ως κέντρο τον αγωγό και το επίπεδο τους είναι κάθετο σε αυτόν.

$$\vec{B}\, l(\vec{dl}, \vec{r})$$

$$\vec{dB} = \frac{\mu oi}{4\pi} \frac{dl * r}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu oi}{4\pi} dl \frac{\sin \partial}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu oi}{4\pi} \frac{r\, d\,\partial \sin \partial \cdot sinr\, \partial}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu oi}{4\pi} r \frac{d\,\partial}{r^2}$$

$$dB = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{d\partial}{r}$$

$$dB = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{\sin\partial \, d\partial}{R}$$

$$B = \int dB \Rightarrow B = \frac{\mu o i}{4\pi R} \int_0^{\pi} \sin\partial \, d\partial$$

$$B = \frac{\mu o}{4\pi R} (-\cos\partial) \pi$$

$$B = \frac{\mu o I}{2\pi R}$$

7.14.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού αγωγού

Πάνω στο χαρτόνι σκορπίζουμε ρινίσματα σιδήρου και διαβιβάζουμε ρεύμα στον αγωγό.Χτυπάμε ελαφρά το χαρτόνι και βλέπουμε ότι τα ρινίσματα διατάσσονται σε ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το σημείο τομής του χαρτονιού από τον αγωγό.Με την βοήθεια μαγνητικής βελόνας βρίσκουμε την φορά των δυναμικών γραμμών.

$$d\vec{B} = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{\vec{dl} * \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin\partial \Rightarrow dB = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$B = \int_0^l dB = \frac{\mu o}{4\pi} \frac{s}{r^2} \int_0^l dl$$

$$B=\frac{\mu o i}{4\pi r^2}2\pi \Rightarrow B=\frac{\mu o i}{2\pi r}$$

- **Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο του σύρματος**

$$\vec{dB}=\frac{\mu o}{4\pi}\frac{\vec{dl}*\hat{u}_r}{r^2}\Rightarrow dB=\frac{\mu o}{4\pi}i\frac{dls\partial}{r^2}$$

$$dB=\frac{\mu o i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}$$

$$B=\int_0^l dB=\int_0^l \frac{\mu o i}{4\pi}\cdot\frac{dl}{r^2}=\frac{\mu o i}{4\pi r^2}\int_0^l dl=\frac{\mu o i}{4\pi r^2}\pi r$$

$$B=\frac{\mu o}{4r}$$

- **Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο του σύρματος**

$$\vec{B}_1=\frac{\mu o}{4r}\hat{U}_1$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu o}{4r}\hat{U}_1$$

- **Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο του σύρματος**

$$B_1=\frac{\mu o i}{4R_1} \qquad B_{O\Lambda}=\frac{\mu o}{4}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$B_2 = \frac{\mu o i}{4 r_2}$$

7.14.3 Μαγνητική Ροπή

Μαγνητική ροπή ονομάζεται το γινόμενο της μαγνητικής μάζας ενός από τους μαγνητικούς πόλους,ενός μαγνήτη επί την απόσταση των δύο πόλων.

$$d\vec{\mu} = I \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{\mu} = \int I \cdot dA \Rightarrow \mu = i \int dA$$

$$\mu_1 = i \frac{\pi R_1^2}{2}$$

$$\mu_2 = i \frac{\pi R_2^2}{2}$$

$$\mu = \frac{i\pi}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Πεδίο κυκλικού αγωγού ακτίνας R: α) στο κέντρο C, β) στον άξονα Z, γ) σε ένα τυχαίο σημείο

(a) $d\vec{B} = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{d\vec{l} * \hat{u}_r}{R^2} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu o i}{4\pi} \frac{dl \cdot sin90}{R^2}$

$$B = \int_0^{2\pi R} dB = \frac{\mu o i}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu o i}{4\pi R^2} 2\pi R \Rightarrow B = \frac{\mu o i}{2R}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu o i}{2\mathrm{R}}\hat{U}_1$$

b) $$d\vec{B}=\frac{\mu o i}{4\pi}\frac{\vec{dl}*\hat{u}_r}{r^2}$$

Λόγω κυκλικής συμμετρίας τα dB_1 ακυρώνονται. Άρα θα υπάρξει μόνο η κάθετη συνιστώσα.

$$dB=dB\cos a\Rightarrow dB=\frac{\mu o i}{a\pi}\cos\cdot dl\,\frac{sin90}{r^2}$$

$$dB=\frac{\mu o i}{4\pi}R\frac{d\varphi}{r^2}cosa \quad \Rightarrow \quad dB=\frac{\mu o i}{4\pi}R^2\frac{d\varphi}{r^3}$$

$$dB=\frac{\mu o i}{4\pi}R^2\frac{d\varphi}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$B=\int dB=\frac{\mu o i}{4\pi}\frac{R^2}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\Rightarrow B=\frac{\mu o i}{a\pi}\left(z^2+R^2\right)^{3/2}2\pi\Rightarrow B=\frac{\mu o\pi^2}{2}\left(z^2+R^2\right)^{3/2}\hat{u}_1$$

7.14.4 Μαγνητικό πεδίο ιδανικού πηνίου

Νόμος Ambere

$$\int\vec{B}\cdot dl=\mu o i\Rightarrow\int_{AB}\vec{B}\cdot\vec{dl}+\int_{B\Gamma}\vec{B}\cdot dl+\int_{\Gamma\Delta}\vec{B}\cdot dl+\int_{\Delta A}\vec{B}\cdot dl=\mu o i$$

$$\int B^{-1}\cdot dl=\mu oi \Rightarrow \int_{AB} B\cdot dl \quad \Rightarrow \quad B\int dl=\mu oi \Rightarrow B\cdot h=\mu oi$$

$$B=\frac{\mu oi}{h}$$

Μαγνητικό πεδίο τοροειδούς πηνίου

Λόγω συμμετρίας οι δυναμικές γραμμές είναι ομόκεντροι κύκλοι.

Νόμος Ambere

$$\int \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu oi \Rightarrow B(r)\int dl=\mu oi$$

$$B(r)\cdot 2\pi r=\mu oi \quad \Rightarrow \quad B(r)\cdot 2\pi r=\mu oi\cdot N \quad \Rightarrow B(r)=\frac{\mu o}{2\pi}\frac{ioN}{r}$$

7.14.5 Φασματογράφος μάζας

Το φορτίο πρέπει να είναι βαρύ ⇒ ταχύτητα μικρή ⇒ όχι σχετιστικες διορθώσεις

$$\Delta K_{A\Gamma}=\Sigma N^{A\rightarrow\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}mU_R^2-0=V\cdot q \qquad U_\Gamma^2=\frac{2qV}{m}$$

Η δύναμη Laplace παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$\vec{F} = F_{cent} \Rightarrow q\,\vec{U} * \vec{B} = m\frac{U^2}{R} \cdot \hat{U}_1$$

$$quB = \frac{mU^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mU}{Bq}$$

$$X = 2\mathrm{R} \Rightarrow x = 2\frac{mU}{Bq} \Rightarrow x = 2\frac{m\frac{\sqrt{2\mathrm{qV}}}{m}}{Bq}$$

$$x = \frac{\sqrt{4\mathrm{m}^2\frac{2\mathrm{qV}}{m}}}{Bq} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8\mathrm{mqV}}{B^2 \cdot q^2}} \Rightarrow x^2 = \frac{8\mathrm{mqV}}{B^2 \cdot q^2}$$

$$x^2 = \frac{8\mathrm{mV}}{B^2 \cdot q^2} \Rightarrow m = \frac{B^2 \cdot q}{8\mathrm{V}} \cdot x^2$$

Διαφορά μόλις ιόντων με απόσταση Δx.

$$\Delta m = \frac{\partial M}{\partial x}\Delta x \Rightarrow \Delta m = \frac{B^2 \cdot q^2}{8\mathrm{V}} 2\mathrm{x}\,\Delta x$$

$$x = \sqrt{\frac{8\mathrm{mpV}}{B^2 \cdot p^2}}$$

$$\Delta m = B\left(\frac{mp}{2\mathrm{V}}\right)^{1/2}\Delta x$$

7.15 ΑΣΚΗΣΗ

7.15.1 Δύο αγωγοί διαρρέονται από ίδιο ρεύμα αλλά αντίθετης φοράς. R1 ο πρώτος R2 ο δεύτερος . Να βρεθεί ο $B=Bcos$ **,** $J=\cos^{-1}$

i. $r<R_1$ Νόμος Ambrere: $\int \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu o i$

$$B\cdot(2\pi r)=\mu o(\frac{I}{\pi R_1^2})\pi r^2$$

$$B=\frac{\mu o I r^2}{R_1^2}\cdot 2\pi r \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B}=\frac{\mu o}{2\pi}\frac{I}{R^2}r\,\hat{U}_T$$

ii. $R_1<r<R_2$: $\int \vec{B}\cdot dl=\mu o i$

$$B(2\pi r)=\mu o[I-\frac{I}{\pi(R_2^2-R_1^2)}]\pi(r^2-R^2)$$

$$B(2\pi r)=\mu o I(I-\frac{r^2-R^2}{R_2^2-R_1^2})$$

$$B=\frac{\mu o I}{2\pi}(I-\frac{r^2-R_1^2}{R_2^2-R_1^2})\frac{1}{r}\hat{U}_T$$

iii. $r>R_2$: $\vec{B}=\mu o\frac{(I-I)}{2\pi r}\hat{U}_T \quad \Rightarrow \vec{B}=0$

Δύναμη μεταξύ παράλληλων ρευμάτων

$$B_2 = \frac{\mu o}{2\pi r}$$

$$F = \mu o\, I_1 I_2 \frac{l}{2\pi r}$$

$$F_1 = I \cdot l B_2$$

Δύναμη από ρεύμα σε πλαίσιο

$$F_1 = \frac{\mu o I^2 c}{2\pi \alpha}$$

$$F_2 = \frac{\mu o I^2 c}{2\pi b}$$

$$\sum F_1 = \frac{\mu o\, I^2 c}{2\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}\right)$$

$$F_3 = \int_0^{-c} dF_3 \Rightarrow F_3 = \int_b I \cdot B\, dl = \int_0 I\, \frac{\mu o I}{2\pi r} \cdot dr = \frac{\mu o I^2}{2\pi} \int_0 \frac{dr}{r}$$

$$F_3 = \frac{\mu o I^2}{2\pi} ln..... \frac{b}{c} \quad , \qquad F_4 = F_3$$

7.15.2 Να υπολογιστεί η μαγνητική δύναμη σε ημικυκλικό αγωγό.

B 1 επίπεδο αγωγού. $I = G \cdot A$ **,** $R = 0{,}8\, m$ **,** $B = 0{,}1\, \tau$

$$\vec{dF} = I \cdot dl * \vec{B}$$

$$dF = I\,dl \cdot B\,sin90$$

$$dF = I\,B\,dl$$

$$\vec{dF} = dF_x \cdot \hat{i} + dF_y \cdot \hat{j}$$

$$dF_x = dF\,cos\Phi \quad \Rightarrow \quad dF_x = I\,B\,dl\cos\Phi \quad \Rightarrow \quad F_x = \int I\,B\,dl\cos\Phi$$

$$dF_y = dP\sin\Phi \quad \Rightarrow \quad dF_y = I\,B\,dl\,sin\Phi \quad \Rightarrow \quad F_y = \int I\,B\,dl\sin\Phi$$

$$F_x = I\,B\,R\int_0^{\pi} cos\Phi\,d\Phi \quad \Rightarrow \quad F_x = I\,B\,R + sin\Phi$$

$$F_y = I\,B\,R\int_0^{\pi} \sin\Phi\,d\Phi \quad \Rightarrow \quad F_y = I\,B\,R - cos\Phi$$

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = -I\,B\,R\left(cos\pi - cos0\right)$$

$$F_y = I\,B\,R\,2 \quad \Rightarrow \quad F_y = 2\mathrm{I}\,B\,R$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 | ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

8.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

8.1.1 Μετατροπές Συντεταγμένων

- Έστω σύστημα 0_{xyz} καρτεσιανό και 0_{uvw} τυχαίο εν γένει καμπυλόγραμμο.

Οι $(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial w})$ είναι εφαπτόμενες στο καμπυλόγραμμο.

$$\hat{E}_1 = \hat{I} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\left|\frac{\partial v}{\partial u}\right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial u} = \hat{I}\,\frac{|\partial v|}{\partial u}$$

$$\hat{E}_2 = \hat{I} = \frac{\frac{\partial v}{\partial v}}{\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \hat{I}\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|$$

$$\hat{E}_3 = \hat{K} = \frac{\frac{\partial v}{\partial w}}{\left|\frac{\partial r}{\partial w}\right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial w} = \hat{K}\left|\frac{\partial r}{\partial w}\right|$$

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

Γράφεις το $\vec{r}(u,v,w)$ συναρτήσει των νέων συντεταγμένων μετατρέποντας το x,y,z δηλαδή : $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$

Παίρνουμε την $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ και παραγωγίζουμε. Έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\hat{k}\Rightarrow\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|=[(\frac{\partial x}{\partial u^2})+(\frac{\partial y}{\partial u^2})+(\frac{\partial z}{\partial u^2})]^{1/2}=hu$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\hat{k}\Rightarrow\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=[(\frac{\partial x}{\partial v^2})+(\frac{\partial y}{\partial v^2})+(\frac{\partial z}{\partial v^2})]^{1/2}=hv$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}=\frac{\partial x}{\partial w}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial w}\hat{j}+\frac{\partial z}{\partial w}\hat{k}\Rightarrow\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|=[(\frac{\partial x}{\partial w^2})+(\frac{\partial y}{\partial w^2})+(\frac{\partial z}{\partial w^2})]=hw$$

Άρα λόγω των I έχουμε:

$$\hat{I}=\frac{1}{hu}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad \hat{K}=\frac{1}{w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

$$\hat{J}=\frac{1}{hv}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Για να ισχύουν τα παραπάνω πρέπει να αρκεί:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=J_{acombi}\neq 0$$

Αν πάρω τον στοιχειώδη όγκο των μερικών παραγώγων έχουμε:

8.1.2 ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

- $(u, v, w) = (q_{1,} q_{2,} q_3) = (p, \varphi, z)$
- $\hat{u}_r * \hat{u}_\varphi = \hat{u}_z$

  $\hat{u}_\varphi * \hat{u}_z = \hat{u}_r$

  $\hat{u}_z * \hat{u}_r = \hat{u}_\varphi$

8.1.3Μετατροπή από κυλινδρικές σε καρτεσιανές

$x = pcos\varphi$

$y = psin\varphi$

$z = z$

- $(\hat{i}, \hat{l}, \hat{k}) \rightarrow (\hat{u_p}, \hat{u_\varphi}, \hat{u_z}) = (\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$
- $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$
- $\hat{U}_p = \dfrac{\partial r / \partial p}{\left| \partial r / \partial p \right|}$, $\hat{U}_\varphi = \dfrac{\partial r / \partial \varphi}{\left| \partial r / \partial \varphi \right|}$, $\hat{U}_z = \hat{k}$

Παραγωγίζω το $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} = pcos\varphi\,\hat{i} + psin\varphi\,\hat{j} + z\,\hat{k}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial p}=cos\varphi\,\hat{i}+sin\varphi\,\hat{j}+z\,\hat{k}\rightarrow h_p=1$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}=-\,psin\varphi\,\hat{i}+pcos\varphi\,\hat{j}+z=h_\varphi=p$$

Άρα το τελικό: $\hat{U}_p=\cos\varphi\,\hat{i}+sin\varphi\,\hat{j}$

$$\hat{U}_\varphi=-sin\varphi\,\hat{i}+cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{U}_z=\hat{k}$$

8.2 Στροφές στο χώρο

- Στρέφουμε γύρω από τον άξονα z κατά γωνία θ

$$\vec{r}=x\cdot\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}=x'\,\hat{i}'+y'\,\hat{j}'+z'\,\hat{k}'$$

$$\vec{r}=x\,\hat{i}'+y'\,\hat{j}'+z'\,\hat{k}'$$

$$(I)\cdot\hat{i}\Rightarrow x=(\hat{i}+\hat{i}')\,x'+(\hat{i}\,\hat{j}')\,y'\Rightarrow x=cos\theta-y'\cos(\pi/2+\theta)$$
$$x=x'\,cos\theta-y'\,sin\theta$$

$$(I)\cdot\hat{j}\Rightarrow y=x'(\hat{i}'\cdot\hat{j})+y'(\hat{j}\cdot\hat{j}')\Rightarrow y=\cos(\pi/2\cdot\theta)+y'\cos^0$$

$$y=x'\,sin\theta+y'\,cos\theta$$

$$dV = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} * \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right)$$

Αποδεικνύεται ότι dV=Jacombi. Αν $dV = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ συνεπίπεδο άρα βρίσκομαι στο επίπεδο και όχι στο χώρο.(άτοπο)

Πολικές ή Σφαιρικές συντεταγμένες

- $(u, v, w) = (q_{1,} q_{2,} q_3) = (p, \theta, \varphi)$
- $\hat{U}_p * \hat{U}_\theta = \hat{U}_\varphi$
  $\hat{U}_\varphi * \hat{U}_p = \hat{U}_\theta$
  $\hat{U}_\theta * \hat{U}_\varphi = \hat{U}_p$

Μετατρπή από πολικές σε καρτεσιανές

- $x = p\, sin\theta\, cos\varphi$
  $y = p\, sin\theta\, sin\varphi$
  $z = r\, cos\theta$
- $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) \rightarrow (\hat{U}_p, \hat{U}_\theta, \hat{U}_\varphi) = (\vec{J}, \vec{I}, \vec{K})$
- $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + i\,\hat{k} = p\, sin\theta\, cos\varphi\,\hat{i} + p\, sin\theta\, sin\varphi\,\hat{j} + p\, cos\theta\,\hat{k}$
- $\hat{U}_p = \frac{1}{h_r}\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial p}\right|$, $\hat{U}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|$, $\hat{U}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\left|\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right|$

Παραγωγίζω $\vec{r} = p\, sin\theta\, cos\varphi\, \hat{i} + p\, sin\theta\, sin\varphi\, \hat{j} + pcos\theta\, \hat{k}$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = sin\theta\, cos\varphi\, \hat{i} + sin\theta\, sin\varphi\, \hat{j} + \cos\hat{k} \rightarrow h_p = [(sin\theta\, cos\varphi)^2 + (sin\theta\, sin\varphi)^2 + (cos\theta)^2]^{1/2}$$

$$h_p = [\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta]^{1/2} = [\sin^2\theta(\cos^2 u + \sin^2 u) + \cos^2\theta]^{1/2}$$

$$h_p = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \ldots \rightarrow h_\theta = p$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \ldots \rightarrow h_\varphi = p\, sin\theta$$

Άρα τελικά:

$$\hat{U}_r = \frac{1}{h_p}\frac{\partial \vec{r}}{\partial p} \rightarrow \hat{U}_p = sin\theta\, cos\varphi\, \hat{i} + sin\theta\, sin\varphi\, \hat{j} + cos\theta\, \hat{k}$$

$$\hat{U}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial r}{\partial \theta} toqard\ \hat{U}_\theta = \frac{1}{p}(p\cos^{2\theta} cos\varphi\, \hat{i} + r\cos^2\theta\, sin\varphi\, \hat{j} - p\, sin\theta\, \hat{k})$$

$$\hat{U}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial r}{\partial \varphi} \rightarrow \hat{U}_\varphi = \frac{1}{psin\theta}(psin\,\theta\, sin\varphi\, \hat{i} + psin\theta\, cos\varphi\, \hat{j})$$

- Στοιχειώδης μήκος: $\vec{dl} = \hat{U}_p \cdot dp - \hat{U}_\theta\, p\, d\, \partial\, r\, sin\theta\, d\varphi$
- Στοιχειώδης επιφάνεις: $\vec{ds} = \hat{U}_p d\theta\, psin\theta\, d\varphi$

- Στοιχειώδης όγκος: $dV = dp\left(pd\theta\right)\left(psinu\, d\varphi\right)$

➔ $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$

➔ $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$

➔ Από (Ι) $\begin{vmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{vmatrix}$

8.3 Εσωτερικό-Εξωτερικό γινόμενο

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \qquad A_x' B_x' + A_y' B_y' + A_z' B_z'$

$$\begin{vmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} B_x' \\ B_y' \\ B_z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}' \cdot \vec{B}'$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι ποσότητα ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων.Το ίδιο και το εξωτερικό γινόμενο.

8.4 Απλή αρμονική ταλάντωση

Ταλάντωση εκτελεί ένα σωματίδιο όταν κινείται περιοδικά γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.Τα άτομα ενός στερεού ταλαντώνονται. Τα άτομα που αποτελούν το μόριο εκτελούν ταλαντώσεις σε σχέση με τα άλλα άτομα.Σε μία κεραία εκπομπής ή λήψης,τα ηλεκτρόνια της εκτελούν ταλαντώσεις πολύ γρήγορες. Πιο σημαντική από όλες τις ταλαντώσεις είναι η απλή αρμονική κίνηση,γιατί αποτελεί μία ακριβή περιγραφή πολλών κινήσεων που συναντάμε στη φύση.

8.4.1 Φθίνουσα Ταλάντωση

Φθίνουσα ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση κατά την οποία μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης.Η μείωση του πλάτος ονομάζεται απόσβεση.

$$F_{ουτ} = -bu$$

$$mx = -Dx - bu \Rightarrow mx = -Dx - bx \Rightarrow mx + Dx + bx = 0$$

$$\Rightarrow \quad mx + bx + Dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{m} x + \frac{D}{m} x = 0$$

Επιλέγω λύση $x = Ae^{kt}$

$$Ak^2 e^{kt} + 1 \frac{b}{m} \cdot k\, e^{kt} + \frac{D}{m} A e^{kt} = 0$$

$$Ae^{kt} \left(k^2 + \frac{b}{m} k + \frac{D}{m} \right) = 0$$

$$k^2 + \frac{b}{m} k + \frac{D}{m} = 0$$

Διακρίνουμε:

$$D = \frac{b^2}{m^2} - 4 \frac{D}{m} \Rightarrow D = \frac{b^2 - 4\mathrm{mD}}{m^2}$$

$$k=\frac{\frac{-b}{m}\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{\frac{-b}{m}\pm\sqrt{b^2-\frac{4\mathrm{mD}}{m^2}}}{2}$$

$$k=\frac{-b}{2\mathrm{m}}\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2-4\mathrm{mD}}}{m^2}$$

$$k=\frac{-b}{2\mathrm{m}}\pm\sqrt{b^2-\frac{4\mathrm{mD}}{4\mathrm{m}^2}}$$

$$k=-\frac{b}{2\mathrm{m}}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4\mathrm{m}^2}-\frac{4\mathrm{mD}}{4\mathrm{m}^2}}$$

$$k=-\frac{b}{2\mathrm{m}}\pm\sqrt{(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2-\frac{D}{m}}$$

Περίπτωση 1

Απλή Αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

$$(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2<\frac{D}{m} \qquad\qquad k=\frac{-b}{2\mathrm{m}}\pm\sqrt{(-1)(\frac{d}{m}-(\frac{b^2}{2\mathrm{m}}))}$$

$$k=\frac{-b}{2\mathrm{m}}\pm h\sqrt{\frac{D}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2}$$

Λύση της δ.ε.τ είναι:

$$x=Ae^{kt}\Rightarrow x=Ae^{\frac{-b}{2\mathrm{m}}t}e^{\pm j\sqrt{\frac{D}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2}t}$$

$$x=A\,e^{\frac{-b}{2\mathrm{m}}t}\left(e^{i\omega' t}+e^{-j\omega' t}\right)\quad,\qquad \omega'=\sqrt{\frac{D}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2}$$

$$x=Ae^{-\Lambda t}\left(e^{j\omega' t}+e^{j\omega' t}\right)$$

$$\Lambda=-\frac{b}{2\mathrm{m}}\qquad \omega'=\sqrt{\frac{D}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2}$$

ή

$$x=e^{-1\mathrm{t}}\left(A_1e^{j\omega' t}+A_2e^{j\omega' t}\right)$$

$$\Lambda=-\frac{b}{2\mathrm{m}}\qquad \omega=\sqrt{\frac{D}{m}-(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2}$$

$$A_1=\frac{A}{21}e^{i\varphi}\quad,\qquad A_2=-\frac{A}{21}e^{-i\varphi}$$

Περίπτωση 2:

$$(\frac{b}{2\mathrm{m}})^2=\frac{D}{m}\quad:\qquad k=-\frac{b}{2\mathrm{m}}(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha)$$

Εφαρμόζω λύση της δ.ε.τ

$$A=(A_1+A_{2\mathrm{t}})x=(A_1+A_{2\mathrm{t}})e^{kt}\Rightarrow x=(A_1+A_2)e^{-b/2\mathrm{m}\,t}$$

$$\Lambda=-\frac{b}{2\mathrm{m}} \qquad x=(A_1+A_{2\mathrm{t}})e^{-\Lambda t}$$

Το σύστημα επιτρέπει στο σημείο μηδενικής απώλειας στον ελάχιστο χρόνο μετά από ξαφνική ώθηση.

Περίπτωση 3:

$$\frac{b}{2\mathrm{m}}^2>\left(\frac{D}{m}\right) \quad : \quad k=-\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)^2-\frac{D}{m}}$$

¿

Λύση της δ.ε.τ

$$x=Ae^{kt}\Rightarrow x=Ae^{-\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)}t\left(e\sqrt{\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)^2-\frac{D}{m}}\right)t\,e-\sqrt{\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)^2-\frac{D}{m}t}$$

$$x=Ae^{-\Lambda t}\left(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t}\right),\ \omega'=\sqrt{\left(\frac{b}{2\mathrm{m}}\right)^2-\frac{D}{m}}$$

Επιλέγω δύο σταθερές Α1 και Α2 αντί του Α

$$x=e^{-\Lambda t}\left(A_1e^{\omega' t}+A_2e^{-\omega' t}\right)$$

και αν :

$$B=A_1+A_2 \quad , \qquad C=A_1-A_2$$

$$x=e^{-\Lambda t}\left(\frac{B}{2}\left(e^{\omega' t}+e^{-\omega' t}\right)\right)+\frac{C}{2}\left(e^{\omega' t}-e^{-\omega' t}\right)$$

$$x = e^{-\Lambda t}\left(B\cosh\omega' t + C\sinh\omega' t\right)$$

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού ηλεκτρομαγνητισμού.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να περιγραφούν οι βασικές έννοιες του ηλεκτρομαγνητισμού και των συναφών θεμάτων της μηχανικής. Είναι γνωστό ότι η πραγματική και σε βάθος κατανόηση των διαφόρων εννοιών είναι δύσκολη και ότι πάντα χρειάζεται χρόνος και αρκετή σκέψη για να καταγραφεί και αφομοιωθεί η σημασία και η σπουδαιότητα τους π.χ μιας εξίσωσης.Υπό αυτό το πρίσμα, ορισμένες έννοιες, νόμοι ή αρχές, π.χ ο ηλεκτρομαγνητισμός, κινηματική υλικού σημείου , οι ταλαντώσεις κ.α. αναπτύσσονται σε μεγαλύτερη έκταση και όπου είναι δυνατόν υπό διαφορετικές οπτικές γωνίες, για την πληρέστερη κατανόησή τους. Συμπερασματικά, οι ενότητες της φυσικής που περιγράφονται στην παρούσα εργασία είναι : α) Κινηματική του υλικού σημείου, β) Δυναμική του υλικού σημείου, γ) Έργο-Ενέργεια και δ) Ηλεκτρομαγνητισμός.

Ειδικότερα αναπτύσσονται τα κάτωθι:

Α. *ΜΗΧΑΝΙΚΗ*

1.ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ταχύτητα, Επιτάχυνση
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση
Ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση
Ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση
Μηχανική κίνηση σωμάτων και συστημάτων σωμάτων
Παραδείγματα

Β.ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση
Δυνάμεις πεδίου και δυνάμεις επαφής
Νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα
Ηέκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις σε φορτισμένο σωματίδιο
Κίνηση ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο
Δυνάμεις επαφής (τριβή)
Δυνάμεις τριβής σε ρευστά

Γ.ΕΡΓΟ-ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Έργο-ενέργεια
Θεώρημα κινητικής ενέργειας
Διατηρητικές δυνάμεις
Επιτάχυνση της βαρύτητας
Πεδίο βαρύτητας, Ένταση πεδίου βαρύτητας

2.ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Α.ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
Αρμονική ταλάντωση ελατηρίου
Σταθερά ταλάντωσης-σχέση με την ιδιοσυχνότητα
Ταλάντωση συστήματος ελατηρίων
Φθίνουσα ταλάντωση απλού εκκρεμούς-επίδραση αντιστάσεων

Ανάπτυξη εκπαιδευτικού υλικού ηλεκτρομαγνητισμού.

Είδη ροής-εσωτερική τριβή
Δ. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ
Α.ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΟ ΗΜ ΠΕΔΙΟ
Ιδιότητες των ΗΜ δυνάμεων
Κίνηση σε στάσιμα ΗΜ πεδία, Ολίσθηση σε καμπύλα & μη ομογενή μαγνητικά πεδία
Β.ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ AMPERE & GAUSS
Νόμος Ampere, Νόμος Gauss, Δυνάμεις μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών
Μαγνητικό πεδίο και μαγνητική επαγωγή, Ηλεκτρικό πεδίο και διηλεκτρική μετατόπιση
Διάδοση ΗΜ πεδίων σε αγωγούς

Από τα θέματα που αναπτύσσονται στην παρούσα εργασία αναμένεται να αποκτήσούν οι αναγνώστες τις απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις σε βασικές αρχές της φυσικής επιστήμης. Αναμένεται οι αναγνώστες να αποκτήσουν τις παρακάτω δεξιότητες:
1.Να ορίζουν την ταχύτητα, επιτάχυνση, κινητική ενέργεια, έργο.
2.Να υπολογίζουν τη θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση κινητού αν είναι γνωστή η σχέση (α) δύναμης-θέσης, (β) δύναμης-ταχύτητας (γ) ταχύτητας-θεσης και (δ) επιτάχυνσης-θέσης
3.Να ορίζουν τις συνθήκες διατηρητικότητας πεδίων.
4.Να καθορίζουν αν κάποιο δοθέν πεδίο είναι διατηρητικό ή όχι.
5.Να υπολογίζουν τα μεγέθη της κίνησης σε απλές ταλαντώσεις, εξαναγκασμένες και φθίνουσες ταλαντώσεις
6.Να γράφουν τις τέσσερις εξισώσεις του Maxwell.
7. Να ορίζουν το ρεύμα μετατόπισης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

➔ https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A6%CF%85%CF%83%CE%B9%CE%BA%CE%AE

➔ http://openclass.teiwm.gr/modules/document/file.php/EE109/%CE%95%CE%BD%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1%204.%20%CE%9A%CE%AF%CE%BD%CE%B7%CF%83%CE%B7%20%CF%83%CE%B5%202%20%CE%94%CE%B9%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%AC%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82.pdf

- Κωνσταντίνος Ν. Πάνου , Φυσική-Μηχανική, 2003
- Κωνσταντίνος Ν. Πάνου, Φυσική Ηλεκτρισμός -Μαγνητισμός, 2003
- Ζαχαρούλης Α. Αχιλλέας, Φυσική, 2005
- Knight D. Randall, Φυσική δια επιστήμονες και μηχανικούς, Μετάφραση Κωνσταντίνος Κρίτσης, Ιωάννα Παπασκελίδη, 2010
- Knight D. Randall, Φυσική -Μηχανική, Μετάφραση Κωνσταντίνος Κρίτσης, Ιωάννα Παπασκελίδη, 2007
- Εργαστηριακή Φυσική, Σύγχρονη Εκδοτική, 2014
- H.D.Young, “Πανεπιστημιακή Φυσική, Μηχανική και Θερμοδυναμική”, Εκδ. Παπαζήση 2012
- Physics for Scientists and Engineers, Τόμοι I και III. Serway, Απόδοση στα Ελληνικά Λεωνίδα Ρεσβάνη, 2012
- Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική Τόμος I, Μηχανική και Θερμοδυναμική.
- M. Alonso και E. J. Finn, Μετάφραση Λ. Κ. Ρεσβάνη και Α. Φίλιππα.
- Μαθήματα Πεπιστημίου Berkley”, McGraw-Hill, 1996.