



**ΑΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.**

**ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Τ.Ε.**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Προγραμματιστικές Τεχνικές στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου  
με χρήση του MATLAB**

**Τοπσικιώτης Μ. Μιλτιάδης  
Ζαφείρης Ε. Παναγιώτης**

**Εισηγήτρια: Δρ Βελώνη Ν. Αναστασία, Καθηγήτρια Εφαρμογών**

**ΑΘΗΝΑ  
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2016**







## **ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

### **Προγραμματιστικές Τεχνικές στα Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου με χρήση του MATLAB**

**Τοπτσικιώτης Μ. Μιλτιάδης  
Α.Μ. 42880  
Ζαφείρης Ε. Παναγιώτης  
Α.Μ. 43446**

**Εισηγήτρια:**

**Δρ Βελώνη Ν. Αναστασία, Καθηγήτρια Εφαρμογών**

**Εξεταστική Επιτροπή:**

**Δρ Έλληνας Ιωάννης, Καθηγητής**

**Δρ Δροσινόπουλος Παναγιώτης, Καθηγητής Εφαρμογών**

**Ημερομηνία εξέτασης 16/12/2016**



## ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Οι κάτωθι υπογεγραμμένοι **Τοπτσικιώτης Μιλτιάδης**, του **Μιλτιάδη**, με αριθμό μητρώου **42880** και **Ζαφείρης Παναγιώτης**, του **Ευάγγελου**, με αριθμό μητρώου **43446**, φοιτητές του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ Συστημάτων Τ.Ε. του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ., πριν αναλάβουμε την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μας, δηλώνουμε ότι ενημερωθήκαμε για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε.) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο των συγγραφέων, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικοί υπεύθυνοι είναι οι συγγραφείς της Π.Ε., οι οποίοι φέρουν και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών των συγγραφέων σε περίπτωση που το Ίδρυμα τούς έχει απονείμει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφασή της, μετά από αίτηση των ενδιαφερόμενων, τους αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση της Π.Ε. με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε. πρέπει να ολοκληρωθεί εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού 6μήνου από την ημερομηνία ανάθεσης της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18, παρ. 5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού.»





## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ολοκληρώθηκε μετά από επίμονες προσπάθειες, σε ένα ενδιαφέρον γνωστικό αντικείμενο, όπως αυτό της επεξεργασίας λειτουργίας Συστημάτων Αυτόματου Ελέγχου (ΣΑΕ) μέσω του προγράμματος MATLAB. Την προσπάθειά μας αυτή υποστήριξε η επιβλέπουσα καθηγήτριά μας, την οποία θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε.

Τέλος, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις οικογένειές μας για την στήριξη και την υπομονή τους σε αυτήν την τελευταία προσπάθεια ολοκλήρωσης των σπουδών μας.



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πτυχιακή αυτή έχει ως στόχο την επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων που σχετίζονται με τη μελέτη και την εφαρμογή των γραμμικών συστημάτων ελέγχου. Η χρήση του MATLAB είναι απαραίτητη για να μελετήσουμε τα γραμμικά συστήματα. Το MATLAB είναι ένα πρόγραμμα για όσους χρησιμοποιούν αριθμητικούς υπολογισμούς, βασισμένο στη γραμμική άλγεβρα (πίνακες). Ξεκίνησε ως ένα πρόγραμμα εργαστηρίου πινάκων (Matrix Laboratory) και έχει αναπτυχθεί αρκετά από τη MATHWORKS company για να γίνει ένα ισχυρότατο εργαλείο στην υλοποίηση προσομοιώσεων και μοντελοποιήσεων συστημάτων στον προγραμματισμό, στην ερευνα, στη επιστήμη των μηχανικών και στις επικοινωνίες.

Ο σκοπός της πτυχιακής αυτής είναι ο χρήστης να εισάγει και να κατανοήσει μερικές από τις δυνατότητες του MATLAB, έτσι ώστε να μπορεί να τις χρησιμοποιήσει για να σχεδιάσει και να αναλύσει τα συστήματα ελέγχου. Επίσης η πτυχιακή περιέχει λεπτομερείς οδηγίες και πολλά παραδείγματα. Η επίλυση των παραδειγμάτων αυτών έχει ως σκοπό τη επίτευξη δύο στόχων. Πρώτος στόχος είναι να διδάξουν στον φοιτητή πώς να γραφεί πρόγραμμα στο MATLAB και δεύτερον να τον παροτρύνουν να προχωρήσει στην επίλυση πιο προηγμένων προβλημάτων έλεγχου.

Η οργάνωση της πτυχιακής έχει ως εξής:

**Κεφάλαιο 1:** αποτελεί μία εισαγωγή στο MATLAB και τις δυνατότητές του.

Περιγράφει με αρκετά παραδείγματα που ασχολούνται με τους χειρισμούς των πινάκων, σύνθετη άλγεβρα και τα χαρακτηριστικά γραφικών του MATLAB.

**Κεφάλαιο 2:** δείχνει τον τρόπο επίλυσης μίας διαφορική εξίσωσης, δηλαδή πως θα βρούμε τις πολυωνυμικές ρίζες, τους πόλους και τα μηδενικά αλλά και την ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

**Κεφάλαιο 3:** εξηγεί τον τρόπο εκτέλεσης των μετασχηματισμών στον χώρο κατάστασης, όπως μετατροπή μοντέλου από τον χώρο κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς, μετατροπή από μοντέλο χώρου κατάστασης σε μοντέλο πόλων μηδενικών, μετατροπή συνάρτησης μεταφοράς στο μοντέλο χώρου κατάστασης κ.λπ.

**Κεφάλαιο 4:** ενασχόληση με το χρόνο απόκρισης των συστημάτων δεύτερης τάξης. Ακόμα θα δούμε τα αποτελέσματα της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου όταν προσθέτουμε τους πόλους και τα μηδενικά και τέλος ένα παράδειγμα απόκρισης συχνότητας.

**Κεφάλαιο 5:** καλύπτει μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά των συστημάτων έλεγχου με ανάδραση όπως ευστάθεια, ευαισθησία και σφάλμα σταθερής κατάστασης.

**Κεφάλαιο 6:** περιλαμβάνει το κριτήριο ευστάθειας (Routh-Hurwitz), την ανάλυση του γεωμετρικού τόπου ριζών (root-locus), καθώς και την σχεδίαση φάσης και πλάτους με την ίδια μέθοδο.

**Κεφάλαιο 7:** ενασχόληση με το κέρδος και το περιθώριο φάσης, τα διαγράμματα Bode, Nyquist, Nichols καθώς και τη σχεδίαση των συστημάτων έλεγχου στο πεδίο της συχνότητας.

**Κεφάλαιο 8:** ενασχόληση με τη μελέτη των ΣΑΕ στο χώρο κατάστασης με χρήση του προγράμματος Simulink.

## ABSTRACT

This text is intended to provide assistance in solving computational problems associated with the study and application of linear control systems. It is written expressly to support the use of *MATLAB* as a part of an introductory course in automatic control systems. *MATLAB*, developed by Math Works, Inc., is an interactive system for scientific and engineering computation and must be purchased separately from this book.

The objective is to introduce the user to some of the capabilities of *MATLAB*, and the associated *Control System Toolbox*, so that it can be used to aid in the design and analysis of control systems. The text contains sufficient detail and over 75 examples. These examples are designed with two objectives in mind. First, to teach the student how to write *MATLAB* programs, and second, to allow the user to advance rapidly in solving more advanced control system problems.

The organization of this text is as follows:

**Chapter 1:** is an introduction to *MATLAB* and its capabilities. It describes several examples dealing with matrix manipulations, complex algebra, and the graphics features of *MATLAB*.

**Chapter 2:** shows how to obtain the numerical solution of differential equations, polynomial roots and characteristic polynomials, poles and zeros of transfer functions, and partial fraction expansion.

**Chapter 3:** explains how to perform state-space transformations such as state-space to transfer function, state-space to zero-pole, transfer function to state-space, conversion of block diagrams to state-space models and reduced transfer functions.

**Chapter 4:** deals with time response of second-order systems, time domain performance specifications, and the effects of adding poles and zeros to the closed-loop transfer function. An example of model reduction is also presented. Examples of frequency response, including some frequency domain specifications, are given.

**Chapter 5:** covers some of the essential characteristics of feedback control systems such as stability, sensitivity, and steady-state errors.

**Chapter 6:** includes Routh-Hurwitz Stability Criterion, root-locus analysis, and design of phase-lead, phase-lag, and PID controllers by root-locus techniques.

**Chapter 7:** deals with gain and phase margin, Bode, Nyquist, Nichols plots, and design of control systems in frequency domain.

**Chapter 8:** deals with the development of the control systems in the state space using Simulink program.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, Matlab

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: ελεγκτής, γεωμετρικός τόπος, συνάρτηση μεταφοράς, διάγραμμα, απόκριση

KEY WORDS: controller, root-locus, transfer function, plot, response



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB</b> .....	<b>19</b>
1.1. Εγκατάσταση εργαλειοθήκης κειμένου.....	19
1.2. Προσομοίωση MATLAB.....	19
1.3. Μεταβλητές.....	22
1.4. Μορφοποίηση εξόδου.....	23
1.5. Αλφαριθμητικός χαρακτήρας.....	26
1.6. Ορίσματα διανύσματος.....	27
1.7. Στοιχειώδεις λειτουργίες πίνακα.....	29
1.7.1. Συναρτήσεις πίνακα.....	31
1.7.2. Ιδιοτιμές.....	32
1.8. Μιγαδικοί αριθμοί.....	32
1.9. Πολυωνυμικές ρίζες και χαρακτηριστικό πολυώνυμο.....	34
1.9.1. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση πολυωνύμου.....	36
1.9.2. Πολυωνυμική προσαρμογή καμπύλης.....	36
1.9.3. Υπολογισμός πολυωνύμου.....	37
1.9.4. Ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.....	37
1.10. Γραφικά.....	38
1.11. Εκτύπωση γραφικών.....	41
1.12. Διαγράμματα 3 <sup>ωv</sup> διαστάσεων.....	46
1.13. Χειρισμός γραφικών.....	52
1.14. Βρόχοι και λογικές δηλώσεις.....	52
1.15. Διάγραμμα προσομοίωσης.....	60
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>63</b>
2.1. Διαφορικές εξισώσεις φυσικών συστημάτων.....	63
2.2. Αριθμητική λύση.....	63
2.3. Μη γραμμικά συστήματα.....	67
2.4. Γραμμικοποίηση.....	70
2.5. Συνάρτηση μεταφοράς.....	70
2.5.1. Πολυωνυμικές ρίζες και χαρακτηριστικό πολυώνυμο.....	71
2.5.2. Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.....	72
2.5.3. Ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.....	73
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ</b> .....	<b>75</b>

3.1.	Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης .....	75
3.2.	Εξισώσεις ηλεκτρικών δικτύων .....	76
3.3.	Μετατροπή συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο χώρου κατάστασης ....	78
3.4.	Μετατροπή από το μοντέλο χώρου κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς.....	78
3.5.	Ομοιότητα μετασχηματισμών .....	79
3.5.1.	Διαγωνιοποίηση ενός πίνακα A .....	79
3.5.2.	Μετατροπή σε κανονική μορφή.....	80
3.6.	Λύση της εξίσωσης κατάστασης .....	81
3.7.	Μετασχηματισμός Laplace ενός μεταβατικού πίνακα ( $\Phi(s)$ ) .....	82
3.8.	Αξιολόγηση του $\Phi(t)$ από τις χαρακτηριστικές τιμές του A .....	83
3.8.1.	Μέθοδος Cayley-Hamilton .....	83
3.9.	Αριθμητική λύση της εξίσωσης κατάστασης.....	84
3.10.	Απλοποίηση δομικού διαγράμματος .....	87
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ .....</b>		<b>91</b>
4.1.	Απόκριση συστημάτων $2^{ns}$ τάξης .....	91
4.2.	Προδιαγραφές απόδοσης στο πεδίο του χρόνου .....	91
4.3.	Επιδράσεις πρόσθεσης πόλων και μηδενικών.....	92
4.3.1.	Προσθήκη μηδενικού .....	92
4.3.2.	Προσθήκη πόλου .....	93
4.4.	Απόκριση συχνότητας συστήματος.....	97
4.5.	Εργαλειοθήκη συστήματος ελέγχου: LTI Model και LTI Viewer.....	105
4.5.1.	LTI Models .....	106
4.5.2.	LTI Viewer.....	106
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ.....</b>		<b>109</b>
5.1.	Ευστάθεια .....	109
5.2.	Κριτήριο ευστάθειας Routh-Hurwitz .....	110
5.2.1.	Ειδικές περιπτώσεις.....	111
5.3.	Ευσαιθησία .....	113
5.4.	Σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση και τύπος συστήματος.....	115
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ .....</b>		<b>119</b>
6.1.	Μέθοδος γεωμετρικού τόπου .....	120
6.2.	Σύνοψη των γενικών κανόνων κατασκευής γεωμετρικού τόπου .....	121
6.3.	Σχεδίαση γεωμετρικού τόπου.....	133



6.4.	Ελεγκτής P .....	135
6.5.	Σχεδίαση αντιστάθμισης προήγησης φάσης .....	137
6.6.	Σχεδίαση καθυστέρησης φάσης.....	141
6.7.	Σχεδίαση PID .....	144
6.7.1.	Ελεγκτής PD .....	145
6.7.2.	Ελεγκτής PI.....	147
6.7.3.	Ελεγκτής PID .....	148
6.8.	Έλεγχος βρόχου αρνητικής ανατροφοδότησης.....	150
6.9.	Ρυθμός ανατροφοδότησης ή έλεγχος ανατροφοδότησης ταχύμετρου .	150
6.10.	Αντιστάθμιση ανατροφοδότησης με χρήση παθητικών στοιχείων.....	154
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ .....</b>		<b>163</b>
7.1.	Απόκριση συχνότητας.....	163
7.1.1.	Διάγραμμα Bode .....	164
7.1.2.	Πολικό διάγραμμα.....	165
7.1.3.	Διάγραμμα λογαριθμικού μέτρου - φάσης.....	166
7.2.	Σχετική ευστάθεια .....	166
7.2.1.	Περιθώρια κέρδους και φάσης.....	168
7.2.2.	Κριτήριο ευστάθειας Nyquist.....	169
7.2.3.	Απλοποιημένο κριτήριο Nyquist .....	170
7.3.	Απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου .....	172
7.3.1.	Διάγραμμα Nichols .....	173
7.4.	Σχεδίαση απόκρισης συχνότητας .....	176
7.5.	Ελεγκτής P.....	177
7.6.	Σχεδίαση αντιστάθμισης προήγησης φάσης .....	180
7.7.	Σχεδίαση καθυστέρησης φάσης.....	186
7.8.	Σχεδίαση PID .....	189
7.8.1.	Ελεγκτής PD .....	190
7.8.2.	Ελεγκτής PI.....	192
7.8.3.	Ελεγκτής PID .....	194
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ SIMULINK.....</b>		<b>197</b>
8.1.	Παράμετροι προσομοίωσης και οδηγός επίλυσης .....	198
8.2.	Παράθυρο διαλόγου προσομοίωσης παραμέτρων .....	200
8.3.	Δημιουργία δομικού διαγράμματος .....	200
8.4.	Χρήση του Workspace block .....	209

8.5. Αναπαράσταση γραμμικού μοντέλου στον χώρο κατάστασης από διάγραμμα SIMULINK .....	210
8.6. Υποσυστήματα και τεχνική μάσκας.....	214
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α' - ΜΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MATLAB .....</b>	<b>217</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>219</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1.1: Κύκλωμα του παραδείγματος 1.6.....	33
Εικόνα 1.2: Γραφικές του παραδείγματος 1.17.....	51
Εικόνα 2.1: Μηχανικό σύστημα.....	64
Εικόνα 2.2: Κύκλωμα RLC για παράδειγμα λύσης στο πεδίο του χρόνου.....	66
Εικόνα 2.3: Ταλάντωση εκκρεμούς.....	68
Εικόνα 3.1: Κύκλωμα του παραδείγματος 3.2.....	77
Εικόνα 4.1: Δομικό διάγραμμα του παραδείγματος 4.7.....	106
Εικόνα 4.2: Δομικό διάγραμμα του παραδείγματος 4.8.....	107
Εικόνα 5.1: Σύστημα του παραδείγματος 5.4.....	112
Εικόνα 5.2: Σύστημα του παραδείγματος 5.5.....	113
Εικόνα 5.3: Σύστημα ελέγχου μοναδιαίας ανατροφοδότησης.....	116
Εικόνα 5.4: Σύστημα του παραδείγματος 5.7.....	118
Εικόνα 6.1: Σύστημα ελέγχου για γεωμετρικό τόπο.....	120
Εικόνα 6.2: Σύστημα ελέγχου του παραδείγματος 6.1.....	123
Εικόνα 6.3: Βρόχος ελέγχου αρνητικής ανατροφοδότησης με ταχύμετρο.....	150
Εικόνα 6.4: Σύστημα ελέγχου του παραδείγματος 6.15.....	152
Εικόνα 6.5: Αντιστάθμιση ανατροφοδότησης με χρήση παθητικών στοιχείων.....	154
Εικόνα 8.1: Διάγραμμα Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.1.....	202
Εικόνα 8.2: Διάγραμμα Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.2.....	203
Εικόνα 8.3: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3. .....	207
Εικόνα 8.4: Μοντέλο χώρου κατάστασης για το σύστημα του παραδείγματος 8.4.....	208
Εικόνα 8.5: Μοντέλο Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.5.....	209
Εικόνα 8.6: Μοντέλο Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.6.....	210
Εικόνα 8.7: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3. .....	214
Εικόνα 8.8: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3. .....	215

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Παράδειγμα για γράφημα Χ-Υ.....	42
Σχήμα 1.2: Τοποθέτηση μίας παραβολής στα δεδομένα του παραδείγματος 1.13. ....	43
Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση του παραδείγματος 1.15. ....	44
Σχήμα 1.4: Παρουσίαση γραφικής σε υποπαράθυρα. ....	46
Σχήμα 1.5: Γραφική του παραδείγματος 1.18. ....	54
Σχήμα 1.6: Διαγράμματα πλάτους και γωνίας φάσης του παραδείγματος 1.19. ....	56
Σχήμα 1.7: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 1.20. ....	58
Σχήμα 2.1: Απόκριση του μηχανικού συστήματος του παραδείγματος 2.1. ....	65
Σχήμα 2.2: Απόκριση του κυκλώματος RLC του παραδείγματος 2.2. ....	67
Σχήμα 2.3: Απόκριση του εκκρεμούς που περιγράφεται στο παράδειγμα 2.3. ....	69
Σχήμα 3.1: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 3.9. ....	86
Σχήμα 3.2: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 3.10. ....	87
Σχήμα 4.1: Μοναδιαία βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.1. ....	95
Σχήμα 4.2: Μοναδιαία βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.2. ....	96
Σχήμα 4.3: Μοναδιαία βηματική συνάρτηση του παραδείγματος 4.3. ....	97
Σχήμα 4.4: Απόκριση συχνότητας ενός συστήματος 1 <sup>ης</sup> τάξης. ....	99
Σχήμα 4.5: Απόκριση συχνότητας ενός συστήματος 2 <sup>ης</sup> τάξης. ....	100
Σχήμα 4.6: Απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.4. ....	102
Σχήμα 4.7: Βηματική απόκριση και απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.5. ....	103
Σχήμα 4.8: Βηματική απόκριση και απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.6. ....	105
Σχήμα 4.9: Βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.8. ....	108
Σχήμα 4.10: Μέτρο και γωνία φάσης του παραδείγματος 4.8. ....	108
Σχήμα 5.1: Παράδειγμα 5.5. ....	115
Σχήμα 6.1: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.1. ....	123
Σχήμα 6.2: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.2. ....	124
Σχήμα 6.3: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.3. ....	126
Σχήμα 6.4: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.4. ....	127
Σχήμα 6.5: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.5. ....	129
Σχήμα 6.6: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.6. ....	130

Σχήμα 6.7: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.7.....	131
Σχήμα 6.8: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.8.....	132
Σχήμα 6.9: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.9.....	136
Σχήμα 6.10: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.10.....	140
Σχήμα 6.11: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.11.....	144
Σχήμα 6.12: Μοναδιαία βηματική απόκριση του συστήματος του παραδείγματος 6.15.....	154
Σχήμα 6.13: Βηματική απόκριση αντισταθμισμένου συστήματος .....	157
Σχήμα 6.14: Βηματική απόκριση προσομοίωσης GUI .....	162
Σχήμα 7.1: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.1 .....	165
Σχήμα 7.2: Πολικό διάγραμμα του παραδείγματος 7.1.....	166
Σχήμα 7.3: Γεωμετρικός τόπος και πολικό διάγραμμα για 3 τιμές του κέρδους. .....	167
Σχήμα 7.4: Δρόμος και διάγραμμα Nyquist του συστήματος του παραδείγματος 7.4.....	172
Σχήμα 7.5: Απόκριση συχνότητας του συστήματος κλειστού βρόχου του παραδείγματος 7.5.....	173
Σχήμα 7.6: Διάγραμμα Nichols του παραδείγματος 7.6.....	175
Σχήμα 7.7: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.7 .....	180
Σχήμα 7.8: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.8.....	185
Σχήμα 7.9: Βηματική απόκριση του αντισταθμισμένου συστήματος του παραδείγματος 7.8.....	185
Σχήμα 8.1: Διάγραμμα θερμοκρασία Φαρενάιτ-Κελσίου του παραδείγματος 8.1 .....	203
Σχήμα 8.2: Μετατόπιση απόκρισης του συστήματος του παραδείγματος 8.2.	206
Σχήμα 8.3: Ταχύτητα απόκρισης του συστήματος του παραδείγματος 8.2.....	206
Σχήμα 8.4: Αποτέλεσμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3. .....	208

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1.1: Εντολή Format .....	24
Πίνακας 1.2: Χαρακτήρες Μορφοποίησης .....	25
Πίνακας 1.3: Συναρτήσεις πινάκων.....	31
Πίνακας 1.4: Συναρτήσεις εκθετικής μορφής .....	34
Πίνακας 1.5: Ειδικοί χαρακτήρες.....	38
Πίνακας 1.6: Διαγράμματα 2D.....	39
Πίνακας 1.7: Γραφικές 3D .....	47
Πίνακας 1.8: Βρόχοι και λογικές δηλώσεις.....	52
Πίνακας 1.9: Τελεστές.....	53
Πίνακας 1.10: Λογικός έλεγχος .....	53
Πίνακας 1.11: Λογικές πράξεις.....	53
Πίνακας 5.1: Σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση για τύπο 0, 1, 2.....	117
Πίνακας 6.1: Γωνίες ασυμπτωτών .....	122
Πίνακας 6.2: Συναρτήσεις σχεδίασης γεωμετρικού τόπου .....	134
Πίνακας 7.1: Συναρτήσεις ελεγκτή .....	177
Πίνακας 8.1: Κουμπιά παραθύρου διαλόγου Simulink.....	200

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του MATLAB είναι η δυνατότητα προγραμματισμού του, το οποίο είναι πολύ εύκολο να μάθουμε και να χρησιμοποιήσουμε, και η οποία επιτρέπει τη χρήση των συναρτήσεων που έχουν αναπτυχθεί. Επίσης, επιτρέπει την πρόσβαση σε αλγορίθμους Fortran και κώδικα C μέσω εξωτερικών διεπαφών. Υπάρχουν διάφορες προαιρετικές εργαλειοθήκες γραμμένες για ειδικές εφαρμογές, όπως επεξεργασία σήματος, σχεδίαση συστημάτων ελέγχου, σύστημα εντοπισμού, στατιστική, νευρωνικά δίκτυα, ασαφής λογική, συμβολικοί υπολογισμοί, και άλλα. Το MATLAB έχει ενισχυθεί από το πολύ ισχυρό πρόγραμμα SIMULINK. Το SIMULINK είναι πρόγραμμα για την προσομοίωση των δυναμικών συστημάτων. Δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να προσομοιώνουν γραμμικά, καθώς και μη γραμμικά συστήματα εύκολα και επαρκώς. Η ακόλουθη ενότητα περιγράφει τη χρήση του MATLAB και έχει σχεδιαστεί για να δώσει μία γρήγορη εξοικείωση με κάποιες από τις εντολές και τις δυνατότητες του. Για μία περιγραφή όλων των άλλων εντολών, συναρτήσεων, και πολλών άλλων χρήσιμων λειτουργιών του, ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Οδηγό χρήσης του MATLAB.

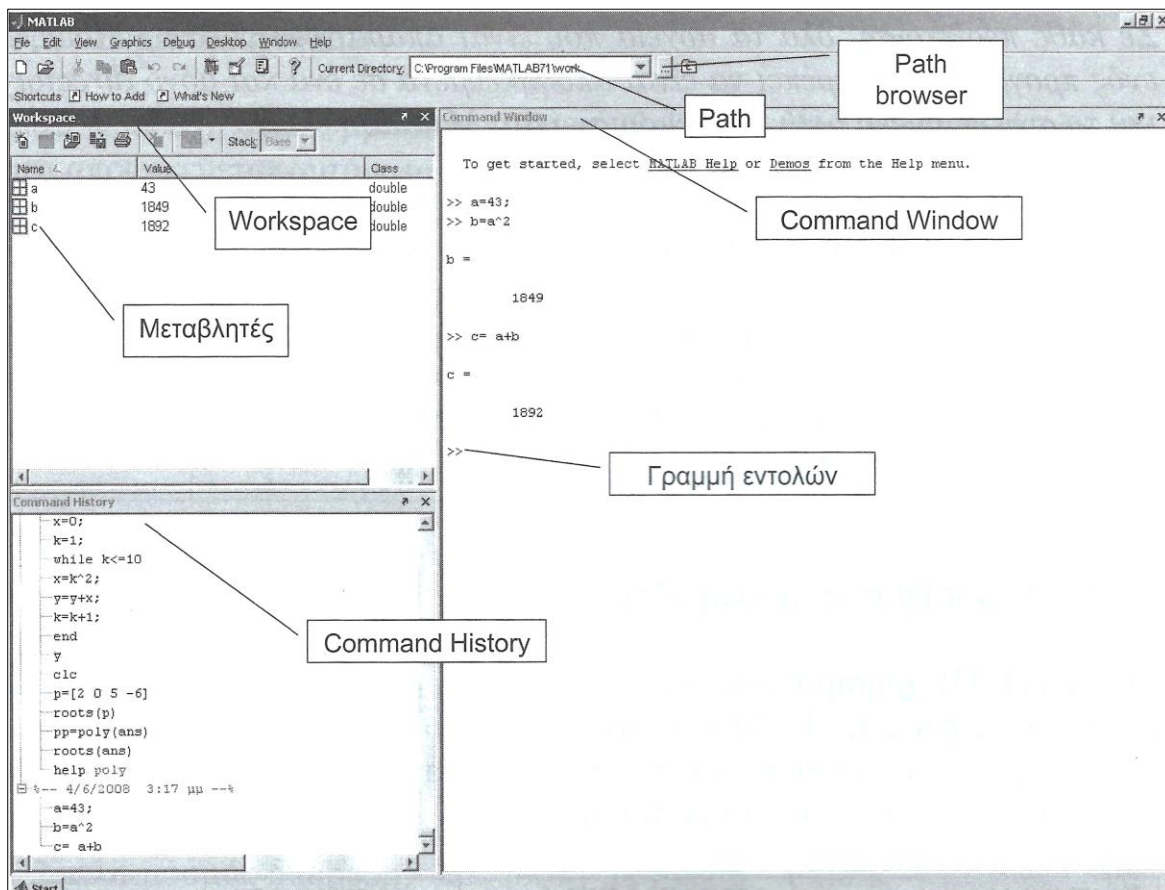
### 1.1. Εγκατάσταση εργαλειοθήκης κειμένου

Το cd λογισμικού που περιλαμβάνεται με την πτυχιακή περιέχει όλες τις εξελεγμένες συναρτήσεις και παραδείγματα για κάθε κεφάλαιο. Τα ονόματα των αρχείων για τα παραδείγματα αρχίζουν με τα **exam** γράμματα (exam = παράδειγμα). Για παράδειγμα, το M-file για το παράδειγμα 2.4 είναι **exam2\_4**. Δημιουργούμε έναν υποκατάλογο, όπως **HS**, όπου βρίσκεται η εργαλειοθήκη *MATLABR11*. Αντιγράφουμε όλα τα αρχεία στον δίσκο με τον υποκατάλογο *MATLABR11\TOOLBOX\HS*.

### 1.2. Προσομοίωση MATLAB

Το MATLAB υποστηρίζεται σχεδόν από κάθε υπολογιστική πλατφόρμα. Για να ξεκινήσουμε το MATLAB σε λειτουργικό WINDOWS κάνουμε κλικ στο εικονίδιο MATLAB. Το περιβάλλον εργασίας του MATLAB περιλαμβάνει κάποια παράθυρα τα όποια φαίνονται στο παρακάτω σχήμα .

- Το **Command Window** είναι το παράθυρο που περιέχει τη γραμμή εντολών. Εκεί πληκτρολογούμε τις εντολές που θέλουμε να εκτελέσουμε. Το σύμβολο «>>» ονομάζεται προτροπή εντολών και εμφανίζεται αυτόματα με την έναρξη του MATLAB.
- Το **Workspace** είναι ο χώρος εργασίας στον οποίο αποθηκεύονται όλες οι μεταβλητές και οι πίνακες που δημιουργούνται μέσω των εντολών που δίνουμε στη γραμμή εντολών.
- Το **Command History**, όπου φαίνονται οι εντολές που εκτελεστήκαν από όταν έγινε η εκκίνηση του προγράμματος τις προηγούμενες φορές.
- Επίσης στο επάνω μέρος φαίνεται η γραμμή του **Path** που δείχνει τη διαδρομή του φακέλου που βλέπει το MATLAB, καθώς και το κουμπί που οδηγεί στον **Path Browser**.



Πληκτρολογώντας **who** ή **whos** εμφανίζει μία λίστα με τα ονόματα των μεταβλητών που υπάρχουν εκείνη τη στιγμή στη μνήμη. Επίσης, η εντολή **dir** παραθέτει τα αρχεία και τους φακέλους στον προεπιλεγμένο κατάλογο. Το



MATLAB έχει μία on-line υπηρεσία βοήθειας, και η χρήση του συνίσταται ιδιαίτερα. Η εντολή **help** παρέχει μία λίστα αρχείων, ενσωματωμένες συναρτήσεις και λειτουργίες για τις οποίες η on-line βοήθεια είναι διαθέσιμη. Η εντολή:

**help function name**

θα δώσει πληροφορίες για την καθορισμένη συνάρτηση ως προς το σκοπό και τη χρήση της. Η εντολή:

**help help**

θα δώσει πληροφορίες για το πώς χρησιμοποιούμε την on-line βοήθεια.

Το MATLAB έχει ένα πρόγραμμα επίδειξης που δείχνει πολλά από τα χαρακτηριστικά του. Η εντολή **demo** εμφανίζει ένα μενού των διαθέσιμων προγραμμάτων επίδειξης. Αυτό θα παρέχει μία παρουσίαση των σημαντικότερων δραστηριοτήτων του MATLAB. Ακολουθούμε τις οδηγίες που εμφανίζονται στην οθόνη και αξίζει να τις δοκιμάσουμε. Το MATLAB περιλαμβάνει ένα **Help Desk** που παρέχει πρόσβαση σε on line βοήθεια για διάφορα θέματα, τεκμηρίωση, τον τρόπο έναρξης του MATLAB, απευθείας συνδέσεις, υλικά αναφοράς, συναρτήσεις, και πολλές εργαλειοθήκες. Η ηλεκτρονική τεκμηρίωση διατίθεται σε μορφή HTML, είτε μέσω Netscape Navigator ή μέσω Microsoft Internet Explorer.

Αν μία έκφραση με σωστή σύνταξη εισαχθεί στη γραμμή εντολών τότε υποβάλλεται σε επεξεργασία και το αποτέλεσμα εμφανίζεται αμέσως. Αν μία έκφραση απαιτεί περισσότερες από μία γραμμές τότε ο τελευταίος χαρακτήρας της προηγούμενης γραμμής πρέπει να περιέχει τρεις τελείες "...". Οι χαρακτήρες που ακολουθούν το σύμβολο τοις εκατό (%) αγνοούνται. Το σύμβολο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί οπουδήποτε σε ένα πρόγραμμα για να προσθέσουμε σχόλια. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο κατά τη δημιουργία ενός μακροσκελούς ή πολύπλοκου προγράμματος. Με την εντολή **clear** μπορούμε να διαγράψουμε όλες τις μεταβλητές που βρίσκονται στο Command window.

Το MATLAB είναι ικανό να εκτελεί ακολουθίες εντολών που είναι αποθηκευμένες σε μορφή αρχείων τα γνωστά και ως **αρχεία δέσμης ενεργειών** ή **M-File**. Για την δημιουργία ενός M-File κάνουμε "κλικ" στο **File>New>M-File** και στη συνέχεια ανοίγει το **edit window**. Ένα M-File μπορεί να γραφτεί σε μορφή ASCII με ένα οποιοδήποτε όνομα αρκεί να έχει την κατάληξη **.m**. Τα M-File πρέπει να σώζονται στον ενεργό φάκελο. Ενεργός φάκελος είναι ο φάκελος **work**. Σε περίπτωση που επιθυμούμε να αποθηκεύσουμε το αρχείο σε κάποιο άλλο φάκελο

θα πρέπει να προσθέσουμε αυτόν το φάκελο ως ενεργό (από το μενού **File>Set-Path**).

Τα M-File διακρίνονται σε 2 κατηγορίες: Τα αρχεία εντολών (ή **scripts**) και τα αρχεία συναρτήσεων (ή **functions**).

- **Scripts**

Τα Scripts είναι αρχεία κειμένου που περιέχουν εντολές του MATLAB. Το όνομά τους δεν πρέπει να είναι όνομα εντολής ή άλλου αρχείου αλλά πάντα να έχει κατάληξη **.m** (π.χ. **name.m**). Εκτελούνται είτε μέσω του παραθυρικού περιβάλλοντος του editor του MATLAB (κατάλογος επίλογων **Debug>Run**) είτε από την γραμμή εντολών πληκτρολογώντας απλά το όνομα τους **name** χωρίς την κατάληξη **.m** και πατώντας **Enter**. Τα Scripts είναι ιδανικά για την επίλυση προβλημάτων με μεγάλο αριθμό εντολών.

- **Functions**

Οι functions αποτελούν και αυτές M-Files, δηλαδή έχουν κατάληξη **.m** και πρέπει να αποθηκεύονται στον ενεργό φάκελο. Η διαφορά των functions από τα scripts είναι ότι οι functions παίρνουν εισόδους (ορίσματα) και επιστρέφουν εξόδους. Μία function ξεκινά πάντα στην πρώτη γραμμή του editor με την εξής έκφραση:

```
functions [y1,y2,...,yn] = onoma(x1,x2,...,xn)
```

Όπου  $y_1, y_2, \dots, y_n$  είναι οι έξοδοι που επιστρέφει η function και οι  $x_1, x_2, \dots, x_n$  είναι οι είσοδοι (ορίσματα) που δέχεται. Στην περίπτωση που έχουμε μία έξοδο μπορούμε να παραλείψουμε τις αγκύλες. Το όνομα της function θα πρέπει να είναι ίδιο με αυτό που έχουμε ορίσει στην πρώτη γραμμή. Τέλος για να τρέξουμε μία function πρέπει πρώτα να την αποθηκεύσουμε. Σε αντίθεση με τα scripts μία function τρέχει μόνο από τη γραμμή εντολών, γράφοντας το όνομα της (χωρίς κατάληξη **.m**) και δίνοντας κατάλληλα ορίσματα.

### 1.3. Μεταβλητές

Οι εκφράσεις που πληκτρολογούνται χωρίς το όνομα μεταβλητής υπολογίζονται από το MATLAB και το αποτέλεσμα αποθηκεύεται σε μία μεταβλητή που ονομάζεται **ans**. Το αποτέλεσμα μίας μεταβλητής μπορεί να εκχωρηθεί σε ένα όνομα μεταβλητής για περαιτέρω χρήση. Προσοχή, τα ονόματα των μεταβλητών μπορούν να έχουν μέχρι 19 χαρακτήρες (συμπεριλαμβανομένων των αριθμών και των γραμμάτων). Ωστόσο, ο πρώτος χαρακτήρας του ονόματος τη μεταβλητής

πρέπει να είναι ένα γράμμα. Το MATLAB έχει διάκριση πεζών-κεφαλαίων. Τα πεζά και κεφαλαία γράμματα αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικές μεταβλητές. Η εντολή **casesen** επηρεάζει το MATLAB στην περίπτωση αυτή. Οι μεταβλητές σε script αρχεία είναι παγκόσμιες. Για παράδειγμα, εάν η ακόλουθη έκφραση πληκτρολογείται:

```
>> x = exp(-0.2696*.2)*sin(2*pi*0.2)/(0.01*sqrt(3)*log(18))
```

το αποτέλεσμα βγαίνει στην οθόνη ως εξής:

```
x =  
18.0001
```

και έχει ανατεθεί στο **x**. Αν ένα όνομα μεταβλητής δεν χρησιμοποιείται, το αποτέλεσμα αποδίδεται στην μεταβλητή **ans**. Για παράδειγμα, πληκτρολογώντας την έκφραση:

```
>> 250/sin(pi/6)  
ans =  
500.0000
```

Αν ο τελευταίος χαρακτήρας της δήλωσης είναι ένα ερωτηματικό (;), η έκφραση εκτελείται, αλλά το αποτέλεσμα δεν εμφανίζεται. Ωστόσο, το αποτέλεσμα εμφανίζεται μετά την είσοδο του ονόματος μεταβλητής. Η εντολή **disp** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμφάνιση μίας μεταβλητής χωρίς να εκτυπώσουμε το όνομά της. Για παράδειγμα, η **disp(x)** εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής χωρίς να εκτυπώσουμε το όνομά της. Αν το **x** περιέχει μία συμβολοσειρά κειμένου, εμφανίζεται η συμβολοσειρά.

#### 1.4. Μορφοποίηση εξόδου

Το MATLAB κάνει πάντα υπολογισμούς διπλής ακρίβειας, επίσης μας παρέχει την δυνατότητα εμφάνισης των αριθμών με διαφορετικό πλήθος ψηφίων ανάλογα με την ακρίβεια που επιθυμούμε. Η προεπιλογή της μορφής (**default**) στο MATLAB όσον αφορά τα σημαντικά δεκαδικά ψηφία και το πλήθος κενών γραμμών μεταξύ εντολής και αποτελέσματος δίνεται από την εντολή **format**. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα **format** που μπορούμε να έχουμε. Για να καταλάβουμε καλύτερα την χρήση της εντολής **format** χρησιμοποιούμε το **π** που στο MATLAB εκφράζεται ως **pi**.

Πίνακας 1.1: Εντολή Format

ΕΝΤΟΛΗ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
>>format >>pi	Προεπιλεγμένη μορφή με 4 δεκαδικά ψηφία και κενές γραμμές μεταξύ εντολής και αποτελέσματος.	ans = 3.1416
>>format short >>pi	Μορφή με 4 δεκαδικά ψηφία (χωρίς κενές γραμμές).	ans = 3.1416
>>format long >>pi	Μορφή με 14 δεκαδικά ψηφία (χωρίς κενές γραμμές).	ans = 3.141592653589793
>>format short e >>pi	Μορφή με 4 δεκαδικά ψηφία και τον αριθμό εκφραζόμενο σε δύναμη του 10.	ans = 3.1416e+000
>>format long e >>pi	Μορφή με 14 δεκαδικά ψηφία και τον αριθμό εκφραζόμενο σε δύναμη του 10.	ans = 3.141592653589793e+000
>>format short g >>pi	Το καλύτερο από σταθερό ή κυμαινόμενο σημείο με 4 ψηφία.	ans = 3.1416
>>format long g >>pi	Το καλύτερο από σταθερό ή κυμαινόμενο σημείο με 14 ψηφία.	ans = 3.14159265358979
>>format hex >>pi	Αριθμός σε δεκαεξαδική μορφή.	ans = 400921fb54442d18
>>format +	Τα σύμβολα +,- τυπώνονται για θετικό, αρνητικό και για μηδέν αριθμό.	ans = +
>>format bank >>pi	Μορφή με 2 δεκαδικά ψηφία.	ans = 3.14
>>format rat >>pi	Προσέγγιση με την αναλογία των μικρών ακεραίων.	ans = 355/113
>>format compact >>pi	Απαλοιφή κενών γραμμών.	ans = 3.1416

Για μεγαλύτερη ευελιξία στη μορφή εξόδου, η εντολή **fprintf** εμφανίζει το αποτέλεσμα σε μία επιθυμητή μορφή στην οθόνη ή σε ένα συγκεκριμένο όνομα αρχείου. Η γενική μορφή αυτής της εντολής είναι η εξής:

**fprintf(fstr, A,...)**

γράφει τα πραγματικά ορίσματα της μεταβλητής ή του πίνακα **A**,... σύμφωνα με τις προδιαγραφές στο όρισμα συμβολοσειράς της **fstr**. Αυτή η συμβολοσειρά μπορεί να περιέχει χαρακτήρες μορφοποίησης όπως **ANCI C** με ορισμένες εξαιρέσεις και επεκτάσεις. Η εντολή **fprintf** είναι "διανυσματοποιημένη" για την περίπτωση που ο

A δεν είναι κλιμακοποιημένος. Το αλφαριθμητικό μορφοποίησης ανακυκλώνεται μέσα από τα στοιχεία του A (κατά στήλες) μέχρι όλα τα στοιχεία να χρησιμοποιηθούν. Στη συνέχεια ανακυκλώνεται με παρόμοιο τρόπο μέσω οποιουδήποτε επιπρόσθετου πίνακα. Οι χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται στη μορφοποίηση συμβολοσειράς (**Format**) της εντολής **fprintf** παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1.2: Χαρακτήρες Μορφοποίησης

ΜΟΡΦΗ ΚΩΔΙΚΑ		ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΕΛΕΓΧΟΥ	
%e	επιστημονική, πεζά	\n	νέα γραμμή
%E	επιστημονική, κεφαλαία	\r	αρχή γραμμής
%f	δεκαδικής μορφής	\b	back space
%s	χαρακτήρας	\t	tab
%u	ακέραιος	\g	νέα σελίδα
%i	ακολουθεί τον τύπο	\”	απόστροφος
%x	δεκαεξαδικό, πεζά	\\	back slash
%X	δεκαεξαδικό, κεφαλαία	\a	bell

Ένα απλό παράδειγμα της **fprintf** είναι το εξής:

```
>> fprintf('Area = %7.3f Square meters \n',pi*4.5^2)
Area = 63.617 Square meter
```

Το **%7.3f** εκτυπώνει έναν αριθμό κινητής υποδιαστολής επτά χαρακτήρων, με τρία ψηφία μετά το δεκαδικό σημείο. Η ακολουθία **\n** προωθεί την έξοδο στο αριστερό περιθώριο της επόμενης γραμμής.

Η ακόλουθη εντολή εμφανίζει έναν μορφοποιημένο πίνακα των φυσικών λογαρίθμων για τους αριθμούς 10, 20, 40, 60, και 80.

```
>> x = [10; 20; 40; 60; 80];
>> y = [x,log(x)];
>> fprintf('\n Number Natural log\n')
```

```
Number      Natural log
10           2.303
20           2.996
40           3.689
60           4.094
80           4.382
```

Ένα M-file μπορεί να ζητά είσοδο από το πληκτρολόγιο. Η εντολή **input** καλεί τον υπολογιστή να ζητήσει δεδομένα από το πληκτρολόγιο. Για παράδειγμα, η εντολή:

```
>> R = input('Enter radius in meter')
```

εμφανίζει τη συμβολοσειρά κειμένου:

```
Enter radius in meter
```

και περιμένει για έναν αριθμό που θα εισαχθεί. Εάν ο αριθμός, ας πούμε 4.5 έχει εισαχθεί, αναθέεται στην μεταβλητή R και εμφανίζεται ως εξής:

```
R =  
4.5000
```

Η εντολή **keyboard** τοποθετείται σε ένα M-file αρχείο και μπορεί να σταματήσει την εκτέλεση του αρχείου και να επιτρέψει στο χρήστη να εξετάσει και να αλλάξει τις μεταβλητές στο αρχείο. Πατώντας **ctrl-z** τερματίζει τη λειτουργία του πληκτρολογίου και επιστρέφει στο αρχείο επίκλησης. Μία άλλη χρήσιμη εντολή είναι η **diary A: όνομα αρχείου**. Αυτή η εντολή δημιουργεί ένα αρχείο στη μονάδα δίσκου A, και όλες οι έξοδοι που εμφανίζονται στην οθόνη αποστέλλονται σε αυτό το αρχείο. Η εντολή **diary off** σβήνει το ημερολόγιο. Τέλος, η εντολή **save filename** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποθηκεύσουμε τις εκφράσεις που εμφανίζονται στην οθόνη σε ένα αρχείο με το όνομα **filename.mat**, και το όνομα του αρχείου που δηλώθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να φορτώσουμε το αρχείο **filename.mat**.

Το MATLAB έχει μία χρήσιμη συλλογή από υπερβατικές συναρτήσεις, όπως η εκθετική, η λογαριθμική, οι τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις. Για μία πλήρη λίστα και βοήθεια για τις συναρτήσεις αυτές, πληκτρολογούμε την εντολή **help ops**, καθώς και για στοιχειώδεις μαθηματικές συναρτήσεις, πληκτρολογούμε την εντολή **help elfun**.

### 1.5. Αλφαριθμητικός χαρακτήρας

Μία ακολουθία χαρακτήρων με μονά εισαγωγικά ονομάζεται ακολουθία χαρακτήρων ή μεταβλητή κειμένου.

```
>> c = 'Good'  
c = Good
```

Μία μεταβλητή κειμένου μπορεί να δηλωθεί με περισσότερες μεταβλητές κειμένου, για παράδειγμα:

```
>> cs = [c, 'luck']  
cs =
```

```
Goodluck
```

## 1.6. Ορίσματα διανύσματος

Ένα διάνυσμα  $\mathbf{n}$  είναι μία γραμμή ή μία σειρά στήλης  $\mathbf{n}$  αριθμών. Στο MATLAB, τα στοιχεία που περικλείονται από αγκύλες και διαχωρίζονται με ερωτηματικά δημιουργούν ένα διάνυσμα στήλης. Για παράδειγμα, η δήλωση:

```
>> x = [2; -4; 8]
x =
     2
    -4
     8
```

Εάν τα ορίσματα διαχωρίζονται με κενά ή κόμματα, παράγεται ένα διάνυσμα σειράς. Τα στοιχεία μπορεί να είναι οποιαδήποτε έκφραση. Η δήλωση:

```
>> R = [tan(pi/4) sqrt(9) -5]
έχει έξοδο:
```

```
R =
     1.0000     3.0000    -5.0000
```

Η ανάστροφος στήλη ενός διανύσματος καταλήγει σε ένα διάνυσμα γραμμής, και το αντίστροφο. Για παράδειγμα:

```
>> Y = R'
Y =
     1.0000
     3.0000
    -5.0000
```

Το MATLAB έχει δύο διαφορετικούς τύπους αριθμητικών πράξεων. Οι αριθμητικές πράξεις πίνακα (Matrix arithmetic operations) που ορίζονται από τους κανόνες της γραμμικής άλγεβρας, και οι αριθμητικές πράξεις πίνακα (Array arithmetic operations) που εξάγονται στοιχείο προς στοιχείο. Ο χαρακτήρας τελεία (.) διαχωρίζει τα δύο είδη πράξεων. Ωστόσο, όσο τα δύο είδη πράξεων είναι τα ίδια για πρόσθεση και αφαίρεση, τα ζεύγη των χαρακτήρων + και - δεν χρησιμοποιούνται. Τα διανύσματα του ίδιου μεγέθους μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν, εφόσον η άθροιση πραγματοποιείται στοιχείο με στοιχείο. Ωστόσο, για τον πολλαπλασιασμό, ειδικοί κανόνες πρέπει να ακολουθούνται προκειμένου να ληφθούν οι σωστές τιμές που προκύπτουν. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος  $X$  με ένα κλιμακωτό  $k$  (**κλιμακωτός πολλαπλασιασμός**) εκτελείται στοιχείο προς στοιχείο. Για παράδειγμα η  $P = 5 * R$  παράγει την έξοδο:

```
P =
     5.0000    15.0000   -25.0000
```

Το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων  $X$  και  $Y$  που συμβολίζεται με  $\langle X, Y \rangle$  είναι μία κλιμακωτή ποσότητα και ορίζεται από την σχέση  $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Αν τα  $X$

και  $Y$  είναι και τα δύο διανύσματα στήλης που ορίζονται παραπάνω, τότε το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από:

```
>> S = X' * Y
S =
    -50
```

Ο τελεστής ( $.$ \*) εκτελεί την πράξη στοιχείο προς στοιχείο. Για παράδειγμα, για τα διανύσματα που δηλώθηκαν προηγουμένως:

```
>> E = X .* Y
E =
     2.0000
    -12.0000
    -40.0000
```

Ο τελεστής ( $.$ /) εκτελεί διαίρεση στοιχείο προς στοιχείο. Οι δύο πίνακες πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος, εκτός αν ένας από αυτούς είναι κλιμακωτός. Οι δυνάμεις πινάκων δηλώνονται με ( $.$ ^). Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, και άλλες στοιχειώδεις μαθηματικές συναρτήσεις όπως **abs**, **sqrt**, **real**, και **log**, επίσης, εκτελούνται στοιχείο προς στοιχείο.

Μπορούν να ληφθούν διάφορα πρότυπα (μέτρο του μεγέθους) ενός διανύσματος. Για παράδειγμα, το πρότυπο του Ευκλείδη είναι η τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος και του εαυτού του.

```
>> N = norm(X)
N =
     9.1652
```

Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων  $X$  και  $Y$  ορίζεται από την σχέση  $\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|}$ .

Η δήλωση του είναι:

```
>> Theta = acos( X' * Y / (norm(X) * norm(Y)) )
Theta =
     2.7444
```

όπου  $\Theta$  είναι σε ακτίνια.

Το μηδενικό διάνυσμα (**zero vector**), είναι ένα διάνυσμα με όλα τα στοιχεία να ισούνται με μηδέν. Για παράδειγμα, για να φτιάξουμε ένα διάνυσμα μηδενικής σειράς μεγέθους 4, κάνουμε χρήση της ακόλουθης συνάρτησης:

```
>> Z = zeros(1, 4)
Z =
     0     0     0     0
```

Το μοναδιαίο διάνυσμα (**one vector**) είναι ένα διάνυσμα με κάθε στοιχείο ίσο με ένα. Για να δημιουργήσουμε ένα τέτοιο διάνυσμα μεγέθους 4, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση:



```
>> I = ones(1, 4)
I =
```

```
    1    1    1    1
```

Στο MATLAB, η άνω και κάτω τελεία (:) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα γραμμής. Για παράδειγμα η εντολή:

```
>> x = 1:8
```

παράγει ένα διάνυσμα γραμμής ακεραίων από 1 έως 8.

```
x =
```

```
    1    2    3    4    5    6    7    8
```

Για ορίσματα εκτός της μονάδος, κάνουμε χρήση της εντολής:

```
>> z = 0 : pi/3 : pi
```

```
z =
```

```
    0    1.0472    2.0944    3.1416
```

Για αρνητικά ορίσματα:

```
>> x = 5 : -1 : 1
```

```
x =
```

```
    5    4    3    2    1
```

Εναλλακτικά, μπορούμε να δημιουργήσουμε ειδικά διανύσματα, με την εντολή **linspace(x,y,n)** η οποία δημιουργεί ένα διάνυσμα με n στοιχεία που τοποθετούνται γραμμικά μεταξύ του x και του y. Ομοίως, η εντολή **logspace(x,y,n)** δημιουργεί ένα διάνυσμα με n στοιχεία που τοποθετούνται σε λογαριθμική κλίμακα μεταξύ του  $10^x$  και του  $10^y$ .

### 1.7. Στοιχειώδεις λειτουργίες πίνακα

Στο MATLAB, ένας πίνακας δημιουργείται σε μία ορθογώνια διάταξη αριθμών που περιβάλλεται από παρενθέσεις. Τα ορίσματα σε κάθε γραμμή χωρίζονται με κενά ή κόμματα. Ένα ερωτηματικό πρέπει να χρησιμοποιείται για την δήλωση του τέλους μίας γραμμής. Τα στοιχεία του πίνακα μπορούν να είναι οποιοδήποτε έκφραση του MATLAB.

```
>> A = [6 1 2; -1 8 3; 2 4 9]
```

```
A =
```

```
    6    1    2
   -1    8    3
    2    4    9
```

Εάν ένα ερωτηματικό δεν χρησιμοποιείται, κάθε σειρά πρέπει να αναγράφεται σε ξεχωριστή γραμμή, όπως φαίνεται παρακάτω.

```
A =
```

```
[ 6    1    2
  -1    8    3
   2    4    9 ]
```

Ολόκληρη η γραμμή ή η στήλη ενός πίνακα μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια του συμβόλου (:). Για παράδειγμα:

```
>> r3 = A(3,:)
r3 =
     2     4     9
```

Ομοίως, η δήλωση  $\mathbf{A}(:, 2)$  πραγματεύεται όλα τα στοιχεία της δεύτερης στήλης του A.

Πίνακες ίδιων διαστάσεων μπορούν να προστεθούν ή να αφαιρεθούν. Δύο πίνακες, A και B, μπορούν να πολλαπλασιαστούν μαζί για να σχηματίσουν ένα γινόμενο AB αν είναι συμβατοί. Δύο σύμβολα χρησιμοποιούνται για διαίρεση πινάκων. Το  $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$  είναι ισοδύναμο με  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  και το  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$  είναι ισοδύναμο με  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ .

### Παράδειγμα 1.1

Για την εξίσωση του παρακάτω πίνακα,  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , προσδιορίζουμε το διάνυσμα X.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -10 \\ 2 & 10 & -12 \\ -4 & -6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \\ -16 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [4 -2 -10; 2 10 -12; -4 -6 16];
>> B = [-10; 32; -16];
>> X = A \ B
X =
     2.0000
     4.0000
     1.0000
```

Εκτός από τις ενσωματωμένες συναρτήσεις, πολυάριθμες μαθηματικές συναρτήσεις διατίθενται σε μορφή M-file. Για την τρέχουσα λίστα και τις εφαρμογές τους, βλέπουμε τον οδηγό χρήσης του MATLAB.

### Παράδειγμα 1.2

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **inv** για να προσδιορίσουμε τον αντίστροφο πίνακα A στο παράδειγμα 1.1 και κατόπιν προσδιορίζουμε το X.

```
>> A = [4 -2 -10; 2 10 -12; -4 -6 16];
>> B = [-10; 32; -16];
>> C = inv(A)
>> X = C*B
C =
     2.2000     2.3000     3.1000
     0.4000     0.6000     0.7000
     0.7000     0.8000     1.1000
X =
     2
     4
     1
```

Παράδειγμα 1.3

Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **lu**, για να ορίσουμε τον πίνακα A του παραδείγματος 1.2 ως έναν (άνω και κάτω) τριγωνικό πίνακα,  $A = LU$ . Στη συνέχεια, βρίσκουμε το X από την  $X = U^{-1}L^{-1}B$ .

```
>> A = [4 -2 -10; 2 10 -12; -4 -6 16];
>> B = [-10; 32; -16];
>> [L, U] = lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
   -1.0000   -0.7273    1.0000
U =
    4.0000   -2.0000  -10.0000
         0   11.0000   -7.0000
         0         0    0.9091
>> X = inv(U)*inv(L)*B
X =
     2
     4
     1
```

Οι διατάσεις ενός πίνακα δίνονται από τη συνάρτηση **size()**. Η εντολή **rank()** προσδιορίζει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του πίνακα. Για διανύσματα, χρησιμοποιούμε την εντολή **length()**.

**1.7.1. Συναρτήσεις πίνακα**

Υπάρχουν πολλές ειδικές συναρτήσεις οι οποίες είναι χρήσιμες για πράξεις πινάκων. Λίγα παραδείγματα είναι τα εξής:

Πίνακας 1.3: Συναρτήσεις πινάκων

<b>eye (M, N)</b>	Επιστρέφει ένα MxN πίνακα που έχει άσσους στη κύρια διαγώνιο και μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις.
<b>zeros (m, n)</b>	Επιστρέφει ένα πίνακα MxN με μηδενικά που αποτελείται από M γραμμές και N στήλες.
<b>ones (m, n)</b>	Επιστρέφει ένα πίνακα με άσσους που αποτελείται από M γραμμές και N στήλες.
<b>diag (x)</b>	Επιστρέφει ένα διάνυσμα με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου .
<b>Rand (m, n)</b>	Επιστρέφει ένα MxN πίνακα με τυχαία στοιχεία.
<b>Magic (M)</b>	Δημιουργεί ένα τετραγωνικό πίνακα με την ιδιότητα του το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης να είναι το ίδιο.

Για μία πλήρη λίστα και βοήθεια σχετικά με στοιχειώδεις πίνακες και πράξεις πινάκων, πληκτρολογούμε την εντολή **help elmat**. Υπάρχουν πολλοί

ενσωματωμένοι πίνακες. Για μία πλήρη λίστα και για εξειδικευμένη βοήθεια στους πίνακες αυτούς πληκτρολογούμε την εντολή **help specmat**.

### 1.7.2. Ιδιοτιμές

Εάν το  $A$  είναι ένας  $N \times N$  πίνακας και οι αριθμοί  $n$  και  $\lambda$  ικανοποιούν την σχέση  $Ax = \lambda x$  τότε είναι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Βρίσκονται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **eig(A)** η οποία επιστρέφει τις ιδιοτιμές σε ένα διάνυσμα στήλης.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να ληφθούν με μία διπλή δήλωση εκχώρησης **[X,D] = eig(A)**. Τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι οι ιδιοτιμές και οι στήλες του  $X$  είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τέτοια ώστε  $AX = DX$ .

#### Παράδειγμα 1.4

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  που δίδονται από τον πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>> A = [0 1 -1; -6 -11 6; -6 -11 5];
>> [X,D] = eig(A)
X =
    0.7071    -0.2182   -0.0921
    0.0000   -0.4364   -0.5523
    0.7071   -0.8729   -0.8285
D =
   -1.0000         0         0
         0   -2.0000         0
         0         0   -3.0000
```

### 1.8. Μιγαδικοί αριθμοί

Όλες οι αριθμητικές πράξεις του MATLAB είναι διαθέσιμες για σύνθετες συναρτήσεις. Το φανταστικό μέρος  $\sqrt{-1}$  είναι προκαθορισμένο από δύο μεταβλητές  $i$  και  $j$ .

$$j = \text{sqrt}(-1) \quad \text{ή} \quad i = \text{sqrt}(-1)$$

#### Παράδειγμα 1.5

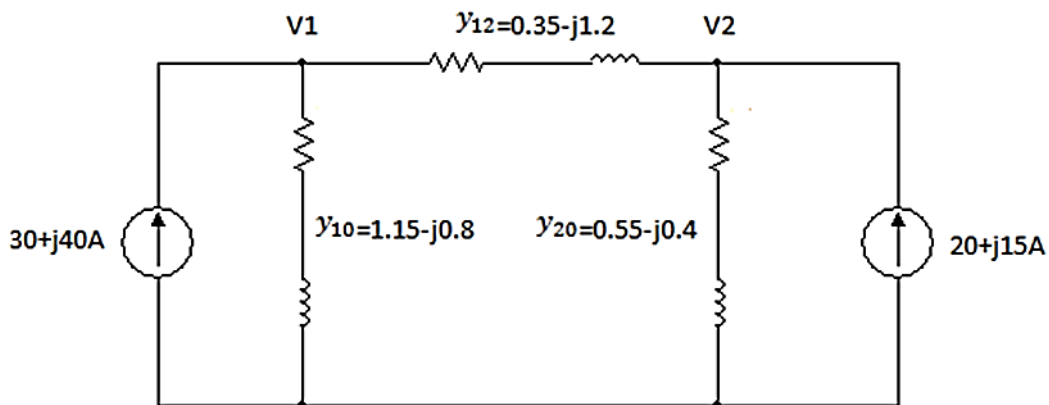
Προσδιορισμός της ακόλουθης συνάρτησης  $V = Z_c \cos hg + \frac{\sinh g}{Z_c}$  όπου  $Z_c = 200 + j300$  και  $g = 0.02 + j1.5$ .

```
>> i = sqrt(-1); Zc = 200 + 300*i; g = 0.02 + 1.5*i;
>> v = Zc *cosh(g) + sinh(g)/Zc
v =
    8.1672 +25.2172i
```

Είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι, όταν οι μιγαδικοί αριθμοί εισάγονται ως στοιχεία πίνακα μέσα σε παρένθεση, θα πρέπει να αποφευχθούν τυχόν κενά. Εάν υπάρχουν κενά γύρω από τον μιγαδικό αριθμό, τότε αντιπροσωπεύει δύο ξεχωριστούς αριθμούς.

### Παράδειγμα 1.6

Στο κύκλωμα, που φαίνεται στην Εικόνα 1.1, καθορίζουμε τις τάσεις κόμβου  $V_1$  και  $V_2$  και την ισχύ που αποδίδεται από κάθε πηγή.



Εικόνα 1.1: Κύκλωμα του παραδείγματος 1.6.

Από τον νόμο του Kirchhoff έχουμε ως αποτέλεσμα την ακόλουθη εξίσωση κόμβων του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1.5 - j2.0 & -.35 + j1.2 \\ -.35 + j1.2 & 0.9 - j1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 + j40 \\ 20 + j15 \end{bmatrix}$$

και ο μιγαδικός αριθμός της κάθε πηγής δίνεται από την σχέση  $S = VI^*$ . Το ακόλουθο πρόγραμμα έχει δημιουργηθεί για να δώσει λύσεις στα  $V_1$ ,  $V_2$  και  $S$  με τη χρήση του MATLAB.

```
>> j = sqrt(-1) % Defining j
j =
    0 + 1.0000i
>> I = [ 30+j*40; 20+j*15] % Column of node current phasors
I =
    30.0000 +40.0000i
    20.0000 +15.0000i
>> Y = [1.5-j*2 -.35+j*1.2; -.35+j*1.2 .9-j*1.6]
```

```
% Complex admittance matrix Y
Y =
    1.5000 - 2.0000i   -0.3500 + 1.2000i
   -0.3500 + 1.2000i    0.9000 - 1.6000i
>> disp('The solution is');
>> V = inv(Y)*I % Node voltage solution
>> S = V.*conj(I) % complex power at nodes
V =
    3.5902 +35.0928i
    6.0155 +36.2212i
S =
 1.0e+003 *
    1.5114 + 0.9092i
    0.6636 + 0.6342i
```

Στο MATLAB, η μετατροπή από πολική σε εκθετική μορφή γίνεται με την χρήση των ακόλουθων συναρτήσεων:

Πίνακας 1.4: Συναρτήσεις εκθετικής μορφής

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
$Z=a+bi$ ή $z=a+j*b$	ορθογώνια μορφή
Real(z)	επιστρέφει το πραγματικό μέρος του z
Ima(z)	επιστρέφει το φανταστικό μέρος του z
Abs(z)	απόλυτη τιμή του z
Angle(z)	γωνία φάσης του z
Conj(z)	σύζευξη του z
$Z=M*\exp(j*\theta)$	μετατρέπει για $M\angle\theta$ σε ορθογώνιο σχήμα

Το σύμβολο (‘) χρησιμοποιείται για πραγματικό πίνακα. Για μιγαδικούς πίνακες, το σύμβολο (.’) πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τον μεταβατικό.

### 1.9. Πολυωνυμικές ρίζες και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Αν  $p$  είναι ένα διάνυσμα γραμμής που περιέχει τους συντελεστές ενός πολυωνύμου, τότε η εντολή **roots(p)** επιστρέφει ένα διάνυσμα στήλης του οποίου τα στοιχεία είναι οι ρίζες του πολυωνύμου. Αν  $r$  είναι ένα διάνυσμα στήλης που περιέχει τις ρίζες ενός πολυωνύμου τότε η εντολή **poly(r)** επιστρέφει ένα διάνυσμα γραμμής των οποίων τα στοιχεία είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

#### Παράδειγμα 1.7

Βρίσκουμε τις ρίζες του παρακάτω πολυωνύμου:

$$s^6 + 9s^5 + 31.25s^4 + 61.25s^3 + 67.75s^2 + 14.75s + 15$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου εισάγονται σε φθίνουσα σειρά δυνάμεων.

Οι ρίζες θα βρεθούν με την χρήση της εντολής **roots()**.

```
>> p = [1 9 31.25 61.25 67.75 14.75 15];
>> r = roots(p)
r =
-4.0000
-3.0000
-1.0000 + 2.0000i
-1.0000 - 2.0000i
-0.0000 + 0.5000i
-0.0000 - 0.5000i
```

### Παράδειγμα 1.8

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι  $-1, -2, -3 \pm j4$ . Προσδιορίζουμε την πολυωνυμική εξίσωση.

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να εισαχθούν χρησιμοποιώντας το  $i$  ή  $j$ . Οι ρίζες έπειτα εισάγονται σε ένα διάνυσμα στήλης. Η πολυωνυμική εξίσωση λαμβάνεται με την χρήση της εντολής **poly** ως εξής:

```
>> i = sqrt(-1);
>> r = [-1 -2 -3+4*i -3-4*i];
>> p = poly(r)
p =
    1     9    45    87    50
```

Επομένως, η πολυωνυμική εξίσωση είναι:

$$s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50 = 0$$

### Παράδειγμα 1.9

Προσδιορισμός των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα βρίσκεται με την εντολή **poly**, και οι ρίζες αυτής της εξίσωσης βρίσκονται με την εντολή **roots**.

```
>> A = [0 1 -1; -6 -11 6; -6 -11 5];
>> p = poly(A)
p =
    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
>> r = roots(p)
r =
-3.0000
-2.0000
-1.0000
```

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ίδιες με τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Έτσι, στη θέση των συναρτήσεων **poly** και **roots**, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση:

```
r = eig(A)
```

### 1.9.1. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση πολυωνύμου

Ένα πολυώνυμο είναι η συνέλιξη των συντελεστών. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την εντολή αποσυνέλιξης (**deconvolution**).

#### Παράδειγμα 1.10

A) Δοθέντος των  $A = s^2 + 7s + 12$  και  $B = s^2 + 9$ , βρίσκουμε το  $C = AB$ .

B) Δοθέντος των  $Z = s^4 + 9s^3 + 37s^2 + 81s + 52$  και  $Y = s^2 + 4s + 13$  βρίσκουμε το  $X = \frac{Z}{Y}$ .

```
>> A = [1 7 12]; B = [1 0 9];
>> C = conv(A, B)
C =
     1     7    21    63   108
>> Z = [1 9 37 81 52]; Y = [1 4 13];
>> [X, r] = deconv(Z, Y)
X =
     1     5     4
r =
     0     0     0     0     0
```

### 1.9.2. Πολυωνυμική προσαρμογή καμπύλης

Γενικά, μία πολυωνυμική προσαρμογή στα δεδομένα στα διανύσματα x και y είναι μία συνάρτηση p της μορφής:

$$p(x) = c_1x^d + c_2x^{d-1} + \dots + c_n$$

Ο βαθμός είναι d, και ο αριθμός των συντελεστών είναι  $n = d + 1$ . Λαμβάνοντας υπόψη ένα σύνολο σημείων στα διανύσματα x και y, η συνάρτηση **polyfit(x,y,d)** επιστρέφει τους συντελεστές του πολυωνύμου  $d^{\text{βαθμού}}$  σε φθίνουσα σειρά δυνάμεων του x.

#### Παράδειγμα 1.11

Βρίσκουμε ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού για να καλύπτει τα ακόλουθα δεδομένα.

x	0	1	2	4	6	10
y	1	7	23	109	307	1231



```
>> x = [0 1 2 4 6 10];
>> y = [1 7 23 109 307 1231];
>> c = polyfit(x,y,3)
c =
    1.0000    2.0000    3.0000    1.0000
```

Δηλαδή,

$$y = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

### 1.9.3. Υπολογισμός πολυωνύμου

Αν  $c$  είναι ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι οι συντελεστές ενός πολυωνύμου σε φθίνουσα σειρά δυνάμεων, η συνάρτηση **polyval(c,x)** μας δίνει την τιμή του πολυωνύμου υπολογισμένη στο  $x$ . Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το παραπάνω πολυώνυμο στα σημεία 0, 1, 2, 3, και 4, χρησιμοποιούμε τις εντολές:

```
>> c = [1 2 3 1];
>> x = 0:1:4;
>> y = polyval(c,x)
y =
    1     7    23    55   109
```

### 1.9.4. Ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

Το Matlab μας παρέχει μία έτοιμη συνάρτηση που μετατρέπει ένα σήμα από ρητή μορφή σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων. Η συνάρτηση αυτή είναι η **residue**. Η πλήρης σύνταξή της είναι **[R,P,K] = residue(B,A)**. Το B είναι το διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή ενώ το A είναι το διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του παρανομαστή. Επομένως εάν έχουμε ένα σήμα ρητής μορφής:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Τα διανύσματα  $b$  και  $a$  προσδιορίζουν τους συντελεστές των πολυωνύμων με φθίνουσα σειρά δυνάμεων του  $s$ . Τα υπόλοιπα επιστρέφονται στο διάνυσμα στήλης  $r$ , και οι θέσεις των πόλων στο διάνυσμα στήλης  $p$ , και τα οι άμεσοι όροι στο διάνυσμα  $k$ .

#### Παράδειγμα 1.12

Προσδιορισμός σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων για την:

$$F(s) = \frac{2s^3 + 9s + 1}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

```
>> b = [2 0 9 1];
>> a = [1 1 4 4];
>> [r,p,k] = residue(b,a)
r =
    0.0000 - 0.2500i
    0.0000 + 0.2500i
   -2.0000
```

Επομένως, η ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων είναι:

$$2 + \frac{-2}{s+1} + \frac{j0.25}{s+j2} + \frac{-j0.25}{s-j2} = 2 + \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s^2+4}$$

Η εντολή **[num,den] = residue(res,poles,K)** μετατρέπει το πολυώνυμο  $P(s)/Q(s)$  σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων.

### 1.10. Γραφικά

Το MATLAB μπορεί να σχεδιάσει υψηλής ανάλυσης γραφικές παραστάσεις ποιότητας 2D 3D. Επίσης μας επιτρέπει να ορίσουμε εμείς τα χρώματα, τα σύμβολα για τα σημεία και τον τύπο της γραμμής που τα ενώνει. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή ενός ακόμη ορίσματος στην εντολή **plot** (θα μιλήσουμε μετά για το πως συντάσσουμε την εντολή αυτή) μετά από κάθε ζεύγος διανυσμάτων που θα σχεδιαστεί. Το νέο όρισμα είναι μία σειρά από ειδικούς χαρακτήρες μέσα σε αποστρόφους τους οποίους βλέπουμε στον παρακάτω πίνακα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ή περισσότερους χαρακτήρες σε οποιαδήποτε σειρά.

Πίνακας 1.5: Ειδικοί χαρακτήρες

Σύμβολο	Χρώμα	Σύμβολο	Τύπος σημείων	Σύμβολο	Τύπος γραμμής
k	Μαύρο	.	.	-	Συνεχής
b	Μπλε	o	o	:	Διάστικτη
c	Κυανό	x	x	-.	Συνδυασμός
g	Πράσινο	+	+	--	Διακεκομμένη
m	Πορφυρό	*	*		
r	Κόκκινο	s	Τετράγωνο		
w	Άσπρο	d	Ρόμβος		
		p	Πεντάγωνο		
		h	Εξάγωνο		

Πίνακας 1.6: Διαγράμματα 2D

<b>ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ 2D</b>	
area	Γεμίζει την περιοχή της γραφικής παράστασης
bar	Ραβδόγραμμα
barh	Οριζόντιο ραβδόγραμμα
comet	Comet-όπως τροχιά
ezplot	Εύκολη στη χρήση της συνάρτησης plotter
ezpolar	Εύκολη στη χρήση πολικών συντεταγμένων
feather	Διάγραμμα Feather
fill	Γεμίζει πολύγωνα 2D
fplot	Συνάρτηση plot
hist	Ιστόγραμμα
pareto	Διάγραμμα Pareto
pie	Διασπά το διάγραμμα σε κομμάτια
plotmatrix	Γραφική παράσταση διασποράς ενός πίνακα
stem	Σχεδιάζει μια διακριτή ακολουθία
stairs	Γραφική παράσταση σκαλοπατιού μίας κλίμακας

Έχουμε τρεις επιλογές για να χαράξουμε μία γραφική παράσταση στο ίδιο γράφημα. Για παράδειγμα ας πάρουμε την παρακάτω εντολή:

```
plot(x1,y1,'r',x2,y2,'+b',x3,y3,'--')
```

Η γραφική (x1,y1) θα είναι μία σταθερή κόκκινη γραμμή, η plot(x2,y2) με ένα μπλε σήμα + , ενώ η (x3,y3) μία διακεκομμένη γραμμή. Αν X και Y είναι πίνακες ίδιου μεγέθους, η γραφική (X,Y) θα σχεδιάσει τις στήλες του Y και του X αντίστοιχα. Εναλλακτικά για να κρατήσουμε την παλιά γραφική παράσταση και πάνω σε αυτή να σχεδιάσουμε μία καινούργια χρησιμοποιούμε την εντολή **hold**. Η εντολή **hold** μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «διακόπτης» στις δύο καταστάσεις (διατήρηση παλιάς γραφικής-μη διατήρηση). Πιο εύκολα μπορούμε να γράψουμε **hold on** για να μπούμε στη κατάσταση διατήρησης και **hold off** για να τη σταματήσουμε. Ένας άλλος τρόπος για τη χάραξη πολλαπλών καμπυλών στην ίδια γραφική παράσταση είναι η χρήση της εντολής **line**. Για παράδειγμα, εάν για ένα γράφημα που παράγεται από την εντολή plot(x1,y1), οι εντολές:

```
line(x2, y2, '+b')
line(x3, y3, '--')
```

θα μας προσθέσουν μία καμπύλη (x2,y2) με ένα μπλε σήμα + , και μία (x2,y2) διακεκομμένη γραμμή στο υπάρχοντα γράφημα που παράγεται από την προηγούμενη εντολή.

Για να σχεδιάσουμε σε περισσότερα από ένα παράθυρα χρησιμοποιούμε την εντολή **figure**. Όσες φορές γράφουμε την εντολή τόσα παράθυρα ανοίγουν. Εάν δώσουμε την εντολή **figure(h)** όπου h αριθμός εμφανίζεται ένα νέο παράθυρο με όνομα figure h. Αυτό θα είναι και το ενεργό παράθυρο δηλαδή αν δώσουμε την εντολή plot θα σχεδιάσουμε σε αυτό το παράθυρο. Επίσης σε μία γραφική συμπεριλαμβάνεται ο τίτλος, οι ετικέτες στον x και y άξονα και το πλέγμα. Για να προσθέσουμε ένα πλέγμα γραμμών για την καλύτερη ανάγνωση των συντεταγμένων χρησιμοποιούμε την εντολή **grid on** και για να το αφαιρέσουμε την εντολή **grid off**. Η εντολή grid λειτουργεί σαν «διακόπτης» ανάμεσα στις δύο καταστάσεις. Μπορούμε να προσθέσουμε ετικέτες στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα μίας γραφικής παράστασης με τις εντολές **xlabel** και **ylabel** αντίστοιχα. Ακόμα μπορούμε να βάλουμε τίτλο σε όλη την γραφική παράσταση με την εντολή **title**. Για να προσθέσουμε κείμενο μέσα στο γράφημα το κάνουμε με την εντολή **text**. Για παράδειγμα, η δήλωση:

```
text (3.5,1.5, 'Voltage')
```

θα γράψει Voltage στο σημείο (3.5,1.5) στην τρέχουσα γραφική.

Ένας πιο απλός τρόπος για να εισάγουμε ένα γράφημα, είναι με την εντολή **gtext** («κείμενο»). Αυτή μας οδηγεί στο παράθυρο του γραφήματος όπου εμφανίζεται ένας σταυρός ο οποίος μετακινείται με το ποντίκι. Μόλις εντοπίσουμε το κατάλληλο σημείο εισάγουμε το κείμενο πατώντας δεξί κλικ. Επίσης το MATLAB με την εντολή **legend** τοποθετεί αυτόματα σε ένα ορθογώνιο τις περιγραφές που θα ορίσουμε για κάθε καμπύλη του γραφήματος καθώς και τον τρόπο (χρώμα-σύμβολο) που είναι σχεδιασμένες. Η επιγραφή διαγράφεται με την εντολή **legend off**. Τέλος με την εντολή **axis([x\_min, x\_max, y\_min, y\_max])** καθορίζουμε τα όρια που θα έχουμε στους άξονες μας, δηλαδή όπου **x\_min**, **x\_max** είναι οι μικρότερες και οι μεγαλύτερες τιμές στον x-άξονα και **y\_min**, **y\_max** για τον y-άξονα. Εάν θέλουμε να πειράξουμε μόνο έναν από τους 2 άξονες το κάνουμε με τις εντολές **xlim([x\_min, x\_max])** για τον x-άξονα και **ylim([y\_min, y\_max])** για τον y-άξονα.

Υπάρχουν πολλές άλλες εξειδικευμένες εντολές για δισδιάστατη αποτύπωση. Μεταξύ αυτών είναι οι εντολές **semilogx** και **semilogy**. Η εντολή **semilogx(x,y)** σχεδιάζει φτιάχνοντας μόνο τον άξονα x σε λογαριθμική κλίμακα. Αντίστοιχα και η **semilogy(x,y)** για τον y άξονα.

### 1.11. Εκτύπωση γραφικών

Ο ευκολότερος τρόπος για να αποκτήσουμε σε έντυπη μορφή την οποιαδήποτε γραφική παράσταση είναι με τη χρήση των Windows built-in facilities. Στο παράθυρο figure στο **menu>file** τραβάμε προς τα κάτω και επιλέγουμε την εντολή **print**. Η εντολή αυτή θα στείλει το τρέχον γράφημα απευθείας στον εκτυπωτή. Για να εισάγουμε ένα γράφημα μας στον επεξεργαστή κειμένου (word, power point), στο **menu>edit** επιλέγουμε το **copy options**, εκεί υπάρχουν αρκετά πράγματα τα οποία μπορούμε να κάνουμε όπως η περιστροφή του φόντου, η αλλαγή χρώματος, και πολλά άλλα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την εντολή **copy** για να αντιγράψουμε το γράφημα και αφού μεταβούμε στον επεξεργαστή κειμένου χρησιμοποιούμε την εντολή **paste** για να εισάγουμε το γράφημα. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα η γραφική να έχει αλλοιωμένο χρώμα. Αυτό συμβαίνει διότι ορισμένοι επεξεργαστές κειμένου μπορεί να μην παρέχουν την εκτεταμένη υποστήριξη των **Windows graphics**. Για την εξάλειψη αυτού του προβλήματος χρησιμοποιούμε την εντολή:

```
System_dependent(14, 'on') . . .
```

Επιπλέον το MATLAB παρέχει μία συνάρτηση που ονομάζεται **print** που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή υψηλής ανάλυσης γραφικών αρχείων. Για παράδειγμα, η εντολή **print -dhpgl [filename]** αποθηκεύει το γράφημα κάτω από το καθορισμένο όνομα αρχείου με HGL καταληξη.

Μία άλλη επιλογή εκτύπωσης που μας επιτρέπει να αποθηκεύσουμε και να φορτώσουμε εκ νέου το σχήμα είναι η εντολή **print-dmfile [filename]** η οποία παράγει ένα αρχείο **MAT** και ένα **M-file** για να αναπαράγουν ξανά το σχήμα. Από το **menu** του παραθύρου **figure** επιλέγουμε **file>save as** και αποθηκεύουμε την γραφική μας με κατάληξη **fig**. Επίσης μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε διάφορες μορφές το γράφημά μας όπως: **EMF, BMP, eps, ai, jpg, tiff, png, PCX, PBM, PGM, και ppm**.

#### Παράδειγμα 1.13

Δημιουργούμε μία γραφική παράσταση X-Y για τις ακόλουθες μεταβλητές.

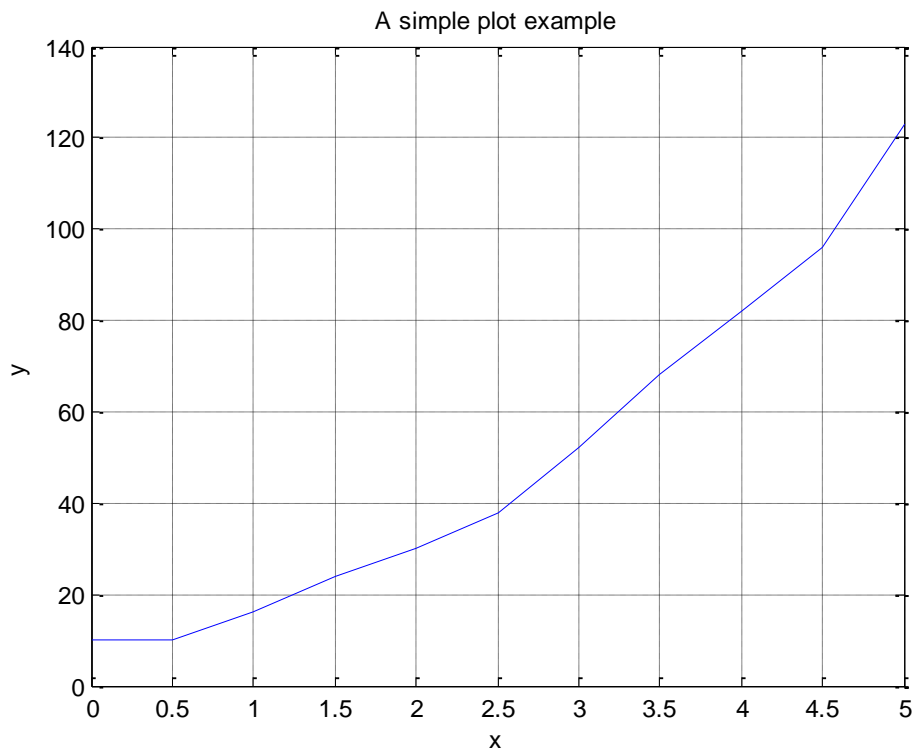
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	10	16	24	30	38	52	68	82	96	123

Για μία μικρή ποσότητα δεδομένων, μπορούμε να πληκτρολογήσουμε στα δεδομένα απευθείας με τη χρήση αγκυλών.

```
>> x = [0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0];
>> y = [10 10 16 24 30 38 52 68 82 96 123];
>> plot(x,y), grid
>> xlabel('x'), ylabel('y'), title('A simple plot example')
```

Η εντολή **plot(x,y)** παράγει μία γραμμική γραφική παράσταση του y με το x στην οθόνη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

Για μεγάλες ποσότητες δεδομένων, χρησιμοποιούμε τον επεξεργαστή κειμένου για να δημιουργήσουμε ένα αρχείο με επέκταση .m. Πληκτρολογούμε το όνομα του αρχείου για να εμφανιστούν τα δεδομένα μας στο χώρο εργασίας.



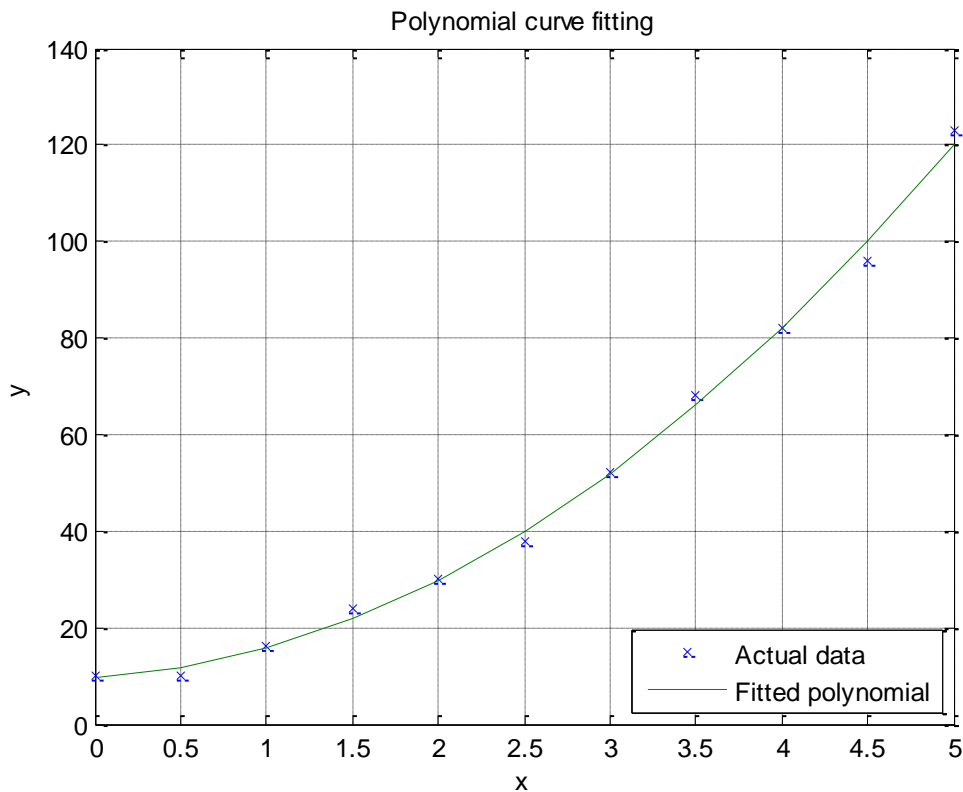
Σχήμα 1.1: Παράδειγμα για γράφημα X-Y.

#### Παράδειγμα 1.14

Τοποθετούμε ένα πολυώνυμο 2<sup>ης</sup> τάξης στα δεδομένα του παραδείγματος 1.13. Σχεδιάζουμε τα δοθέντα σημεία με το σύμβολο x και τη προσαρμοσμένη καμπύλη με συνεχή γραμμή. Τοποθετούμε ένα **boxed legend** στο γράφημα.

Η εντολή **p = polyfit(x,y,2)** χρησιμοποιείται για την εύρεση των συντελεστών ενός πολυωνύμου 2<sup>ου</sup> βαθμού ικανοποιεί τα δεδομένα, και η εντολή **yc = polyval(p,x)** χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό σε όλες τις τιμές του x. Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εντολές:

```
>> x = [0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0 4.5 5.0];
>> y = [10 10 16 24 30 38 52 68 82 96 123];
>> p = polyfit(x,y,2) % finds the coefficients of a
polynomial of degree 2 that fits the data
>> yc = polyval(p,x);%polynomial is evaluated at all points
in x
>> plot(x,y,x',x,yc)%plots data with x and fitted polynomial
>> xlabel('x'), ylabel('y'), grid
>> title('Polynomial curve fitting')
>> legend('Actual data', 'Fitted polynomial', 4)
p =
    4.0233    2.0107    9.6783
```



Σχήμα 1.2: Τοποθέτηση μίας παραβολής στα δεδομένα του παραδείγματος 1.13.

Έτσι, η παραβολή  $4.0x^2 + 2.0x + 9.68$  που βρέθηκε ικανοποιεί τα δοθέντα δεδομένα. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 1.2.

### Παράδειγμα 1.15

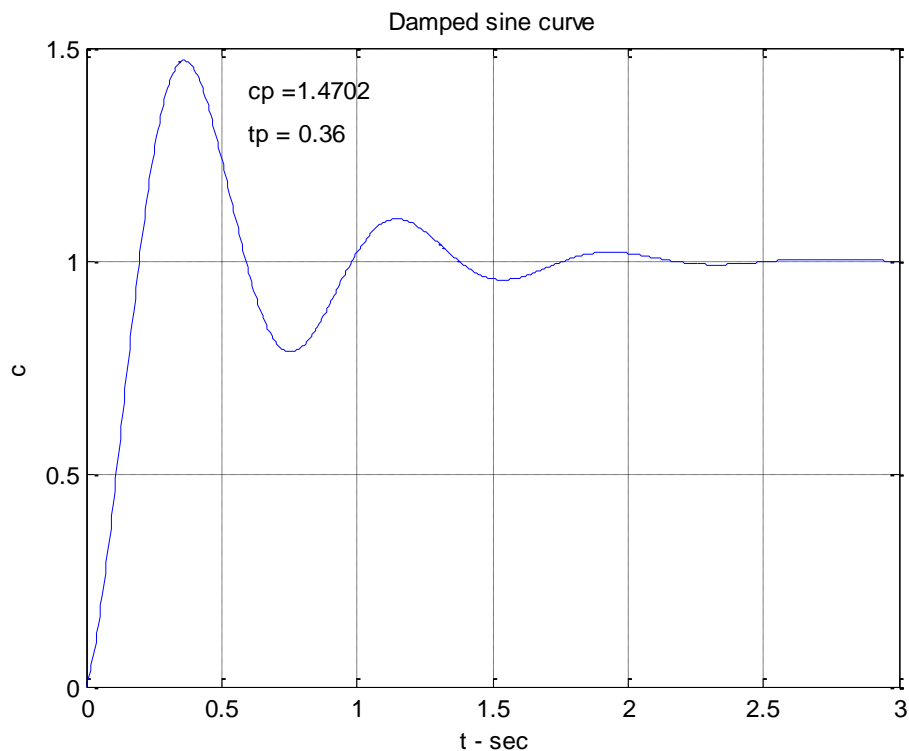
Έστω η συνάρτηση  $y = 1 + e^{-2t} \sin(8t - \pi/2)$ , από 0 - 3 δευτερόλεπτα. Βρίσκουμε το χρόνο που αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή της συνάρτησης και την τιμή κορυφής. Στο γράφημα θα πρέπει να επισημαίνονται, ο τίτλος και να εμφανίζονται οι γραμμές πλέγματος.

Είναι σημαντικό να θυμόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τελεία (.). Για τον πολλαπλασιασμό στοιχείο προς στοιχείο των δύο όρων στην δεδομένη εξίσωση,

η εντολή **[cp,k] = max(c)** επιστρέφει την τιμή κορυφής και το δείκτη k που αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή του χρόνου. Χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες εντολές:

```
>> t = 0:.005:3; c = 1+ exp(-2*t).*sin(8*t - pi/2);
>> [cp,k] = max(c) % cp is the maximum value of c at
interval k
>> tp = t(k) % tp is the peak time
>> plot(t,c), xlabel(' t - sec'), ylabel('c'), grid
>> title('Damped sine curve')
>> text(0.6, 1.4, ['cp = ',num2str(cp)])%Text in quote & the
value
% of cp are printed at the specified location
>> text(0.6, 1.3, ['tp = ',num2str(tp)])
cp =    1.4702
k =     73
tp =    0.3600
```

και η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση του παραδείγματος 1.15.

Ένας διαδραστικός τρόπος για να βρούμε τα σημεία δεδομένων της καμπύλης είναι με τη χρήση της εντολής **ginput**. Εισάγοντας την εντολή **[x,y] = ginput** θα τοποθετηθεί ένας σταυρός στο γράφημα. Τοποθετούμε τον σταυρό στην επιθυμητή θέση στην καμπύλη, και κάνουμε κλικ με το ποντίκι. Μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για την εξαγωγή συντεταγμένων για πολλά σημεία σύμφωνα με τις απαιτήσεις. Όταν το πλήκτρο επιστροφής είναι πατημένο, η είσοδος τερματίζεται και τα δεδομένα εξόδου εκτυπώνονται από το μενού



εντολών. Για παράδειγμα, για να βρούμε την μέγιστη τιμή και τον μέγιστο χρόνο κορυφής για τη συνάρτηση στο παράδειγμα 1.15, δοκιμάζουμε την εντολή:

```
>> [tp,cp] = ginput
cp =
    1.47
tp =
    0.36
```

Η εντολή **subplot** διαχωρίζει το παράθυρο του σχήματος σε πολλαπλά τμήματα, προκειμένου να δείξει πολλά γραφήματα την ίδια στιγμή. Η δήλωση **subplot(m,n,p)** σπάει το παράθυρο του σχήματος σε m-n-p υποπαράθυρα και χρησιμοποιεί το υποπαράθυρο του  $p^{ου}$  υποπαραθύρου για την γραφική. Έτσι, η εντολή **subplot(2,2,3)**, **plot(x,y)** χωρίζει το παράθυρο της εικόνας σε τέσσερα υποπαράθυρα και τις γραφικές y, x στο τρίτο επιμέρους παράθυρο, το οποίο είναι το πρώτο υποπαράθυρο στη δεύτερη σειρά. Η εντολή **subplot(111)** επιστρέφει ένα προεπιλεγμένο παράθυρο. Αυτό αποδεικνύεται στο επόμενο παράδειγμα.

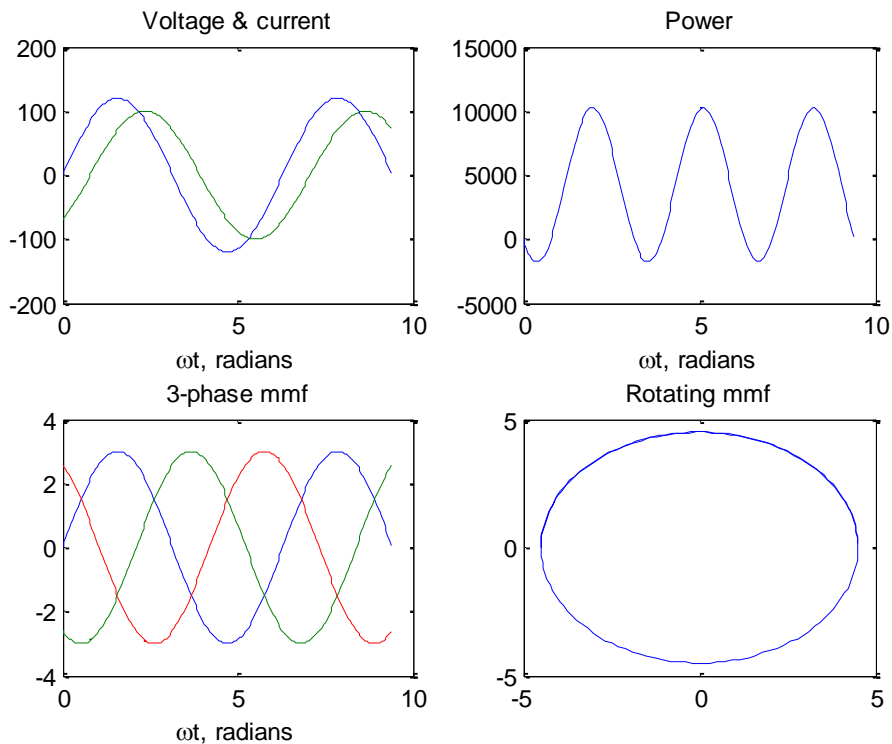
#### Παράδειγμα 1.16

Χωρίζουμε την εικόνα του παραθύρου σε τέσσερα μέρη, και σχεδιάζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις για  $\omega t$  από  $0$  έως  $3\pi$  με βήμα  $0.05$ . Σχεδίαση:

1. Των  $v = 120 \sin \omega t$  και  $i = 100 \sin(\omega t - \pi/4)$  σε σχέση με  $\omega t$  στο επάνω αριστερό τμήμα.
2. Του  $p = vi$  στο επάνω δεξί τμήμα.
3. Δοθέντος του  $F_m = 3.0$ , των  $f_a = F_m \sin \omega t$ ,  $F_b = F_m \sin(\omega t - 2\pi/3)$  και  $F_c = F_m \sin(\omega t - 4\pi/3)$  σε σχέση με το  $\omega t$  στο κάτω αριστερό τμήμα.
4. Για  $f_R = 3F_m$ , κατασκευή ενός κύκλου ακτίνας  $f_R$  στο κάτω δεξί μέρος.

```
>> wt = 0: 0.05: 3*pi; v = 120*sin(wt); %Sinusoidal voltage
>> i = 100*sin(wt - pi/4); %Sinusoidal current
>> p = v.*i; %Instantaneous power
>> subplot(2,2,1), plot(wt,v,wt,i); %Plot of v & i versus wt
>> title('Voltage & current'), xlabel('\omegat, radians');
>> subplot(2,2,2), plot(wt,p); % Instantaneous power vs. wt
>> title('Power'), xlabel(' \omegat, radians ')
>> Fm = 3.0;
>> fa = Fm*sin(wt); % Three-phase mmf's fa, fb, fc
>> fb = Fm*sin(wt - 2*pi/3); fc = Fm*sin(wt - 4*pi/3);
>> subplot(2,2,3), plot(wt,fa,wt,fb,wt,fc)
>> title('3-phase mmf'), xlabel(' \omegat, radians ')
>> fR = 3/2*Fm;
>> subplot(2, 2, 4), plot(-fR*cos(wt), fR*sin(wt))
>> title('Rotating mmf'), subplot(111)
```

Τα αποτελέσματα του παραδείγματος 1.16 παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: Παρουσίαση γραφικής σε υποπαράθυρα.

### 1.12. Διαγράμματα 3<sup>ων</sup> διαστάσεων

Το MATLAB παρέχει επίσης εντολές για την απεικόνιση τρισδιάστατων γραφικών. Οι πιο συνηθισμένες είναι οι **plot3**, **mesh** και η **surface**. Η σύνταξη και τα χαρακτηριστικά της **plot3** είναι ίδια με αυτή της **plot** με τη διαφορά ότι εδώ ορίζουμε τριάδες διανυσμάτων αντί για ζεύγη. Η γενική της μορφή είναι **plot3(x,y,z)**. Τα διανύσματα **x**, **y**, **z** πρέπει να έχουν ίδιες διαστάσεις και τα σημεία στον τρισδιάστατο χώρο σχεδίασης να έχουν συντεταγμένες τα αντίστοιχα σημεία των **x**, **y**, **z**. Οι εντολές που χρησιμοποιούσαμε για την μορφοποίηση του γραφήματος στο χώρο δύο διαστάσεων ισχύουν και εδώ αν τις καλέσουμε με την κατάλληλη σύνταξη. Για παράδειγμα η εντολή **text** δέχεται 3 συντεταγμένες ενώ για ετικέτα στον z-άξονα χρησιμοποιούμε την εντολή **zlabel**. Οι εντολές **box**, **subplot**, **grid** κλπ, έχουν την ίδια ακριβώς λειτουργία.

Για να σχεδιάσουμε επίπεδα (ή αλλιώς επιφάνειες) σε τρισδιάστατο χώρο, η διαδικασία είναι πιο απαιτητική. Αρχικά ορίζουμε δύο διανύσματα **x** και **y** τα οποία έχουν σημεία στο εύρος τιμών των αντίστοιχων μεταβλητών για τις οποίες θα γίνει η γραφική παράσταση. Έπειτα με την εντολή **meshgrid** μετατρέπουμε τα δύο

προηγούμενα διανύσματα σε πίνακες X και Y όπου οι γραμμές του X είναι οι επαναλήψεις του διανύσματος x και οι στήλες του Y οι επαναλήψεις του διανύσματος y. Στη συνέχεια ορίζουμε έναν καινούργιο πίνακα Z συναρτήσει των πινάκων X και Y. Τέλος με την εντολή **mesh(X,Y,Z)** ή την εντολή **surf(X,Y,Z)** σχεδιάζουμε το γράφημά μας. Για ένα πλήρη κατάλογο και βοήθεια των συναρτήσεων γενικής χρήσης και των γραφικών τριών διαστάσεων, πάμε στη βοήθεια γραφικών (**help graphics**) και στην βοήθεια (**help plotxyz**).

Πίνακας 1.7: Γραφικές 3D

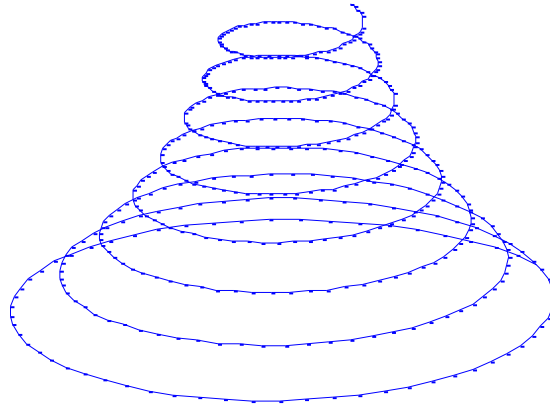
ΓΡΑΦΙΚΕΣ 3D	
plot3	Δημιουργία καμπυλών στον τρισδιάστατο χώρο
mesh	Σχεδίαση 3D επιφάνειας
surf	Σχεδίαση 3D επιφάνειας με χρώματα
fill3	Γεμίζει 3D πολύγωνα
comet3	3D comet-όπως τροχιές
ezgraph3	Γενικός σκοπός η σχεδίαση της επιφάνειας 3D με χρώματα
ezmesh	Εύκολη χρήση πλέγματος σε 3D σχεδίαση
ezmeshc	Εύκολο στο συνδυασμό των εντολών mesh/contour
ezplot3	Εύκολο στη χρήση για σχεδίαση 3D παραμετρικών καμπυλών.
ezsurf	Εύκολο στη χρήση για σχεδίαση 3D επιφανειών με χρωματισμό.
ezsurfc	Εύκολο στο συνδυασμό των εντολών surf/contour.
meshc	συνδυασμός mesh/contour καμπυλών.
meshz	3D πλέγμα με κουρτίνα
scatter3	3D διάγραμμα διασποράς
stem3	Για την σχεδίαση συναρτήσεων διακριτού χρόνου σε 3D μορφή
surfc	Συνδυασμός surf / contour καμπυλών
trisurf	Γραφική παράσταση τριγωνικής επιφάνειας
trimesh	Γραφική παράσταση με τριγωνικό πλέγμα
cylinder	Δημιουργεί κύλινδρο
sphere	Δημιουργεί σφαίρα

#### Παράδειγμα 1.17 (exam1\_17)

Λίγα παραδείγματα των 3-D γραφικών και γραφικών πλέγματος δίνονται στο σχήμα 1.6.

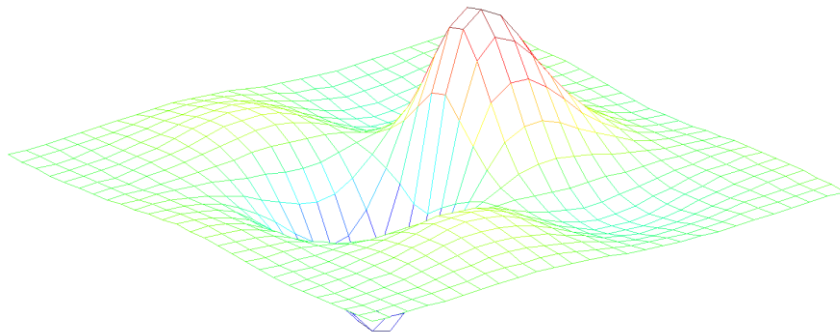
#### Παραμετρική καμπύλη χώρου

```
>> t = 0:0.1:16*pi;
>> x = exp(-0.03*t).*cos(t);
>> y = exp(-0.03*t).*sin(t);
>> z = t;
>> plot3(x, y, z), axis off
```



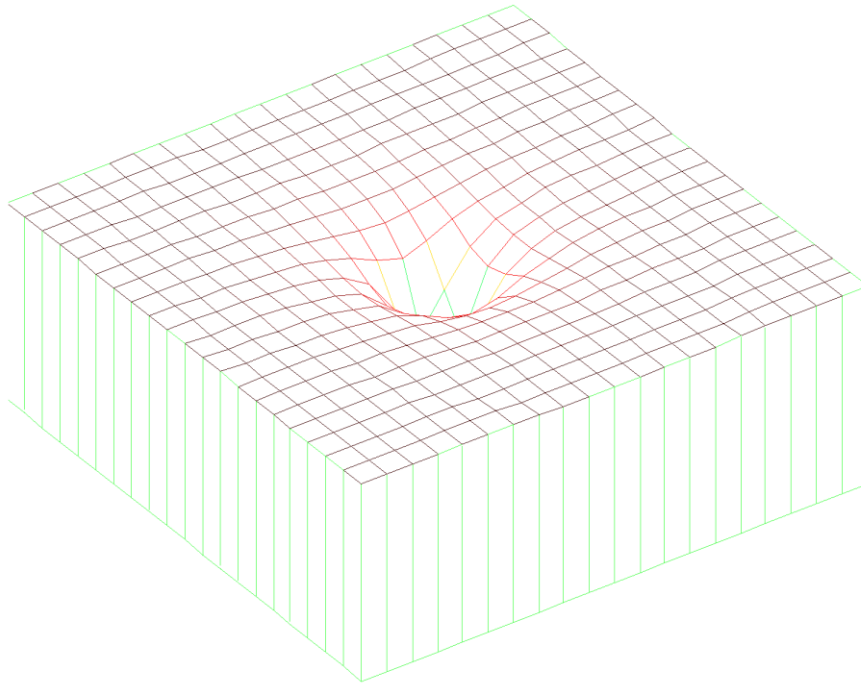
Γράφημα της συνάρτησης  $z = \sin x \cos y e^{-(x^2+y^2)^{0.5}}$  με χρήση πλέγματος

```
>> t = -4:0.3:4;
>> [x,y] = meshgrid(t,t);
>> z = sin(x).*cos(y).*exp(-(x.^2+y.^2).^0.5);
>> mesh(x,y,z), axis off
```



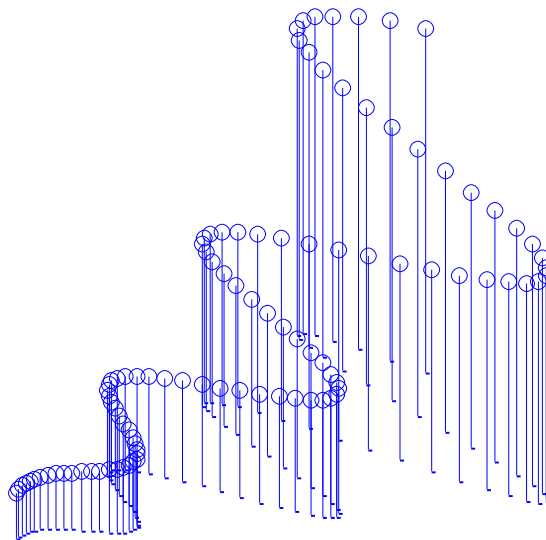
Γράφημα της συνάρτησης  $z = -0.1/(x^2 + y^2 + 1)$  με χρήση πλέγματος z

```
>> x = -3:0.3:3; y = x;
>> [x,y] = meshgrid(x,y);
>> z = -0.1./(x.^2+y.^2+.1);
>> meshz(z), axis off
>> view(-35, 60)
```



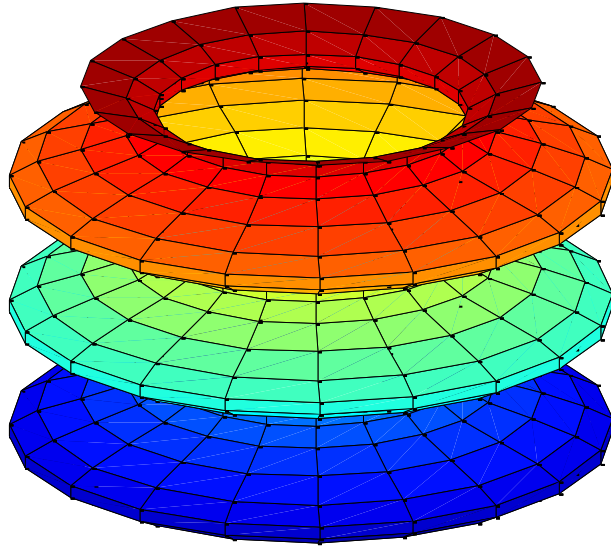
Διακριτό διάγραμμα των  $x = t$ ,  $y = t \cos t$ ,  $z = e^{0.1t}$  με χρήση stem3

```
>> t = 0:.2:20;
>> x = t; y = t.*cos(t);
>> z = exp(0.1*t);
>> stem3(x,y,z), axis off
```



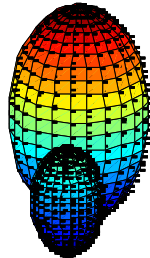
Κυλινδρική επιφάνεια δημιουργημένη από την  $p = 3 + \sin t$   
με την χρήση κυλινδρικής συνάρτησης

```
>> t = 0:pi/5:6*pi;
>> p = 3+sin(t);
>> cylinder(p), axis off
```



Γράφημα μίας μοναδιαίας σφαίρας και μίας κλιμακούμενης σφαίρας  
με την χρήση της συνάρτησης σφαίρας

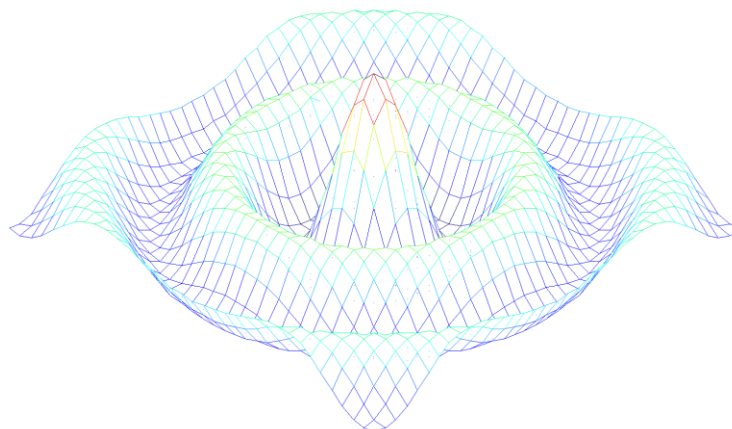
```
>> [x,y,z] = sphere(24);
>> subplot(2,2,2), surf(x-2, y-2, z-1);
>> hold on
>> surf(2*x, 2*y, 2*z);
>> axis off
```



Καρτεσιανό γράφημα για την συνάρτηση Bessel

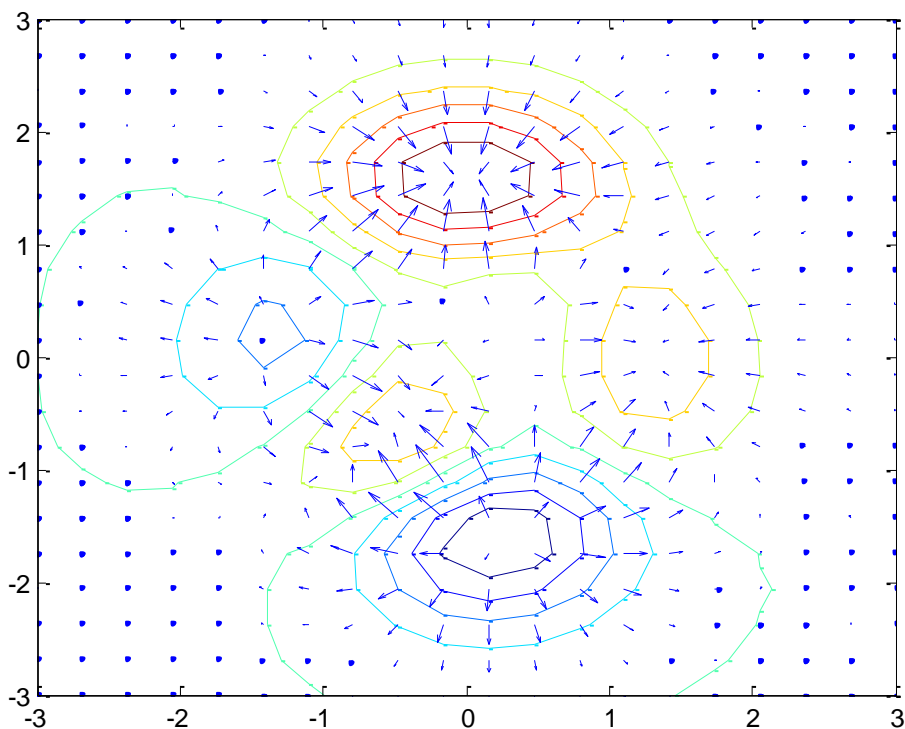
$$I_0[x^2 + y^2]^{1/2}, \quad -12 < x < 12, \quad -12 < y < 12.$$

```
>> [x,y] = meshgrid(-12:.7:12, -12:.7:12);
>> r = sqrt(x.^2+y.^2);
>> z = besselj(0,r);
>> m = [-45 60];
>> mesh(z, m)
>> axis off
```



Ισοϋψείς γραμμές και κατευθύνσεις των διανυσμάτων  
με την χρήση των συναρτήσεων contour και quiver

```
>> [x,y,z] = peaks(20);
>> [nx,ny] = gradient(z,1,1);
>> contour(x,y,z,10)
>> hold on
>> quiver(x,y,nx,ny)
```



Εικόνα 1.2: Γραφικές του παραδείγματος 1.17.

Πληροφορίες για πιο εξειδικευμένα 3-D γραφικά και συναρτήσεις που σχετίζονται με το χρώμα δίνονται με την εντολή **help specgraph**.

### 1.13. Χειρισμός γραφικών

Είναι συχνά επιθυμητό να είμαστε σε θέση να προσαρμόζουμε την γραφική μας έξοδο. Το MATLAB επιτρέπει τον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό, δίνοντας την δυνατότητα στον χρήστη να έχει τον πλήρη έλεγχο για τις λεπτομέρειες του γραφήματος. Το MATLAB παρέχει πολλές εντολές χαμηλού επιπέδου γνωστές και ως «χειρισμός γραφικών». Οι εντολές αυτές καθιστούν δυνατή την πρόσβαση σε μεμονωμένα αντικείμενα και τις ιδιότητές τους και μπορούν να αλλάξουν οποιαδήποτε ιδιότητα ενός αντικειμένου χωρίς να επηρεάζονται άλλες ιδιότητες ή αντικείμενα. Ο χειρισμός γραφικών παρέχει μία γραφική διεπαφή χρήστη (GUI), στην οποία το περιβάλλον χρήστη περιλαμβάνει κουμπιά και μενού.

### 1.14. Βρόχοι και λογικές δηλώσεις

Το MATLAB παρέχει βρόχους και λογικές δηλώσεις για τον προγραμματισμό, όπως **for**, **while** και **if**. Η εντολή **for** χρησιμοποιείται για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων μίας ή παραπάνω εντολών. Η σύνταξη της δομής επανάληψης **for** φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Η εντολή **while** χρησιμοποιείται για ακαθόριστο αριθμό επαναλήψεων μίας η παραπάνω εντολών. Η σύνταξη της δομής επανάληψης **while** φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Με την εντολή **if** μπορούμε να ελέγξουμε αν μία συνθήκη είναι αληθής ή ψευδής. Για να είναι αληθής (**true**) παίρνει τιμή 1 ή για ψευδής (**false**) παίρνει τιμή 0. Η σύνταξη της δομής ελέγχου **if** φαίνεται παρακάτω. Η εντολή **break** χρησιμοποιείται για να τερματίσει μία δομή επανάληψης (**for** ή **while**) προτού αυτή ολοκληρωθεί. Η εντολή **continue** τερματίζει ένα μόνο βήμα μία δομής επανάληψης (**for** ή **while**) και περνά τον έλεγχο στο επόμενο βήμα. Τέλος η εντολή **return** χρησιμοποιείται με συναρτήσεις (**functions**) και η κλήση της οδηγεί στον τερματισμό της συνάρτησης.

Πίνακας 1.8: Βρόχοι και λογικές δηλώσεις

<b>For</b> μετρητής=διάνυσμα	<b>while</b> (συνθήκη)	<b>If</b> συνθήκη1
Εντολές	Εντολές	Εντολές
<b>End</b>	<b>end</b>	<b>Elseif</b> συνθήκη2
		Εντολές
		<b>Else</b>
		Εντολές
		<b>End</b>



Το MATLAB έχει έξι τελεστές σύγκρισης και έξι λογικούς τελεστές. Όλα ορίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 1.9: Τελεστές

==	Ίσο
>	Μεγαλύτερο
<	Μικρότερο
~=	Διάφορο
>=	Μεγαλύτερο ή ίσο
<=	Μικρότερο ή ίσο

Μία λογική έκφραση μπορεί να είναι ένας λογικός έλεγχος. Μερικοί από τους λογικούς ελέγχους είναι οι ακόλουθοι:

Πίνακας 1.10: Λογικός έλεγχος

ΕΛΕΓΧΟΣ	ΑΛΗΘΗΣ (επιστρέφει 1) εάν:
Isequal (a, b)	Οι πίνακες a,b είναι ίσοι
Iempty (a)	Ο πίνακας a δεν έχει στοιχεία
Isnan (a)	Ο πίνακας a είναι NaN
Isinf (a)	Ο πίνακας a είναι Inf

Τέλος υπάρχουν και οι ακόλουθες λογικές πράξεις:

Πίνακας 1.11: Λογικές πράξεις

&	Λογικός τελεστής AND
	Λογικός τελεστής OR
~	Λογικός τελεστής NOT
Xor (συνθήκη)	Λογικός τελεστής αποκλειστικής διάζευξης XOR
All (συνθήκη)	Αληθής αν η συνθήκη ισχύει για όλα τα στοιχεία του πίνακα.
Any (συνθήκη)	Αληθής αν η συνθήκη ισχύει για κάποια από τα στοιχεία του πίνακα.

### Παράδειγμα 1.18

Ένα ορθογώνιο σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία σειρά αθροίσματος των αρμονικά συνδεδεμένων ημιτονοειδών ή συνημιτοειδών σημάτων. Θεωρούμε το επιμέρους άθροισμα των ακόλουθων περιοδικών σημάτων (σειρά Fourier).

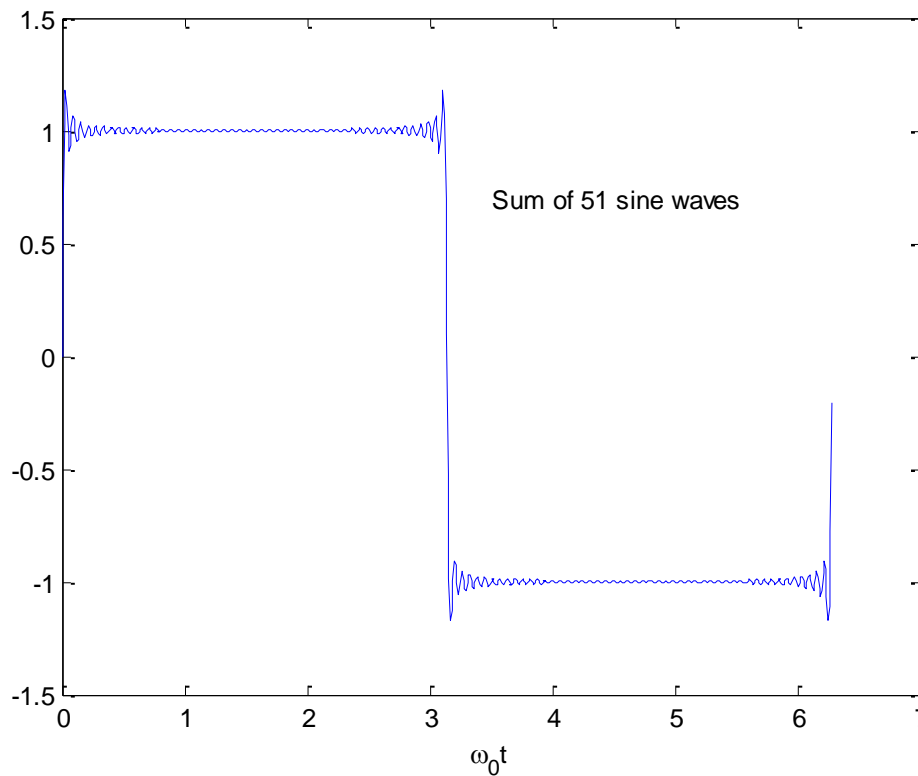
$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t$$

όπου n είναι ένας περιττός ακέραιος.

Οι ακόλουθες απλές δηλώσεις στο MATLAB κάνουν χρήση ενός βρόχου για την δημιουργία αυτού του αθροίσματος για κάθε ακέραιο που έχει δοθεί.

```
>> n = input('Enter an odd integer');
Enter an odd integer101
>> w_0t = 0:.01:2*pi;
>> x = 0;
>> for k = 1:2:n;
x = x + 1/k*sin(k*w_0t);
end
>> x = 4/pi*x;
>> plot(w_0t,x), xlabel('\omega_0t')
>> text(3.5,.7,['Sum of ', num2str((n+1)/2), ' sine waves'])
```

Το αποτέλεσμα για  $n = 101$  παριστάνεται γραφικά όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Γραφική του παραδείγματος 1.18.

### Παράδειγμα 1.19

Μία συνάρτηση δικτύου γνωστή ως συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται από την εξίσωση:

$$F(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

A) Γράφουμε μία συνάρτηση του MATLAB που ονομάζεται «**mybode**» για τον υπολογισμό του μέτρου και της γωνίας φάσης της παραπάνω συνάρτησης για  $s = j\omega$  όπου  $0 < \omega < \infty$ .

B) Γράφουμε ένα script το οποίο χρησιμοποιεί τη συνάρτηση «**mybode**» για τον υπολογισμό του μέτρου και της γωνίας φάσης της:

$$F(s) = \frac{1000(s+1)}{s^3 + 110s^2 + 1000s}$$

πάνω σε μία λογαριθμική κλίμακα για  $0.1 \leq \omega \leq 1000$ .

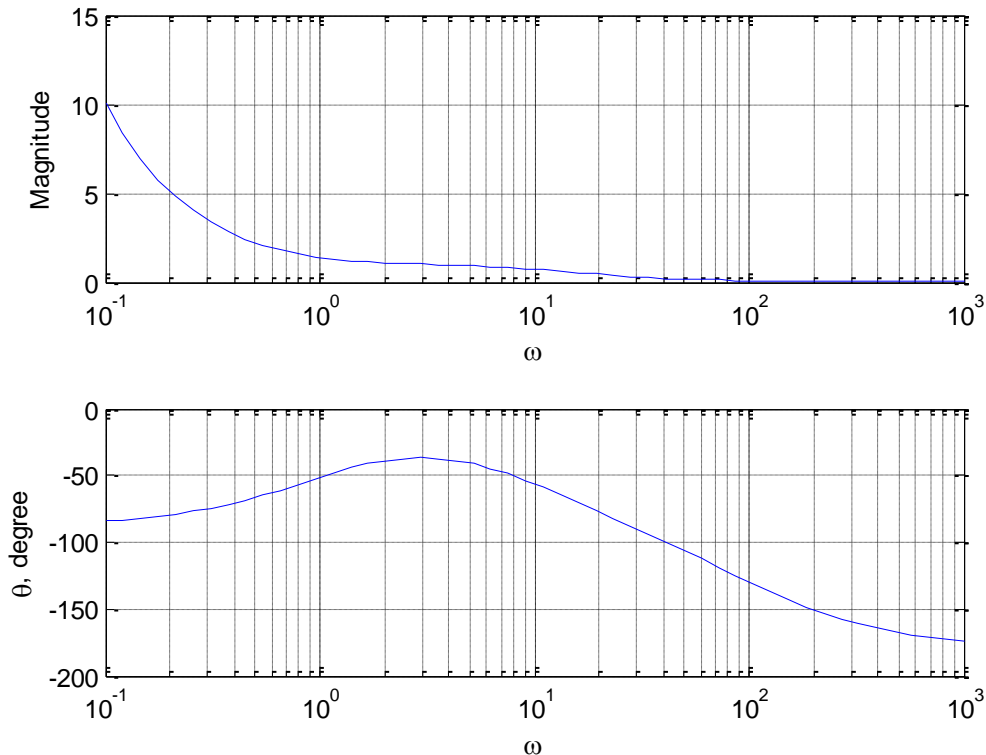
Η παρακάτω συνάρτηση κάνει χρήση δύο απλών βρόχων για το άθροισμα των όρων αριθμητή και παρονομαστή και την επιστροφή ενός πίνακα που περιέχει τα μέτρα και τις γωνίες φάσης πάνω στο καθορισμένο εύρος.

```
>> % The function mybode returns the magnitude and phase
% angle of the frequency response transfer function.
% num and den are the numerator and denominator
% coefficients in descending order. w is the frequency
% array in rad/sec.
>> function[mag,phase] = mybode(num,den,w);
m = length(num); n = length(den);
N = num(m); D = den(n);
S = j*w;
for k = 1:m-1
N = N+num(m-k)*s.^k;
end
for k = 1:n-1
D = D+den(n-k)*s.^k;
end
H = N./D;
Mag = abs(H);
phase = angle(H)*180/pi;
```

B) Το ακόλουθο script χρησιμοποιεί τη συνάρτηση «**mybode**» για τον υπολογισμό του μέτρου και της γωνία φάσης της δοθείσας συνάρτησης (B) πάνω σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων.

```
Num = [1000 1000]; den = [1 110 1000 1];
w = logspace(-1, 3); % logarithmic range from 0.1 to 1000
[mag,phase] = bode(num,den,w);
subplot(2,1,1), semilogx(w,mag), grid
xlabel('\omega'), ylabel('Magnitude')
subplot(2,1,2), semilogx(w, phase), grid
xlabel('\omega'), ylabel('\theta, degree')
```

Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Διαγράμματα πλάτους και γωνίας φάσης του παραδείγματος 1.19.

Το Control System Toolbox του MATLAB έχει μία συνάρτηση που ονομάζεται **bode** που λαμβάνει τα διαγράμματα απόκρισης συχνότητας μίας δοθείσας συνάρτησης μεταφοράς. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται στα κεφάλαια 4 και 7.

### Παράδειγμα 1.20

Ένα άλλο παράδειγμα των βρόχων είναι στην αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Η **μέθοδος του Euler** είναι η απλούστερη και η λιγότερο ακριβή όλων των αριθμητικών μεθόδων. Ας εξετάσουμε το ακόλουθο απλό μονοδιάστατο σύστημα πρώτης τάξης:

$$a_1 \frac{d_x}{d_t} + a_0 x = c$$

Ξαναγράφοντας την εξίσωση στη μορφή:

$$\frac{d_x}{d_t} = \frac{c}{a_1} - \frac{a_0}{a_1} x$$

Αν σε  $t_0$  η τιμή του  $x(t_0)$  που συμβολίζεται με  $x_0$  έχει δοθεί, τότε οι επόμενες τιμές του  $x$  μπορούν να καθοριστούν από την εξίσωση:

$$x_{k+1} = x_k + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x_k} \Delta t$$

Από την εφαρμογή του πιο πάνω αλγορίθμου μπορούμε διαδοχικά, να βρούμε τις προσεγγιστικές τιμές του  $\mathbf{x}(t)$  σε αρκετά σημεία από μία αρχική κατάσταση  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  σε μία τελική κατάσταση  $(t_f, \mathbf{x}_f)$ . Η μέθοδος του Euler υποθέτει ότι η παράγωγος είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta t$ . Μία βελτίωση μπορεί να επιτευχθεί με τον υπολογισμό της παραγώγου τόσο στην αρχή όσο και στο τέλος των διαστημάτων, και κατόπιν χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή τους. Ο αλγόριθμος αυτός είναι γνωστός ως η τροποποιημένη μέθοδος του Euler και δίνεται από την εξίσωση:

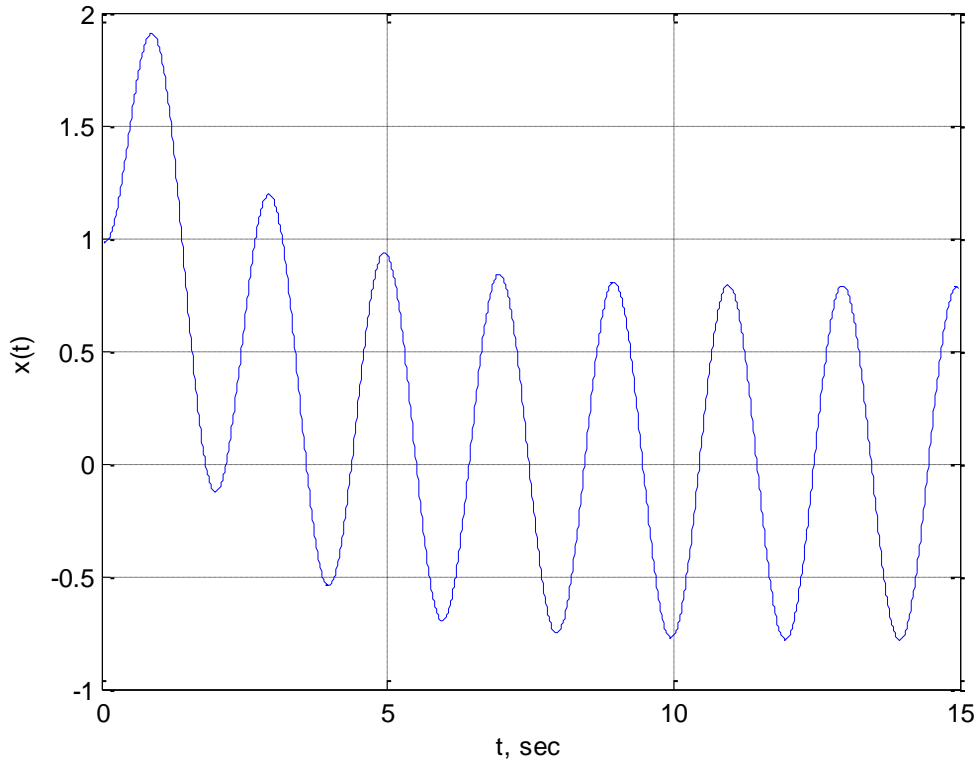
$$x_{k+1}^c = x_k + \left( \frac{\frac{dx}{dt} \Big|_{x_k} + \frac{dx}{dt} \Big|_{x_{k+1}^p}}{2} \right) \Delta t$$

Χρησιμοποιούμε τον παραπάνω αλγόριθμο για να βρούμε την αριθμητική λύση της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης και σχεδιάζουμε το αποτέλεσμα μέχρι ένα τελικό χρόνο  $t = 15$  δευτερόλεπτα με βήμα 0.01 δευτερόλεπτα.

$$4 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 10 \sin 8\pi t \text{ δίνεται, } x_0 = 1$$

```
>> a1 = 4; a0 = 2;
>> x0 = 1; t0 = 0; % Initial state
>> Dt = 0.01; tf = 15; % Step size and final time
>> t = []; x = []; % Initializing all the arrays
>> np = (tf - t0)/Dt;
>> t(1) = t0; x(1) = x0;
>> for k = 1:np
c = 10*sin(pi*t(k));
t(k+1) = t(k)+Dt;
Dx1 = c/a1 - a0/a1*x(k); % Derivative at the beginning
x(k+1) = x(k)+Dx1*Dt; % Predicted value
Dx2 = c/a1 - a0/a1*x(k+1); % Derivative at the end of
interval
Dxavg = (Dx1+Dx2)/2; % Average value of the two derivatives
x(k+1) = x(k) + Dxavg*Dt; % Corrected value
end
>> plot(t,x), grid
>> xlabel('t, sec'), ylabel('x(t)')
```

Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 1.20.

Το MATLAB παρέχει πολλές ισχυρές συναρτήσεις για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Δύο από τις συναρτήσεις που απασχολούν τις μεθόδους **Runge-Kutta-Fehlberg** είναι οι **ode23** και **ode45**, με βάση το ζευγάρι των τύπων **Fehlberg** δεύτερης και τρίτης τάξης για μεσαία ακρίβεια και το ζευγάρι τέταρτης και πέμπτης τάξης για μεγαλύτερη ακρίβεια. Αυτές οι συναρτήσεις περιγράφονται και χρησιμοποιούνται στο Κεφάλαιο 2.

Παράδειγμα 1.21

Θεωρούμε το σύστημα  $n$  εξισώσεων με  $n$  μεταβλητές:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2$$

... ..

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_n$$

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την επίλυση ταυτόχρονων μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων είναι η μέθοδος **Newton-Raphson**. Η μέθοδος του **Newton** είναι μία διαδικασία προσέγγισης που βασίζεται σε μία αρχική εκτίμηση για το άγνωστο και η χρήση επέκτασης της σειράς του Taylor δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + [\mathbf{J}^{(k)}]^{-1} \Delta \mathbf{C}^{(k)}$$

όπου το  $\mathbf{J}^{(k)}$  είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι οι μερικοί παράγωγοι του  $F^{(k)}$  και του  $\Delta C^{(k)}$ , και ενώνονται με την σχέση:

$$\Delta \mathbf{C}^{(k)} = \mathbf{C} - \mathbf{F}^{(k)}$$

Η διαδικασία επανάληψης ξεκινά με την παραδοχή προσεγγιστικής λύσης για κάθε μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ . Στο τέλος κάθε επανάληψης, οι υπολογισθείσες τιμές όλων των μεταβλητών έχουν ελεγχθεί με τις προηγούμενες τιμές. Μία άλλη επανάληψη θα πρέπει να εκτελεσθεί αν όλες οι αλλαγές στις μεταβλητές δεν βρίσκονται εντός της καθορισμένης ακρίβειας.

Ξεκινώντας με τις αρχικές τιμές,  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ , λύνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο Newton-Raphson.

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 11$$

$$x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_3 = 3$$

$$x_1 - x_1 x_3 + x_2 x_3 = 6$$

Λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους των παραπάνω συναρτήσεων καταλήγουμε στον πίνακα Jacobian:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 & -3 \\ 1 - x_3 & x_3 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ακόλουθες εντολές λύνουν τις εξισώσεις συστήματος που μας έχουν δοθεί από τον αλγόριθμο Newton-Raphson:

```
>> Dx = [10;10;10]; %Change in variable is set to a high
value
>> x = [1; 1; 1]; % Initial estimate
>> C = [11; 3; 6];
>> iter = 0; % Iteration counter
>> while max(abs(Dx))>=.0001 & iter<10; % Test for
convergence
iter = iter + 1 % No. of iterations
F = [x(1)^2-x(2)^2+x(3)^2 % Functions
x(1)*x(2)+x(2)^2-3*x(3)
x(1)-x(1)*x(3)+x(2)*x(3)];
DC = C - F % Residuals
J = [2*x(1) -2*x(2) 2*x(3) % Jacobian matrix
x(2) x(1)+2*x(2) -3
1-x(3) x(3) -x(1)+x(2)]
Dx = J\DC %Change in variable
x = x+Dx % Successive solution
end
```

Τα αποτελέσματα του προγράμματος για την πρώτη επανάληψη είναι τα εξής:

```

DC =
    10
     4
     5
J =
     2     -2     2
     1     3    -3
     0     1     0
Dx =
    4.7500
    5.0000
    5.2500
x =
    5.7500
    6.0000
    6.2500
    
```

Μετά από έξι επαναλήψεις, η λύση συγκλίνει σε  $x_1 = 2.0000$ ,  $x_2 = 3.0000$ , και  $x_3 = 4.0000$ .

### 1.15. Διάγραμμα προσομοίωσης

Οι διαφορικές εξισώσεις ενός ομαδοποιημένου γραμμικού δικτύου μπορούν να γραφτούν στη μορφή:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης είναι γνωστό ως εξίσωση κατάστασης του συστήματος, και  $x$  είναι το διάνυσμα κατάστασης. Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου του χώρου κατάστασης είναι ότι η ίδια η μορφή προσφέρεται εύκολα στις ψηφιακές και/ή υπολογιστικές αναλογικές μεθόδους επίλυσης. Περαιτέρω, η μέθοδος του χώρου κατάστασης μπορεί εύκολα να επεκταθεί στην ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων. Τα μέλη της εξίσωσης μπορούν να ληφθούν από μία διαφορική εξίσωση νιοστής τάξης ή απευθείας από το μοντέλο του συστήματος, εντοπίζοντας τις κατάλληλες μεταβλητές κατάστασης.

Για να φανεί ο τρόπος επιλογής μίας σειράς από μεταβλητές κατάστασης, εξετάζουμε το γραμμικό μοντέλο νιοστής τάξης που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t) \quad (1.2)$$



όπου  $y(t)$  είναι η έξοδος και  $u(t)$  είναι είσοδος του. Ένα σταθερό μοντέλο για αυτό το σύστημα δεν είναι μοναδικό αλλά βασίζεται στην επιλογή του σετ μεταβλητών κατάστασης. Ένα χρήσιμο σετ σταθερών μεταβλητών αναφέρεται ως «μεταβλητές φάσης» και ορίζεται ως εξής:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = y^{n-1}$$

Εκφράζουμε το  $\dot{x}_k = x_{k+1}$  για  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  και έπειτα λύνουμε την  $d^n y/dt^n$ , κάνουμε αντικατάσταση το  $y$  και τα παράγωγά του από τις αντίστοιχες μεταβλητές κατάστασης για να έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ή σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{1.4}$$

και η εξίσωση εξόδου είναι:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]x \tag{1.5}$$

Το M-file **ode2phv.m** που έχει αναπτυχθεί, μετατρέπει μία διαφορική εξίσωση  $n$ -τάξης σε μορφή μεταβλητής φάσης στον χώρο κατάστασης. Η συνάρτηση **[A,B,C] = ode2phv(ai,k)** επιστρέφει τα **A**, **B**, **C**, όπου **ai** είναι ένα διάνυσμα γραμμής που περιέχει συντελεστές της εξίσωσης σε φθίνουσα σειρά και **k** είναι ο συντελεστής της δεξιάς πλευράς.

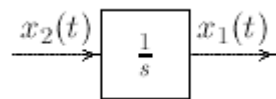
Η σχέση (1.3) δηλώνει ότι οι μεταβλητές κατάστασης καθορίζονται ολοκληρώνοντας την εξίσωση κατάστασης. Ένα διάγραμμα γνωστό ως διάγραμμα προσομοίωσης μπορεί να κατασκευαστεί για να μοντελοποιήσει τις δοθείσες διαφορικές εξισώσεις. Το βασικό στοιχείο του διαγράμματος προσομοίωσης είναι ο ολοκληρωτής. Η πρώτη εξίσωση στην σχέση (1.3) είναι η:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Με την ολοκλήρωση, έχουμε:

$$x_1 = \int x_2 dx$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα παρουσιάζεται με το ακόλουθο σύμβολο στο πεδίο του χρόνου. Το μπλοκ ολοκλήρωσης δηλώνεται με το σύμβολο  $\frac{1}{s}$ . Προσθέτοντας ένα ολοκληρωτή για τις υπόλοιπες στατικές μεταβλητές και ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση (1.3) μέσω ενός σημείου άθροισης και μονοπατιών ανατροφοδότησης, θα προκύψει ένα διάγραμμα προσομοίωσης.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

### 2.1. Διαφορικές εξισώσεις φυσικών συστημάτων

Η δυναμική απόδοση των φυσικών συστημάτων επιτυγχάνεται με την χρήση των φυσικών νόμων της μηχανικής, της ηλεκτρικής, των υγρών και θερμοδυναμικών συστημάτων. Γενικά μοντελοποιούμε τα φυσικά συστήματα με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές όπου αυτό μπορεί να επιτευχθεί. Άλλα μοντέλα μπορούν να προέρχονται από πιο γενικές διαφορικές εξισώσεις.

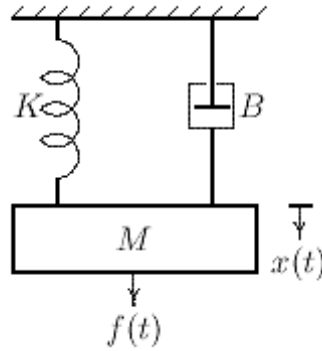
### 2.2. Αριθμητική λύση

Οι αναλυτικές λύσεις των γραμμικών χρονικά αναλλοίωτων εξισώσεων λαμβάνονται μέσω του μετασχηματισμού Laplace και του αντιστρόφου του. Υπάρχουν και άλλες τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιούν την μεταβατική κατάσταση του πίνακα  $\varphi(t)$  ώστε να έχουμε κάποια λύση. Αυτές οι αναλυτικές μέθοδοι είναι φυσιολογικά απαγορευμένες σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Οι αριθμητικές τεχνικές επιλύουν διαφορικές εξισώσεις ακριβώς στο πεδίο του χρόνου. Εφαρμόζονται όχι μόνο στα γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα αλλά εξίσου στα μη-γραμμικά και στις χρονομετάβλητες διαφορικές εξισώσεις. Η τιμή της συνάρτησης λαμβάνεται σε κάθε βήμα και είναι μία προσέγγιση της τιμής η οποία θα μπορούσε να έχει ληφθεί αναλυτικότερα. Ωστόσο μία αναλυτική λύση θα μπορούσε να είναι χρονοβόρα ή ακόμα και αδύνατο να βρεθεί.

Το MATLAB παρέχει δύο συναρτήσεις για αριθμητικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας την μέθοδο **Runge-Kutta**. Αυτές είναι οι **ode23**, **ode45** βασιζόμενες στο τρίτο ζεύγος τάξης των τύπων του **Fehlberg** για μέση ακρίβεια και τέταρτο, πέμπτο ζεύγος τάξης για υψηλή ακρίβεια. Η διαφορική εξίσωση νιοστής τάξης πρέπει να μετατρέπεται σε  $n$  1<sup>ης</sup> τάξης διαφορικές εξισώσεις και πρέπει να τοποθετηθεί σε ένα M-file που επιστρέφει τα παράγωγα των εξισώσεων. Τα παρακάτω παραδείγματα παρουσιάζουν την χρήση αυτών των συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε ένα τυπικό μηχανικό σύστημα (Εικόνα 2.1). Τρεις δυνάμεις επηρεάζουν την κίνηση της μάζας, την εφαρμοζόμενη δύναμη, την δύναμη τριβής, και την δύναμη του ελατηρίου.



Εικόνα 2.1: Μηχανικό σύστημα.

Εφαρμόζουμε τον νόμο κίνησης του Νεύτωνα, και η εξίσωση ισχύος του συστήματος είναι η εξής:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t)$$

Θέτοντας τα  $x_1 = x$  και  $x_2 = \frac{dx}{dt}$ , τότε:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{M} [f(t) - Bx_2 - Kx_1]$$

Με το σύστημα αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας, μία δύναμη 25 Newton εφαρμόζετε σε χρόνο  $t = 0$ . Υποθέτοντας ότι η μάζα είναι  $M = 1kg$ , ο συντελεστής τριβής  $B = 5 N/m/sec$ , και η σταθερά ελατηρίου  $K = 25 N/m$ . Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζονται σε ένα αρχείο M-file **mechsys.m** ως εξής:

```
function xdot = mechsys(t,x); % returns the state derivatives
F = 25; % Step input
M = 1; B = 5; K = 25;
xdot = [x(2) ; 1/M*( F - B*x(2) - K*x(1) ) ];
```

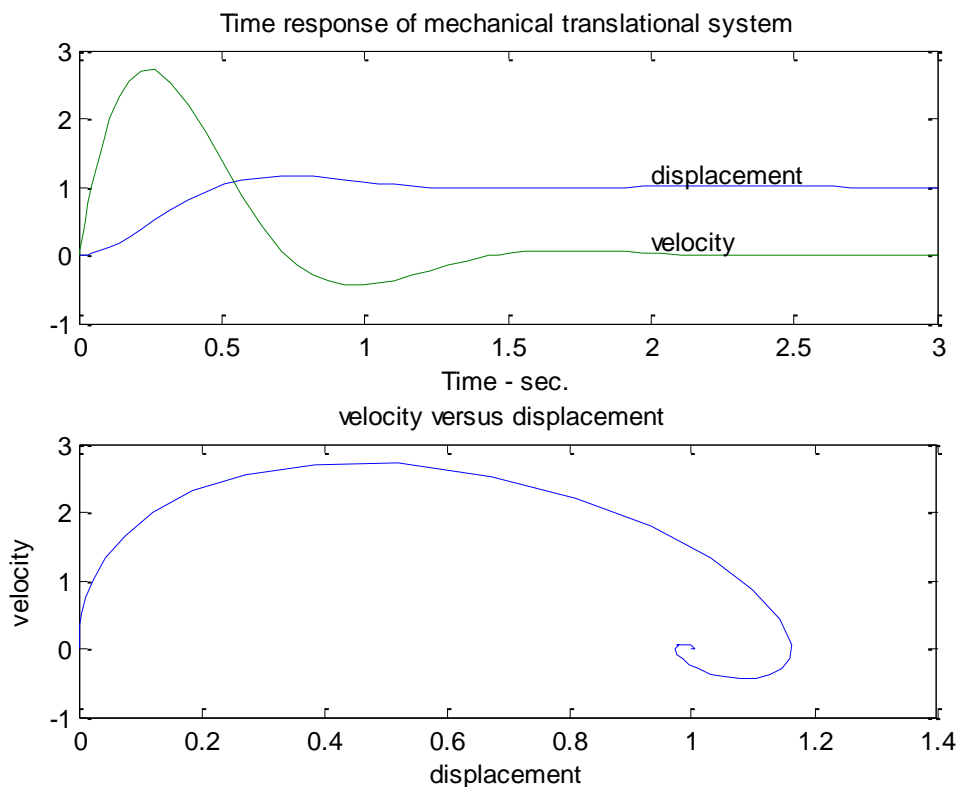
Το ακόλουθο M-file, **exam2\_1.m** χρησιμοποιεί το **ode23** για την προσομοίωση του συστήματος πάνω από ένα διάστημα της τάξης των 0 – 3 sec., με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

```

tspan = [0, 3] ; % time interval
x0 = [0, 0]; % initial conditions
[t,x] = ode23('mechsys',tspan,x0);
subplot(2,1,1),plot(t,x)
title('Time response of mechanical translational system')
xlabel('Time - sec.')
text(2,1.2,'displacement')
text(2,.2,'velocity')
d = x(:,1); v = x(:,2);
subplot(2,1,2), plot(d,v)
title('velocity versus displacement ')
xlabel('displacement')
ylabel('velocity')
subplot(111)

```

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

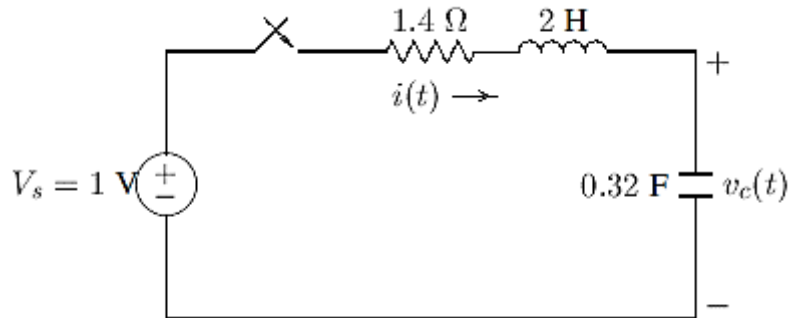


Σχήμα 2.1: Απόκριση του μηχανικού συστήματος του παραδείγματος 2.1.

### Παράδειγμα 2.2

Τα στοιχεία του κυκλώματος (Εικόνα 2.2) είναι  $R = 1.4\Omega$ ,  $L = 2H$ , και  $C = 0.32F$ , η αρχική τιμή ρεύματος του πηνίου είναι μηδέν, και η αρχική τιμή ρεύματος του πυκνωτή είναι 5 volt. Μία βηματική τάση της τάξης του 1 volt εφαρμόζεται σε χρόνο  $t = 0$ .

Καθορίζονται τα  $i(t)$ ,  $u(t)$  στο εύρος  $0 < t < 15$  sec. Επίσης λαμβάνουμε ένα διάγραμμα του ρεύματος συγκριτικά με το ρεύμα του πυκνωτή.



Εικόνα 2.2: Κύκλωμα RLC για παράδειγμα λύσης στο πεδίο του χρόνου.

Εφαρμόζουμε τον Νόμο Ρευμάτων του Κίρκοφ:

$$R_i + L \frac{di}{dt} + u_c = V_s$$

και

$$i = C \frac{dv_c}{dt}$$

Θέτουμε:

$$x_1 = u_c$$

$$x_2 = i$$

Τότε:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2$$

και

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (V_s - x_1 - R x_2)$$

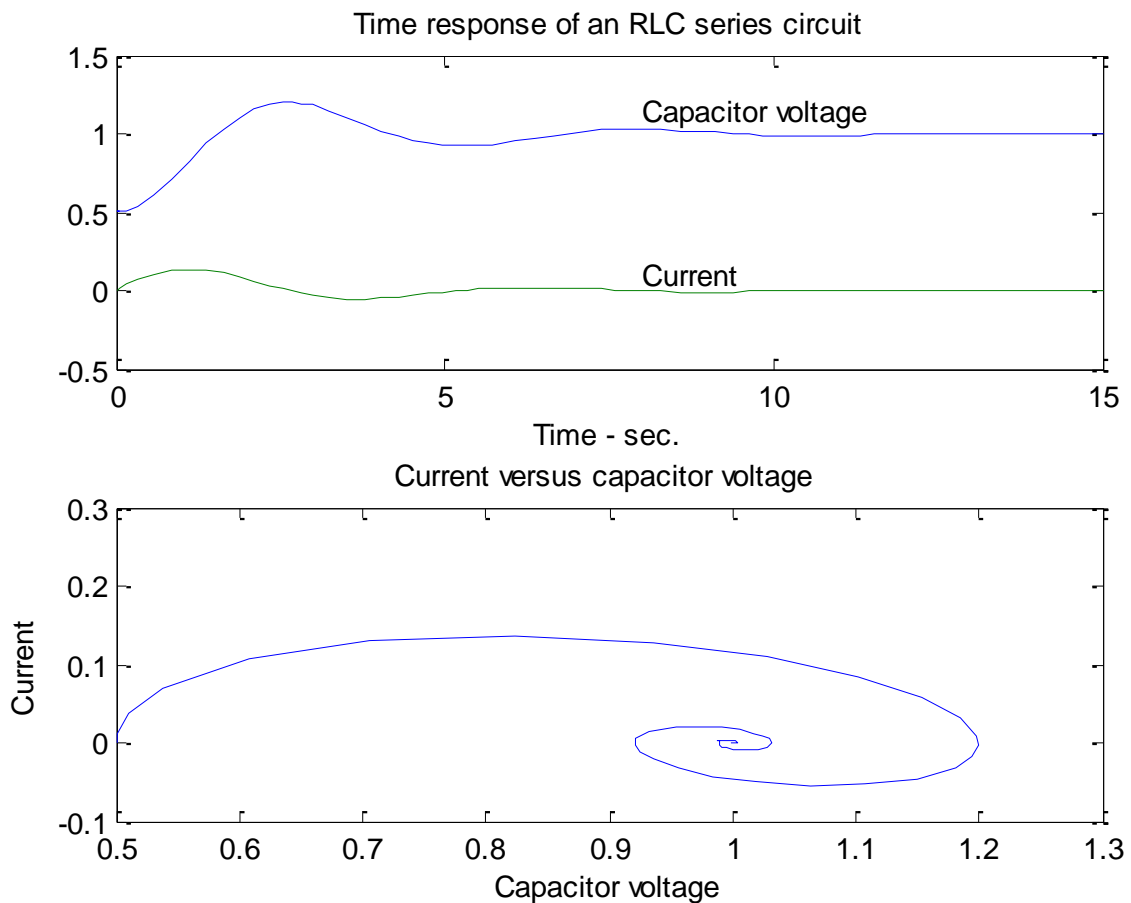
Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζονται στο M-file **electsys.m** ως εξής:

```
function xdot = electsys(t,x);
% returns the state derivatives
V = 1; % Step input
R = 1.4; L = 2; C = 0.32;
xdot = [x(2)/C; 1/L*(V - x(1) - R*x(2))];
```

Το ακόλουθο M-file, **exam2\_2.m** χρησιμοποιεί το **ode23** για την προσομοίωση του συστήματος πάνω από ένα διάστημα της τάξης των 0 - 15 sec.

```
x0 = [0.5, 0]; % initial conditions
tspan = [0,15]; % time interval
[t,x] = ode23('electsys',tspan,x0);
subplot(2,1,1),plot(t,x)
title('Time response of an RLC series circuit')
xlabel('Time - sec.')
text(8,1.15, 'Capacitor voltage')
text(8, .1, 'Current')
vc = x(:,1); i = x(:,2);
subplot(2,1,2),plot(vc,i)
title('Current versus capacitor voltage ')
xlabel('Capacitor voltage')
ylabel('Current'), subplot(111)
```

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο Σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Απόκριση του κυκλώματος RLC του παραδείγματος 2.2.

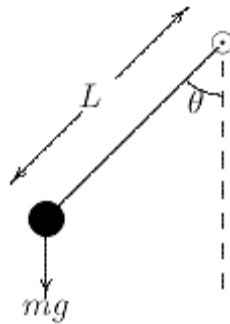
### 2.3. Μη γραμμικά συστήματα

Μία μεγάλη πλειοψηφία των φυσικών συστημάτων είναι γραμμικά μέσα σε κάποιο εύρος των μεταβλητών. Παρόλα αυτά, όλα τα συστήματα τελικά γίνονται

μη γραμμικά καθώς τα εύρη αυξάνονται χωρίς όριο. Για τα μη γραμμικά συστήματα, η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει. Τα **ode23**, **ode45** απλοποιούν το έργο της λύσης του συνόλου των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

### Παράδειγμα 2.3

Θεωρούμε ένα απλό σύστημα εκκρεμούς που φαίνεται στην Εικόνα 2.3 όπου το βάρος  $W = mg$  κρέμεται από βάση στήριξης με μία αβαρή ράβδο μήκους  $L$  μέτρων. Ενώ συνήθως προσεγγίζεται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση, το σύστημα είναι μη-γραμμικό με ιξώδη απόσβεση και συντελεστή απόσβεσης  $B$  **kg/m/sec**.



Εικόνα 2.3: Ταλάντωση εκκρεμούς.

Εάν  $\theta$  σε ακτίνια είναι η γωνία εκτροπής της ράβδου, η ταχύτητα του βάρους στο τέλος θα είναι  $\Delta\theta$  και η εφαπτομενική δύναμη που δρα για την αύξηση της γωνίας  $\theta$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$F_T = -W \sin \theta - BL\dot{\theta}$$

Από τον νόμο του Νεύτωνα:

$$F_T = mL\ddot{\theta}$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις για την δύναμη έχουμε:

$$mL\ddot{\theta} + BL\dot{\theta} + W \sin \theta = 0$$

Θέτουμε  $x_1 = \theta$  και  $x_2 = \dot{\theta}$  (γωνιακή ταχύτητα), τότε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B}{m}x_2 - \frac{W}{mL}\sin x_1 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζονται στο M-file **electsys.m** ως εξής:

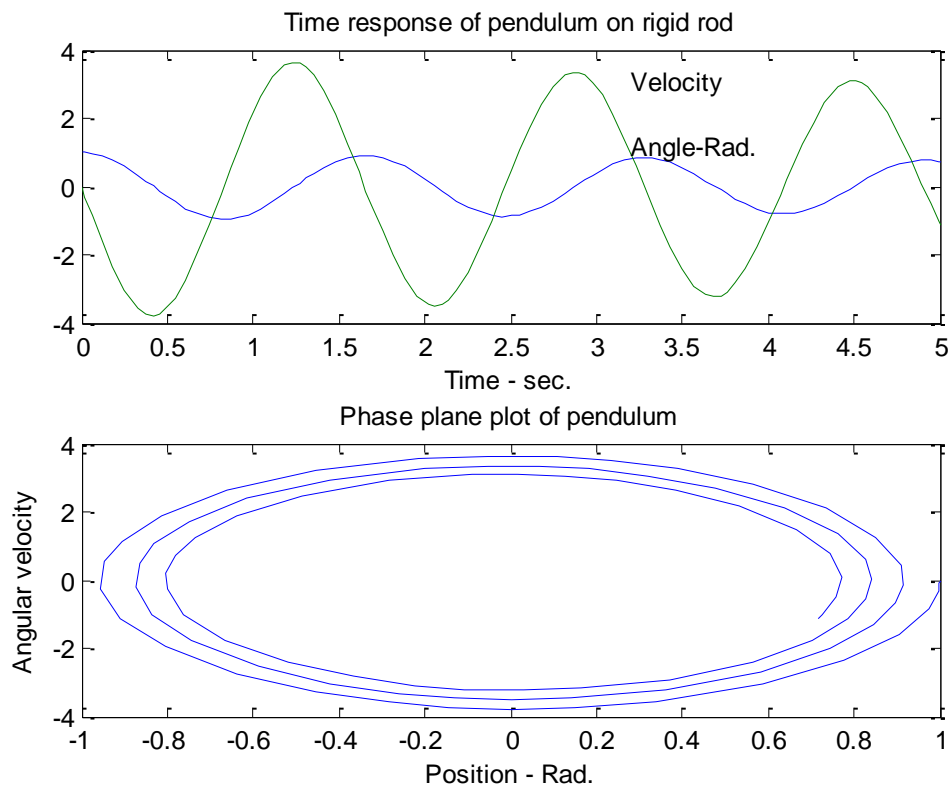


```
function xdot = pendulum(t,x);%returns the state derivatives
W = 2; L = .6; B = 0.02; g = 9.81; m = W/g;
xdot = [x(2) ; -B/m*x(2)-W/(m*L)*sin(x(1))];
```

Το ακόλουθο M-file, **exam2\_3.m** χρησιμοποιεί το **ode23** για την προσομοίωση του συστήματος πάνω από ένα διάστημα της τάξης των 0 - 5 sec.

```
tspan = [0,5]; % time interval
x0 = [1,0]; % initial conditions
[t,x] = ode23('pendulum',tspan,x0);
subplot(2,1,1),plot(t,x)
title('Time response of pendulum on rigid rod')
xlabel('Time - sec.')
text(3.2,3.1,'Velocity'), text(3.2,1.2,'Angle-Rad.')
th = x(:,1); w = x(:,2);
subplot(2,1,2),plot(th, w)
title('Phase plane plot of pendulum')
xlabel('Position - Rad. '), ylabel('Angular velocity')
```

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Απόκριση του εκκρεμούς που περιγράφεται στο παράδειγμα 2.3.

## 2.4. Γραμμικοποίηση

Τα μη-γραμμικά συστήματα συχνά γραμμικοποιούνται λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες μικρών σημάτων. Οι μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις περιγράφουν την κίνηση του εκκρεμούς στο παράδειγμα 2.3 το οποίο μπορεί να γραμμικοποιηθεί αν η αρχική γωνία εκτροπής είναι μικρή. Όταν  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ , η εξίσωση του εκκρεμούς μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$mL(\ddot{\theta} + \Delta\ddot{\theta}) + BL(\dot{\theta} + \Delta\dot{\theta}) + W \sin(\theta + \Delta\theta) = 0 \quad (2.1)$$

Για μικρό  $\Delta\theta$  θεωρώντας  $\Delta\theta \approx 0$ ,  $\cos \Delta\theta \approx 1$  και επεκτείνοντας το ημίτονο έχουμε την ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$mL\Delta\ddot{\theta} + BL\Delta\dot{\theta} + W\Delta\theta = 0 \quad (2.2)$$

Αυτή η άσκηση μας δείχνει ότι η παραπάνω γραμμικοποιημένη εξίσωση θα επιφέρει προσεγγιστικά την ίδια απόκριση όσο το  $\Delta\theta$  είναι μικρό.

## 2.5. Συνάρτηση μεταφοράς

Κατά τη μελέτη των συστημάτων έλεγχου χρησιμοποιούνται συχνά οι **συναρτήσεις μεταφοράς** (transfer functions) που χαρακτηρίζουν τις σχέσεις εισόδου-εξόδου των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων.

Η **Συνάρτηση μεταφοράς** ορίζεται ως το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου του, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και αντιστοιχεί σε μία σχέση με την οποία περιγράφεται η δυναμική του συστήματος υπό εξέταση. Το πολυώνυμο του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος και η μελέτη του μας δίνει την δυνατότητα να ελέγξουμε ορισμένες προδιαγραφές του συστήματος όπως είναι η ευστάθεια. Θέτοντας το πολυώνυμο του παρανομαστή ίσο με μηδέν, σχηματίζεται η λεγόμενη **χαρακτηριστική εξίσωση**, επειδή οι ρίζες της προσδιορίζουν τη συμπεριφορά της απόκρισης του συστήματος. Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται **μηδενικά** (zeros), ενώ οι ρίζες του παρανομαστή **πόλοι** (poles). Ο παράγοντας  $K$  ονομάζεται σταθερά ενίσχυσης ή κέρδος και είναι πραγματικός αριθμός (σε αντίθεση με τις ρίζες και τους πόλους που μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί). Οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι επίσης χρήσιμες στην μοντελοποίηση υποσυστημάτων σχηματίζοντας ένα block diagram αναπαράστασης τα λεγόμενο **δομικό διάγραμμα** ή **λειτουργικό διάγραμμα**.

Σε αυτήν την ενότητα, πολλαπλά παραδείγματα δείχνουν την χρησιμότητα του MATLAB στην εύρεση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, των πόλων-μηδενικών μίας συνάρτησης μεταφοράς, την ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων, και την μετατροπή των πόλων και μηδενικών σε συνάρτηση μεταφοράς.

Η συνάρτηση **sys = tf(num,den)** του *Control System Toolbox* δημιουργεί μία συνάρτηση μεταφοράς συνεχούς χρόνου. Έχουμε το εξής παράδειγμα:

```
>> num = [1 4]; Den = [1 2 10];
>> sys = tf(num,den)
```

```
Transfer function:
      s + 4
-----
s^2 + 2 s + 10
```

### 2.5.1. Πολυωνυμικές ρίζες και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Αν **p** είναι ένα διάνυσμα γραμμής που περιέχει τους συντελεστές ενός πολυωνύμου, τότε η εντολή **roots(p)** επιστρέφει ένα διάνυσμα στήλης του οποίου τα στοιχεία είναι οι ρίζες του πολυωνύμου. Αν **r** είναι ένα διάνυσμα στήλης που περιέχει τις ρίζες ενός πολυωνύμου τότε η εντολή **poly(r)** επιστρέφει ένα διάνυσμα γραμμής των οποίων τα στοιχεία είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου.

#### Παράδειγμα 2.4

Εύρεση των ριζών του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$s^6 + 9s^5 + 31.25s^4 + 61.25s^3 + 67.75s^2 + 14.75s + 15$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου εισάγονται κατά την φθίνουσα σειρά των δυνάμεων.

```
>> p = [ 1 9 31.25 61.25 67.75 14.75 15 ]
p =
      1.0000      9.0000     31.2500     61.2500     67.7500     14.7500
    15.0000
>> r = roots(p)
r =
    -4.0000
    -3.0000
    -1.0000 + 2.0000i
    -1.0000 - 2.0000i
     -0.0000 + 0.5000i
     -0.0000 - 0.5000i
```

Παράδειγμα 2.5

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι  $-1, -2, -3 \pm j4$ . Προσδιορίζουμε την πολυωνυμική εξίσωση. Για να εισάγουμε ένα μιγαδικό αριθμό, είναι πρώτα απαραίτητο να δημιουργήσουμε μία μιγαδική μονάδα. Οι ρίζες στη συνέχεια θα εισαχθούν σε ένα διάνυσμα στήλης. Η πολυωνυμική εξίσωση βρίσκεται χρησιμοποιώντας την εντολή **poly** ως εξής:

```
>> i = sqrt(-1)
i =
    0 + 1.0000i
>> r = [-1 -2 -3+4*i -3-4*i ]
r =
   -1.0000           -2.0000           -3.0000 + 4.0000i
   -3.0000 - 4.0000i
>> p = poly(r)
p =
    1     9    45    87    50
```

Παράδειγμα 2.6

Προσδιορισμός των ριζών του ακόλουθου πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα βρίσκεται από την εντολή **poly**, και οι ρίζες αυτής της εξίσωσης βρίσκονται από την εντολή **roots**.

```
>> A = [ 0 1 -1; -6 -11 6; -6 -11 5];
>> p = poly(A)
p =
    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
>> r = roots(p)
r =
   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000
```

**2.5.2. Πόλοι και μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς**

Η συνάρτηση την όποια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να φέρουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε μορφή πόλων-μηδενικών είναι η συνάρτηση **tf2zp**. Συντάσσεται με την μορφή **[z,p,k] = tf2zp(num,den)** και επιστρέφει τα μηδενικά **z<sub>i</sub>**, τους πόλους **p<sub>i</sub>** και το κέρδος **K** της συνάρτησης μεταφοράς.

Παράδειγμα 2.7

Εύρεση των πόλων και μηδενικών της ακόλουθης συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{s^3 + 11s^2 + 30s}{s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50}$$

```
>> num = [ 1 11 30 0];
>> den = [ 1 9 45 87 50];
>> [z,p,k] = tf2zp(num,den)
z =
     0
    -6.0000
    -5.0000
p =
    -3.0000 + 4.0000i
    -3.0000 - 4.0000i
    -2.0000
    -1.0000
k =
     1
```

Επομένως:

$$H(s) = \frac{s(s+5)(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+3+j4)(s+3-j4)}$$

### Παράδειγμα 2.8

Ένα σύστημα έχει μηδενικά σε -6, -5 και 0, πόλους σε  $-3 \pm j4$ ,  $-2$ ,  $-1$ , και κέρδος 1. Προσδιορισμός της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

```
>> z = [-6; -5; 0]; k = 1;
>> i = sqrt(-1);
>> p = [-3+4*i; -3-4*i; -2; -1];
>> [num,den] = zp2tf(z,p,k)
num =
     0     1    11    30     0
den =
     1     9    45    87    50
>>H=tf(num,den)
```

επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{s^3 + 11s^2 + 30s}{s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50}$$

### 2.5.3. Ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων

Το Matlab μας παρέχει μία έτοιμη συνάρτηση που μετατρέπει ένα σήμα από ρητή μορφή σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων. Η συνάρτηση αυτή είναι η **residue**. Η πλήρης σύνταξή της είναι **[R,P,K] = residue(B,A)**. Το B είναι το δiάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του αριθμητή ενώ το A

είναι το διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του πολυωνύμου του παρανομαστή. Επομένως εάν έχουμε ένα σήμα ρητής μορφής:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.3)$$

Ορίζοντας τα  $\mathbf{B} = [b_m, \dots, b_0]$  και  $\mathbf{A} = [a_m, \dots, a_0]$  και δίνοντας την εντολή  $[\mathbf{R}, \mathbf{P}, \mathbf{K}] = \text{residue}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$  το σήμα  $\mathbf{X}(s)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$X(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + K,$$

όπου θα έχουμε  $\mathbf{R} = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ ,  $\mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ , και  $\mathbf{K}$  πιθανόν ένα υπόλοιπο που μπορεί να υπάρχει.

### Παράδειγμα 2.9

Αναπτύσσουμε σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων το σήμα:

$$F(s) = \frac{2s^3 + 9s + 1}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$$

```
>> num = [ 2 0 9 1];
>> den = [ 1 1 4 4];
>> [res, poles, k] = residue(num, den)
res =
    0.0000 - 0.2500i
    0.0000 + 0.2500i
   -2.0000
poles =
   -0.0000 + 2.0000i
   -0.0000 - 2.0000i
   -1.0000
k =
    2
```

Ως εκ τούτου, η ανάπτυξη σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων είναι:

$$2 + \frac{-2}{s + 1} + \frac{j0.25}{s + j2} + \frac{-j0.25}{s - j2} = 2 + \frac{-2}{s + 1} + \frac{1}{s^2 + 4}$$

Η εντολή  $[\text{num}, \text{den}] = \text{residue}(\text{res}, \text{poles}, \mathbf{K})$  μετατρέπει το πολυώνυμο  $\mathbf{P}(s)/\mathbf{Q}(s)$  σε μορφή αθροίσματος μερικών κλασμάτων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Οι διαφορικές εξισώσεις ενός γραμμικού δικτύου μπορούν να γραφούν στην εξής μορφή:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

Αυτό το σύστημα 1<sup>ης</sup> τάξης διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ως η σταθερή εξίσωση του συστήματος και το  $x$  είναι το διάνυσμα κατάστασης. Το πλεονέκτημα της μεθόδου χώρου κατάστασης είναι ότι οδηγούμαστε εύκολα σε ψηφιακές-αναλογικές υπολογιστικές μεθόδους λύσεων. Επιπρόσθετα, η μέθοδος χώρου κατάστασης μπορεί να επεκταθεί στην ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων.

### 3.1. Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

Για να φανεί με ποιον τρόπο επιλέγουμε ένα σύνολο μεταβλητών κατάστασης, θεωρούμε ένα γραμμικό μοντέλο  $n$ -τάξης που περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t) \quad (3.2)$$

Όπου  $y(t)$  είναι η έξοδος και  $u(t)$  η είσοδος. Ένα σταθερό μοντέλο για αυτό το σύστημα δεν είναι μοναδικό αλλά βασίζεται στην επιλογή του σετ μεταβλητών κατάστασης. Ένα χρήσιμο σετ σταθερών μεταβλητών αναφέρεται ως «μεταβλητές φάσης» και ορίζεται ως εξής:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_n = y^{n-1}$$

Εκφράζουμε το  $\dot{x}_k = x_{k+1}$  για  $k = 1, 2, \dots, n-1$  και έπειτα λύνουμε την  $d^n y/dt^n$ , κάνουμε αντικατάσταση το  $y$  και τα παράγωγά του από τις αντίστοιχες μεταβλητές κατάστασης για να έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ή σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.4)$$

και η εξίσωση εξόδου είναι:

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]x \quad (3.5)$$

### Παράδειγμα 3.1

Λαμβάνουμε την εξίσωση κατάστασης σε κανονική μορφή φάσης για την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10u(t)$$

Το M-file **ode2phv.m** έχει αναπτυχθεί, το οποίο μετατρέπει μία διαφορική εξίσωση n-τάξης σε κανονική μορφή στον χώρο κατάστασης. Η συνάρτηση **[A,B,C] = ode2phv(ai,k)** επιστρέφει τα **A**, **B**, **C**, όπου **ai** είναι ένα διάνυσμα γραμμής που περιέχει τους συντελεστές της εξίσωσης σε φθίνουσα σειρά και **k** είναι ο συντελεστής της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης.

```
>> ai = [ 2 4 6 8];
>> k = 10;
>> [A,B,C] = ode2phv(ai,k)
A =
     0     1     0
     0     0     1
    -4    -3    -2
B =
     0
     0
     5
C =
     1     0     0
```

### 3.2. Εξισώσεις ηλεκτρικών δικτύων

Οι μεταβλητές κατάστασης συνδέονται άμεσα με τα στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας ενός συστήματος. Φαίνεται επομένως ότι το νούμερο των ανεξάρτητων αρχικών συνθηκών είναι ίσο με τον αριθμό των στοιχείων αποθήκευσης ενέργειας. Αυτό ισχύει με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει κανένας βρόχος που να περιλαμβάνει μόνο πυκνωτές και πηγές τάσης και δεν υπάρχει διαχωριστικός κόμβος που να περιλαμβάνει μόνο επαγωγική και πηγή τάσης. Γενικά αν υπάρχουν  $n_c$  βρόχοι και  $n_L$  διαχωριστικά σύνολα, ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης είναι:

$$n = e_L + e_c - n_c - n_L \quad (3.6)$$



όπου:

$e_L$  = αριθμός πηνίων

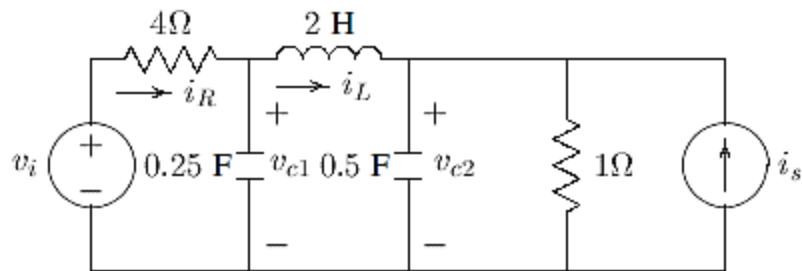
$e_C$  = αριθμός πυκνωτών

$n_C$  = αριθμός βρόχων όλων των πηγών τάσης και χωρητικότητας

$n_L$  = αριθμός όλων των κομμένων συνόλων των πηγών τάσης και επαγωγής

Παράδειγμα 3.2

Γράφουμε την εξίσωση κατάστασης για το δίκτυο της (Εικόνα 3.1).



Εικόνα 3.1: Κύκλωμα του παραδείγματος 3.2.

Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης ως τωρινές μέσα από τα πηνία και την τάση στα άκρα των πυκνωτών. Γράφουμε τις εξισώσεις κόμβων συμπεριλαμβάνοντας τους πυκνωτές και την εξίσωση βρόχου που περιέχει ένα πηνίο. Οι μεταβλητές κατάστασης είναι  $u_{c1}$ ,  $u_{c2}$ ,  $i_L$ . Οι εξισώσεις κόμβων είναι:

$$0.25 \frac{du_{c1}}{dt} + i_L - i_R = 0$$

όπου:

$$i_R = \frac{u_i - u_{c1}}{4}$$

$$0.5 \frac{du_{c2}}{dt} - i_L + \frac{u_{c2}}{1} - i_s = 0$$

και η εξίσωση βρόχου είναι:

$$2 \frac{di_L}{dt} + u_{c2} - u_{c2} = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ i_s \end{bmatrix}$$

### 3.3. Μετατροπή συνάρτησης μεταφοράς σε μοντέλο χώρου κατάστασης

Το *Control System Toolbox* περιέχει ένα σετ από συναρτήσεις για την μετατροπή μοντέλου. Η συνάρτηση  $[A,B,C,D] = \text{tf2ss}(\text{num},\text{den})$  μετατρέπει το σύστημα από την μορφή συνάρτησης μεταφοράς στο μοντέλο χώρου κατάστασης.

#### Παράδειγμα 3.3

Εύρεση της αναπαράστασης στον χώρο κατάστασης της ακόλουθης συνάρτησης μεταφοράς.

```
>> num = [ 1 7 2]; den = [ 1 9 26 24 ];
>> [A,B,C,D] = tf2ss(num,den)
A =
    -9    -26    -24
     1     0     0
     0     1     0
B =
     1
     0
     0
C =
     1     7     2
D =
     0
```

### 3.4. Μετατροπή από το μοντέλο χώρου κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς

Δίνονται οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.7)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.8)$$

Κάνουμε μετασχηματισμό Laplace:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

ή

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.9)$$

Η συνάρτηση  $[\text{num},\text{den}] = \text{ss2tf}(A,B,C,D,i)$  μετατρέπει την εξίσωση κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς για την  $i$  είσοδο.

Παράδειγμα 3.4

Ένα σύστημα περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις στον χώρο κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s) = Y(s)/X(s)$ .

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -1 -2 -3]; B = [10; 0; 0];
>> C = [1 0 0]; D = [0];
>> [num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1)
num =
      0    10.0000    30.0000    20.0000
den =
    1.0000    3.0000    2.0000    1.0000
```

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 3s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Επίσης, η συνάρτηση  $[z,p] = \text{ss2tf}(A,B,C,D,1)$  μετατρέπει την εξίσωση κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς.

**3.5. Ομοιότητα μετασχηματισμών**

**3.5.1. Διαγωνιοποίηση ενός πίνακα A**

Ένας από τους λόγους για τους οποίους διαγωνιοποιούμε έναν πίνακα A είναι ότι όλες οι διακριτές ιδιοτιμές βρίσκονται πάνω στην κεντρική διαγώνιο. Προκύπτει ότι η μεταβατική κατάσταση του πίνακα είναι διαγώνιος με ορίσματα  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ .

Δοθέντος ενός γραμμικού συστήματος  $\dot{x} = Ax + Bu(t)$  όπου το A έχει διακριτές ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  θέλουμε να βρούμε έναν ομαλό πίνακα P έτσι ώστε ο μετασχηματισμένος πίνακας P:

$$x(t) = Py(t) \tag{3.10}$$

να μετατρέπει την παραπάνω εξίσωση κατάστασης σε κανονική μορφή:

$$\dot{y} = ay + bu(t) \tag{3.11}$$

με το a να δίδεται από τον διαγώνιο πίνακα:

$$a = P^{-1}AP$$

$$b = P^{-1}B$$

Γενικά υπάρχουν πολλοί τρόποι για να βρούμε τα P. Το P μπορεί να σχηματιστεί από την χρήση των ιδιοδιανυσμάτων του A.

Παράδειγμα 3.5

Δίδεται σύστημα που αντιπροσωπεύεται στον χώρο κατάστασης από την εξής εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

Εύρεση του μετασχηματισμού του πίνακα **P** μετατροπής της παραπάνω εξίσωσης κατάστασης σε κανονική μορφή.

```
>> A = [0 1 -1; -6 -11 6; -6 -11 5]; B = [0; 0; 1];
>> [P,L] = eig(A); % L is a diagonal matrix of eigenvalues
% P is a modal matrix whose columns are
% the corresponding eigenvectors
>> P
P =
    0.7071    -0.2182    -0.0921
    0.0000    -0.4364    -0.5523
    0.7071    -0.8729    -0.8285
>> a = inv(P)*A*P % Diagonalization of the A matrix
a =
   -1.0000   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -2.0000   -0.0000
   -0.0000    0.0000   -3.0000
>> b = inv(P)*B
b =
   -2.8284
  -13.7477
   10.8628
```

**3.5.2. Μετατροπή σε κανονική μορφή**

Στην εξίσωση κατάστασης ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.12}$$

Αν ο πίνακας:

$$S = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \tag{3.13}$$

είναι ομαλός, τότε υπάρχει ένας ομαλός μετασχηματισμός:

$$y(t) = Qx(t) \tag{3.14}$$

ή

$$x(t) = Q^{-1}y(t) \tag{3.15}$$

ο οποίος μετασχηματίζει την παραπάνω εξίσωση κατάστασης σε κανονική μορφή:

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t) \tag{3.16}$$

όπου:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = \mathbf{Q}\mathbf{B}$$

Ο μετασχηματισμός του  $\mathbf{Q}$  δίδεται από τον εξής πίνακα:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1 A \\ \vdots \\ Q_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

όπου:

$$Q_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B}^2 \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \quad (3.19)$$

Το M-file **ss2phv** έχει αναπτυχθεί έτσι ώστε να εκτελεί τον παραπάνω μετασχηματισμό. Η συνάρτηση **[a,b] = ss2phv(A,B)** επιστρέφει τα **a**, **b** σε κανονική μορφή.

### Παράδειγμα 3.6

Μετατροπή του συστήματος που δίδεται παρακάτω σε κανονική μορφή.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

```

>> A = [0 1 0; 3 0 2; -12 -7 -6];
>> B = [-1; 2; 3];
>> [a,b] = ss2phv(A,B)
Q =
    0.2500    0.0714    0.0357
   -0.2143         0   -0.0714
    0.8571    0.2857    0.4286
a =
    0.0000    1.0000   -0.0000
         0   -0.0000    1.0000
   -6.0000  -11.0000   -6.0000
b =
   -0.0000
         0
    1.0000
    
```

### 3.6. Λύση της εξίσωσης κατάστασης

Η λύση μίας γραμμικής ανομοιογενούς εξίσωσης κατάστασης:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.20)$$

μπορεί να ληφθεί προσεγγιστικά με τον μετασχηματισμό Laplace

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

ή

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + \Phi(s)BU(s) \quad (3.21)$$

όπου:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.22)$$

Ο  $\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]$  είναι γνωστός ως πίνακας μεταβατικής κατάστασης. Έτσι, η λύση της εξίσωσης κατάστασης είναι:

$$X(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]x(0) + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)Bu(s)] \quad (3.23)$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση σε όρους  $\varphi(t)$  και την συνέλιξη σε ολοκλήρωμα.

$$x(t) = \varphi(t)x(0) + \int_0^t \varphi(t)Bu(t - \tau)d\tau \quad (3.24)$$

Εάν ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος, τότε η παραπάνω εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί για να δώσει την ακόλουθη κρουστική, βηματική και ράμπτα.

Για κρουστική είσοδο  $u(t) = K\delta(t)$ , η απόκριση είναι:

$$x(t) = \varphi(t)x(0) + \varphi(t)BK \quad (3.25)$$

Για βηματική είσοδο  $u(t) = K$ , η απόκριση είναι:

$$x(t) = \varphi(t)x(0) + A^{-1}[\varphi(t) - I]BK \quad (3.26)$$

Για είσοδο ράμπτα  $u(t) = Kt$ , η απόκριση είναι:

$$x(t) = \varphi(t)x(0) + (A^2)^{-1}[\varphi(t) - I - At]BK \quad (3.27)$$

### 3.7. Μετασχηματισμός Laplace ενός μεταβατικού πίνακα ( $\Phi(s)$ )

Ο  $\Phi(s)$  λαμβάνεται από τον αλγόριθμο **Faddeev** όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}E_{n-1} + s^{n-2}E_{n-2} + \dots + E_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.28)$$

και οι  $E$  πίνακες είναι:

$$E_{n-1} = I, E_{n-1-k} = AE_{n-k} + a_{n-k}I \text{ όπου } k = 1, \dots, n-1$$

Σε αρχείο M-file, αναπτύσσεται η **ltstm** η οποία υπολογίζει την  $\Phi(s)$  σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο.

#### Παράδειγμα 3.7

Καθορισμός του  $\Phi(s)$  για το σύστημα που δίδεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

```
>> A = [-2 -1; 2 -5];
>> ltstm(A)
phi(s) = inv(SI - A) = P / q where,
P = s**(n-1)E(n-1) + S**(n-2)E(n-2) + . . . + E(0)
q = a(n)s**n + a(n-1)s**n-1 + a(1)s + . . . + a(0)
a(i) = coefficients of the characteristic equation q

The E matrices in descending power of s are :
E =
    1     0
    0     1
E =
    5    -1
    2     2
a =
    1     7    12
```

Συνεπώς ο  $\Phi(s)$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\Phi(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}{s^2 + 7s + 12} = \frac{\begin{bmatrix} s + 5 & -1 \\ 2 & s + 2 \end{bmatrix}}{(s + 3)(s + 4)}$$

### 3.8. Αξιολόγηση του $\Phi(t)$ από τις χαρακτηριστικές τιμές του $A$

#### 3.8.1. Μέθοδος Cayley-Hamilton

Το θεώρημα Cayley-Hamilton δηλώνει ότι αν η χαρακτηριστική εξίσωση για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A$  είναι:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (3.29)$$

τότε ο  $A$  ικανοποιεί την εξίσωση πινάκων:

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_nI = 0 \quad (3.30)$$

Δηλαδή, κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί την δικιά του χαρακτηριστική εξίσωση.

Θέτουμε:

$$e^{At} = k_1(t)I + k_2(t)A + k_3(t)A^2 + \dots + K_n(t)A^{n-1} \quad (3.31)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μία κλιμακούμενη εξίσωση, που ισοδυναμεί με την παραπάνω εξίσωση, ικανοποιείται όταν το  $A$  αντικαθίσταται από το  $\lambda$ , αυτό είναι:

$$e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} K \quad (3.32)$$

Όπου  $\lambda$  είναι οι διακριτές ιδιοτιμές του  $\mathbf{A}$ . Όταν δύο ιδιοτιμές είναι ίσες, για παράδειγμα όταν  $\lambda_2 = \lambda_3$  τότε η τρίτη σειρά του παραπάνω πίνακα αντικαθίσταται από:

$$\frac{de^{\lambda t}}{d\lambda} = \frac{d}{dt} (k_1 + \lambda k_2 + \lambda^2 k_3 + \dots + \lambda^{n-1} K_n) \quad (3.33)$$

Το **STM-M** αρχείο έχει αναπτυχθεί με βάση τη μέθοδο Cayley-Hamilton. Αυτή η συνάρτηση υπολογίζει τη μεταβατική κατάσταση του πίνακα σε κλειστή μορφή. Οι επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές είναι της πολλαπλότητας δύο. Το ακόλουθο παράδειγμα καταδεικνύει τη χρήση αυτής της συνάρτησης.

### Παράδειγμα 3.8

Εύρεση της μεταβατικής κατάστασης του πίνακα  $\Phi(t)$  για το σύστημα του παραδείγματος 3.7.

```
>> A = [-2 -1; 2 -5];
>> stm(A)
The state transition matrix is given by:
phi(t) = Sum Ci*exp(Li*t) + Sum Dj*t*exp(Lj*t)  i=1,...,n-j
where
Li = eigenvalues          & Ci = the corresponding matrix
coefficients
Lj = repeated eigenvalues & Dj = the corresponding matrix
coefficients

Li =
    -3
Ci =
     2    -1
     2    -1
Li =
    -4
Ci =
    -1     1
    -2     2
```

Έτσι, ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης είναι:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} e^{-4t} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} - e^{-4t} & -e^{-3t} + e^{-4t} \\ 2e^{-3t} - 2e^{-4t} & -e^{-3t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

### 3.9. Αριθμητική λύση της εξίσωσης κατάστασης

Η πρακτική διαδικασία για την εύρεση του χρόνου απόκρισης του συστήματος είναι μέσω της ψηφιακής προσομοίωσης. Η περιγραφή δυναμικών συστημάτων στο χώρο κατάστασης μας δίνει τη δυνατότητα προσομοίωσης των συστημάτων ελέγχου για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Έχουμε ήδη δει την αριθμητική επίλυση



διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση των συναρτήσεων **ode23** και **ode45** στο κεφάλαιο 2. Στην πραγματικότητα, προκειμένου να λύσουμε μία νιοστής τάξης διαφορική εξίσωση, ήταν απαραίτητο να τη μετατρέψουμε σε πρώτης τάξης εξίσωση. Το Matlab περιέχει ειδικές εντολές για την απόκριση των γραμμικών συστημάτων. Οι εντολές **step** και **impulse** υπολογίζουν αντίστοιχα την βηματική και την κρουστική απόκριση ενός γραμμικού συστήματος του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς έχει ήδη οριστεί. Τέλος μία πολύ χρήσιμη εντολή για την εύρεση της εξόδου ενός συστήματος, όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς είναι η εντολή **lsim**. Η εντολή **lsim** υπολογίζει την έξοδο για οποιοδήποτε σήμα εισόδου. Συντάσσεται ως **y = lsim(num,den,x,t)** όπου **num** και **den** οι συντελεστές αριθμητή και παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, **x** το σήμα εισόδου και **t** ο χρόνος εισόδου (και εξόδου). Εναλλακτικά συντάσσεται και ως **y = lsim(H,x,t)** όπου **H** η συνάρτηση μεταφοράς.

### Παράδειγμα 3.9

Η εξίσωση κατάστασης ενός γραμμικού συστήματος αντιπροσωπεύεται από:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

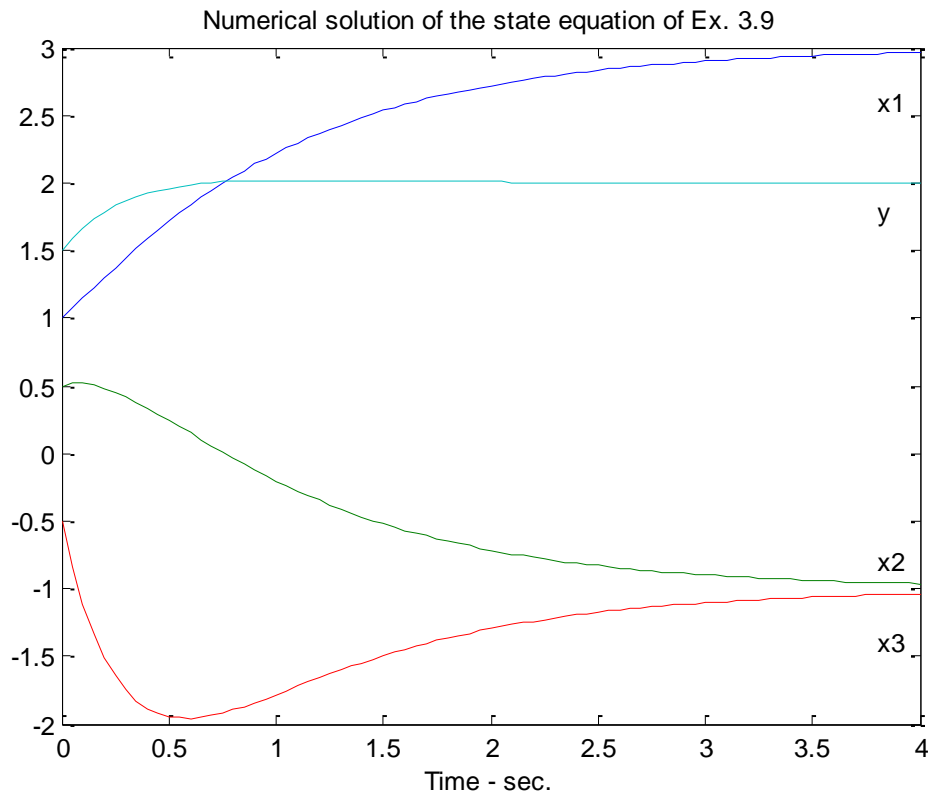
Δίνεται:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

Καθορισμός των **x(t)** και, **y(t)** όπου το **r(t)** είναι μία μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
>> B = [1;1;1]; C = [1 1 0]; D = 0;
>> x0 = [1 .5 -.5]; t = 0:.05:4;
>> U = ones(1,length(t)); % generates a row vector u(t)
>> [y,x] = lsim(A,B,C,D,U,t,x0);
>> plot(t,x,t,y)
>> title('Numerical solution of the state equation of Ex.
3.9')
>> xlabel('Time - sec.')
>> text(3.8,1.8,'y'), text(3.8,2.6,'x1'), text(3.8,-
.8,'x2'),
>> text(3.8,-1.4,'x3')
```

Η έξοδος φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 3.1.



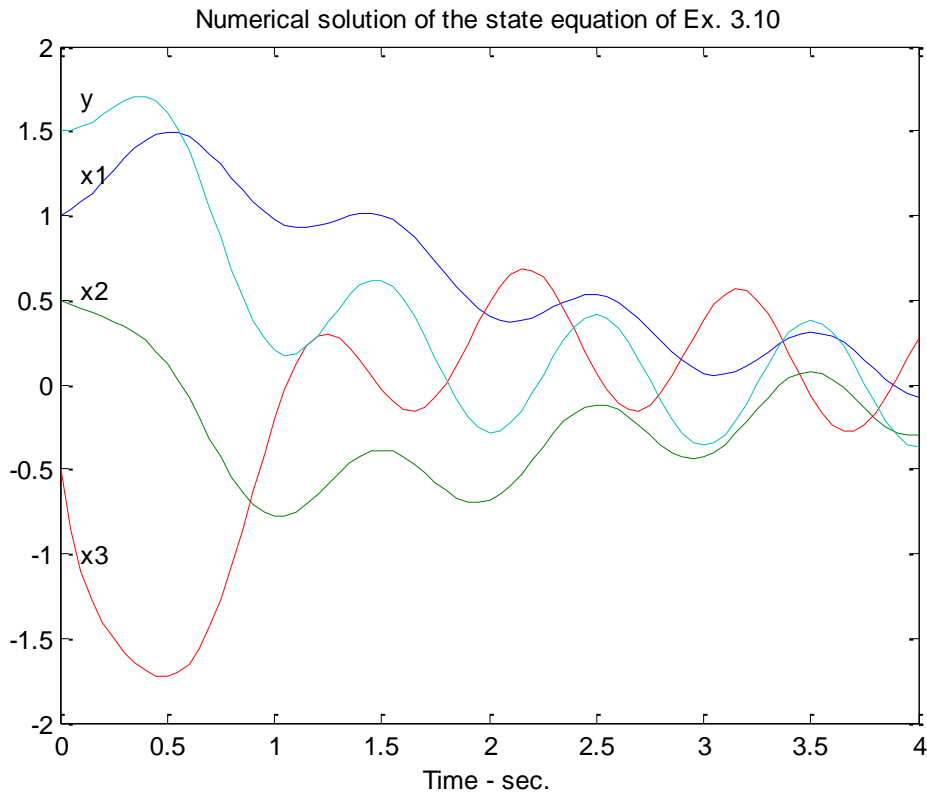
Σχήμα 3.1: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 3.9.

### Παράδειγμα 3.10

Για το παράδειγμα 3.9, γίνεται Προσδιορισμός των  $\mathbf{y}(t)$  και  $\mathbf{x}(t)$  αν η είσοδος δίνεται από την συνάρτηση  $\mathbf{r}(t) = \sin(2\pi t)$ .

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
>> B = [1; 1; 1]; C = [1 1 0]; D = 0;
>> t = 0:.05:4; % time interval
>> U = sin(2*pi*t);
>> x0 = [1 0.5 -0.5]; % row vector of initial conditions
>> [y,x] = lsim(A,B,C,D,U,t,x0);
>> plot(t,x,t,y)
>> title('Numerical solution of the state equation of Ex.
3.10')
>> xlabel('Time - sec.')
>> text(.1, 1.7, 'y'), text(.1,1.25, 'x1'),
>> text(.1, .55, 'x2'), text(.1, -1, 'x3')
```

Η έξοδος φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 3.2.



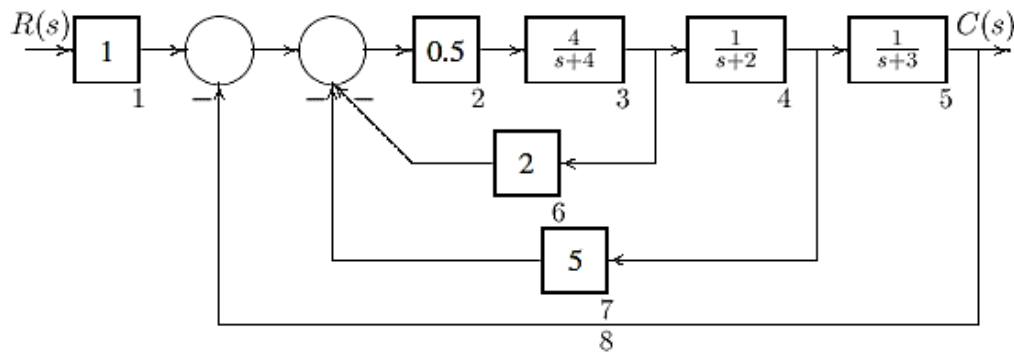
Σχήμα 3.2: Αριθμητική λύση του παραδείγματος 3.10.

### 3.10. Απλοποίηση δομικού διαγράμματος

Το αρχείο script `blkbuild` του Control System Toolbox του MATLAB και η συνάρτηση `connect` μετατρέπουν τα δομικά διαγράμματα στο χώρο κατάστασης. Τα μπλοκ της συνάρτησης μεταφοράς αριθμούνται διαδοχικά από το 1 μέχρι το νούμερο των μπλοκ. Το `nblocks` καθορίζει τον συνολικό αριθμό των blocks ενώ το `bldblock` μετατρέπει κάθε μπλοκ σε ένα μη συνδεδεμένο κομμάτι αναπαράστασης στο χώρο κατάστασης. Η συνάρτηση  $[A,B,C,D] = \text{connect}(a,b,c,d,q,iu,iy)$  ενώνει τα μπλοκ σύμφωνα με έναν προκαθορισμένο πίνακα  $q$  που καθορίζει τις διασυνδέσεις. Το πρώτο όρισμα κάθε γραμμής του πίνακα  $q$  είναι το νούμερο του μπλοκ. Τα υπόλοιπα ορίσματα αναφέρονται στην πηγή της αθροιστικής εισόδου των μπλοκ. Όταν η είσοδος στην αθροιστική διασταύρωση είναι αρνητική, τότε το νούμερο του μπλοκ που μπαίνει έχει αρνητικό πρόσημο. Τα  $iu, iy$  είναι δύο διανύσματα γραμμής που υποδεικνύουν την διατήρηση των μπλοκ εισόδου και εξόδου. Τελικά για να πάρουμε την συνολική συνάρτηση μεταφοράς χρησιμοποιούμε την συνάρτηση  $[\text{num},\text{den}] = \text{ss2tf}(A,B,C,D,iu)$  που υπολογίζει την συνάρτηση μεταφοράς από την  $iu$  είσοδο.

Παράδειγμα 3.11

Αναπαράσταση στον χώρο κατάστασης και ολική συνάρτησης μεταφοράς για το σύστημα που αντιπροσωπεύεται από το ακόλουθο δομικό διάγραμμα:



```
>> n1 = 1; d1 = 1; n2 = .5; d2 = 1; n3 = 4; d3 = [1 4];
>> n4 = 1; d4 = [1 2]; n5 = 1; d5 = [1 3]; n6 = 2; d6 = 1;
>> n7 = 5; d7 = 1; n8 = 1; d8 = 1;
>> nblocks = 8; blkbuild
State model [a,b,c,d] of the block diagram has 8 inputs and
8 outputs.
>> q = [ 1 0 0 0 0 % q matrix indicates the block
2 1 -6 -7 -8 % diagram configurations
3 2 0 0 0
4 3 0 0 0
5 4 0 0 0
6 3 0 0 0
7 4 0 0 0
8 5 0 0 0 ];
>> iu = [1]; % input for the connected system
>> iy = [8]; % output for the connected system
>> [A,B,C,D] = connect(a,b,c,d,q,iu,iy) % connect the block
A =
-8.0000    -2.5000    -0.5000
 4.0000    -2.0000         0
         0     1.0000    -3.0000
B =
 0.5000
         0
         0
C =
 0     0     1
D =
 0
>> [num,den] = ss2tf(A,B,C,D,1) % convert to transfer
function
num =
         0     0.0000     0.0000     2.0000
den =
 1.0000    13.0000    56.0000    80.0000
>>H = tf(round(num) , den)
```

Επομένως, η ολική συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^3 + 13s^2 + 56s + 80}$$

Το *Control System Toolbox* περιέχει τέσσερις ακόμη συναρτήσεις που είναι χρήσιμες για την δημιουργία ενός μοντέλου. Η **append** αθροίζει δύο συστήματα στο χώρο κατάστασης δημιουργώντας ένα επαυξημένο μοντέλο. Οι **parallel**, **series** ενώνουν επακριβώς δύο συστήματα στο χώρο κατάστασης παράλληλα και σε σειρά. Τέλος, η **ode** παράγει τα A, B, C, D για ένα σύστημα 2<sup>ης</sup> τάξης.

Ένας πολύ καλύτερος τρόπος για να βρούμε την ολική συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος ελέγχου είναι να δημιουργήσουμε το δομικό διάγραμμα σαν ένα μοντέλο SIMULINK. Εκτελούμε την προσομοίωση, και βγάζουμε το γραμμικό μοντέλο αυτού του συστήματος SIMULINK, στο Command Window, εκτελούμε την εντολή:

```
>> [A,B,C,D] = linmod('SIMULINK file name')  
>> [num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε ότι η απόδοση των συστημάτων ελέγχου κλειστού βρόχου στο πεδίο του χρόνου είναι σημαντική γιατί εκ φύσεως τα συστήματα ελέγχου είναι συστήματα στο πεδίο του χρόνου. Η απόδοση των δυναμικών συστημάτων στο πεδίο του χρόνου μπορεί να οριστεί σύμφωνα με την χρονική απόκριση σε σταθερές εισόδους. Μία πολύ συνηθισμένη είσοδος στα συστήματα ελέγχου είναι η βηματική συνάρτηση. Εάν η απόκριση σε βηματική είσοδο είναι γνωστή, τότε είναι μαθηματικά πιθανό να υπολογίσουμε την απόκριση σε κάθε είσοδο. Άλλη μία σημαντική είσοδος είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση. Μία ημιτονοειδής έξοδος σταθερής κατάστασης λαμβάνεται όταν ένα ασυμπτωτικά σταθερό γραμμικό σύστημα υποβάλλεται σε μία ημιτονοειδή έξοδο. Έτσι, αν γνωρίζουμε την απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος σε ημίτονο όλων των συχνοτήτων, έχουμε ολοκληρώσει την περιγραφή του συστήματος.

### 4.1. Απόκριση συστημάτων 2<sup>ης</sup> τάξης

Η σταθερή μορφή μίας συνάρτησης μεταφοράς 2<sup>ης</sup> τάξης δίδεται από την εξίσωση:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.1)$$

όπου  $\omega_n$  είναι η φυσική συχνότητα. Η φυσική συχνότητα είναι η συχνότητα της ταλάντωσης αν το σύνολο της απόσβεσης μειώνεται. Κάθε τιμή μας δίνει μία ένδειξη της ταχύτητας της απόκρισης. Το  $\zeta$  είναι ο αδιάστατος λόγος απόσβεσης. Ο λόγος απόσβεσης μας δίνει μία ιδέα για την φύση της μεταβατικής απόκρισης. Η μεταβατική απόκριση ενός πρακτικού συστήματος ελέγχου συχνά παράγει ταλαντώσεις πριν φτάσει σε σταθερή κατάσταση. Η υποκρίσιμη απόκριση ( $\zeta < 1$ ) σε μία βηματική είσοδο που στοχεύει σε αρχική μηδενική κατάσταση, δίδεται από την εξίσωση:

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \theta) \quad (4.2)$$

όπου  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$  και  $\theta = \tan^{-1}(\beta/\zeta)$ .

### 4.2. Προδιαγραφές απόδοσης στο πεδίο του χρόνου

Τα κριτήρια απόδοσης χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουμε την μεταβατική απόκριση σε μία βηματική είσοδο συμπεριλαμβάνοντας τον χρόνο ανύψωσης, τον

χρόνο κορυφής, την υπερύψωση και τον χρόνο αποκατάστασης. Ορίζουμε τον χρόνο ανύψωσης  $t_r$  ως τον απαιτούμενο χρόνο για άνοδο από το **10%** της τελικής τιμής έως το **90%** της τελικής τιμής. Ο χρόνος για να φτάσει την κορυφή της τιμής είναι  $t_p$ . Η ταχύτητα της απόκρισης μετριέται από τα  $t_r$ ,  $t_p$ . Η ομοιότητα με την οποία η πραγματική απόκριση ταιριάζει με την βηματική είσοδο μετριέται από την ποσοστιαία υπερύψωση και τον χρόνο αποκατάστασης. Για τα υποκρίσιμα συστήματα η ποσοστιαία υπερύψωση **P.O** εκφράζεται ως εξής:

$$P.O. = \frac{\text{maximum value} - \text{final value}}{\text{final value}} \quad (4.3)$$

Ο χρόνος κορυφής λαμβάνεται θέτοντας την παράγωγο της σχέσης (4.2) στο μηδέν.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.4)$$

Η τιμή ανόδου της βηματικής απόκρισης που λαμβάνει θέση σε αυτόν τον χρόνο και υπολογίζει την απόκριση στην σχέση (4.2) στο  $t = t_p$  αποδίδει:

$$C(t_p) = M_{pt} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.5)$$

Επομένως από την σχέση (4.3), η ποσοστιαία υπερύψωση είναι:

$$P.O. = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100 \quad (4.6)$$

Ο χρόνος αποκατάστασης είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε η βηματική απόκριση να τεθεί εντός ενός μικρού ποσοστού της κάθε του τιμής. Τυπικά αυτή η τιμή υποτίθεται ότι θα πρέπει να είναι  $\pm 2$  τις εκατό της τελικής τιμής. Για τα συστήματα 2<sup>ης</sup> τάξης η απόκριση παραμένει μεταξύ του 2 τις εκατό μετά από 4 σταθερές χρόνου που είναι:

$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (4.7)$$

Η συνάρτηση **timespec(num,den)** μας βοηθάει να λάβουμε την απόδοση των προδιαγραφών στο πεδίο χρόνου, **P.O**,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_s$ . Τα **num**, **den** είναι ο αριθμητής και ο παρανομαστής της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου.

### 4.3. Επιδράσεις πρόσθεσης πόλων και μηδενικών

#### 4.3.1. Προσθήκη μηδενικού

Τα μηδενικά μίας συνάρτησης μεταφοράς επηρεάζουν το πλάτος της απόκρισης αλλά όχι την φύση της. Όσο πιο κοντά είναι τα μηδενικά στους κυρίαρχους πόλους, τόσο μεγαλύτερη επιρροή υπάρχει στην μεταβατική απόκριση. Οι χρόνοι



ανύψωσης και κορυφής μειώνονται, όσο η ποσοστιαία υπερύψωση αυξάνεται. Τέλος όταν το μηδενικό απομακρύνεται από τους κυρίαρχους πόλους, η απόκριση προσεγγίζει ότι έχουμε σύστημα 2<sup>ης</sup> τάξης.

#### 4.3.2. Προσθήκη πόλου

Εφόσον οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης, ελέγχουν επακριβώς την μεταβατική απόκριση του συστήματος. Οι χρόνοι ανύψωσης και κορυφής αυξάνονται με την μείωση της υπερύψωσης, έχοντας σαν αποτέλεσμα μία πιο αργή απόκριση. Όσο ο πόλος μετακινείται μακριά από τον κυρίαρχο πόλο, τόσο και μικρότερη επίδραση έχει. Εφόσον αυτός ο προστιθέμενος εκθετικός πόλος φθαρεί μετά από πέντε σταθερές χρόνου και αν ο πόλος είναι πέντε φορές μακρύτερος στους αριστερούς παρά στους κυρίαρχους πόλους, τότε το σύστημα μπορεί να αντιπροσωπευθεί από ένα μοντέλο 2<sup>ης</sup> τάξης.

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος 3<sup>ης</sup> τάξης με ένα μηδενικό μπορεί να γραφτεί στην εξής σταθερή μορφή:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2(1 + as)}{(1 + Ts)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} K/s \quad (4.8)$$

Κάνοντας αντίστροφο θεώρημα Laplace, η υποκρίσιμη μεταβατική απόκριση ( $\zeta < 1$ ) είναι η εξής:

$$c(t) = K \left[ 1 + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\beta\omega_n t + \varphi) + \frac{X}{\rho} e^{-\frac{t}{T}} \right] \quad (4.9)$$

όπου:

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}, \sigma = 1 - 2\zeta\alpha\omega_n + \alpha^n\omega_n^2, \rho = 1 - 2T\zeta\omega_n + T^2\omega_n^2, \chi = \omega_n^2 T(\alpha - T)$$

και

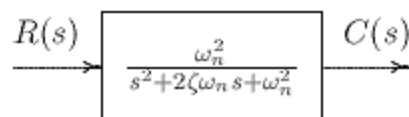
$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{\alpha\beta\omega_n}{1 - \alpha\zeta\omega_n} \right] - \tan^{-1} \frac{\beta\omega_n T}{1 - T\zeta\omega_n} - \tan^{-1} \frac{\beta}{-\zeta}$$

Η συνάρτηση  $c = \text{stepzwn}(\mathbf{z}, \omega_n, \mathbf{R}, \alpha, T, t)$  έχει αναπτυχθεί για να λαμβάνουμε την βηματική απόκριση της σχέσης (4.9) όπου  $\mathbf{z}$  ο συντελεστής απόσβεσης,  $\omega_n$  η φυσική συχνότητα, και  $\mathbf{R}$  το μέγεθος της βηματικής συνάρτησης. Για τα συστήματα 2<sup>ης</sup> τάξης τα  $\alpha$ ,  $T$  θέτονται στο μηδέν, και το  $t$  είναι το καθορισμένο χρονικό διάστημα. Οι φόρμουλες χρονικής απόκρισης εξίσου συμπεριλαμβάνονται στην παραπάνω συνάρτηση.

Δοθείσης της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος κλειστού βρόχου, η συνάρτηση **step(num,den)** του *Control System Toolbox* παράγει το διάγραμμα της βηματικής απόκρισης με το διάνυσμα χρόνου να καθορίζεται αυτόματα. Αν το σύστημα κλειστού βρόχου οριστεί στον χώρο κατάστασης, χρησιμοποιούμε την **step(A,B,C,D)**. Η συνάρτηση **step(num,den,t)** ή **step(A,B,C,D,iu,t)** χρησιμοποιεί το παρεχόμενο από τον χρήστη διάνυσμα χρόνου **t**. Το κλιμακοποιημένο **iu** εστιάζει στο ποια είσοδος πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την βηματική απόκριση. Εάν οι παραπάνω εντολές καλούνται με τα ορίσματα **[y,x,t]**, το διάνυσμα εξόδου, τα διανύσματα σταθερής απόκρισης, και το διάνυσμα χρόνου **t** επιστρέφονται, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση **plot** για να πάρουμε το διάγραμμα. Παρατηρούμε εξίσου τις συναρτήσεις **initial**, **lsim**. Η συνάρτηση που ονομάζεται **timespec(num,den)** μας βοηθάει να λάβουμε την απόδοση των προδιαγραφών στο πεδίο χρόνου **P.O**, **t<sub>r</sub>**, **t<sub>p</sub>**, **t<sub>s</sub>**. Τα **num**, **den** είναι ο αριθμητής και ο παρανομαστής της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου.

#### Παράδειγμα 4.1

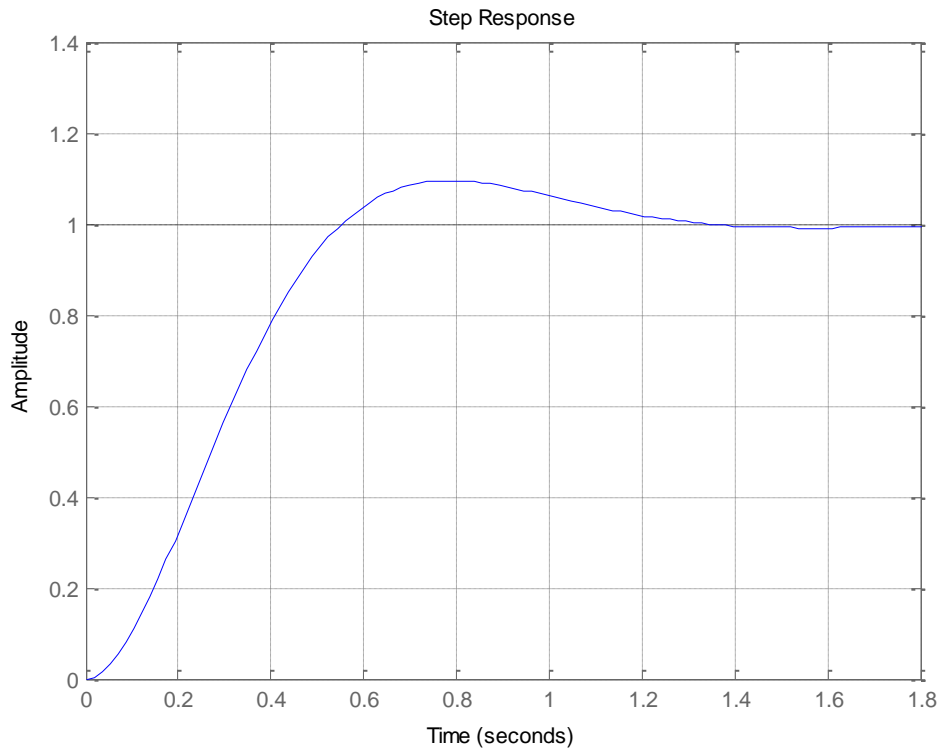
Λαμβάνουμε την βηματική απόκριση και τις προδιαγραφές του συστήματος στο πεδίο του χρόνου που είναι παρακάτω, όπου  $\zeta = 0.6$  και  $\omega_n = 5$ .



```
>> num = 25; den = [1 6 25];
>> step(num,den), grid
timespec(num,den)
```

```
Peak time = 0.786667           Percent overshoot = 9.47783
Rise time = 0.373333
Settling time = 1.18667
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Μοναδιαία βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.1.

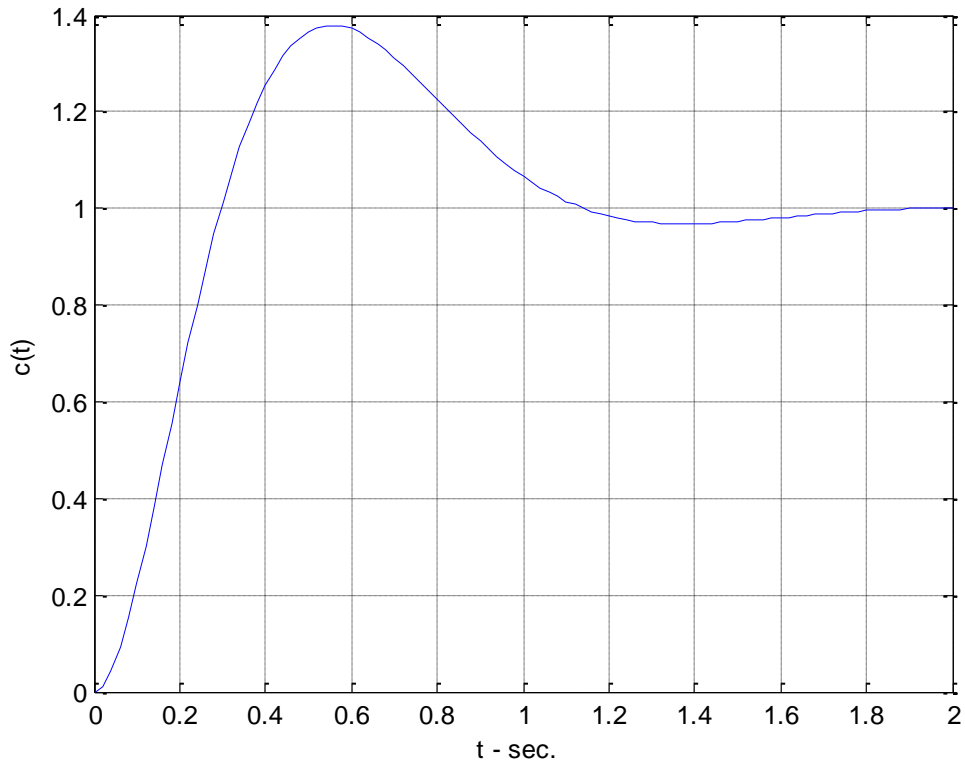
### Παράδειγμα 4.2

Λαμβάνουμε την μοναδιαία βηματική απόκριση, τον χρόνο ανύψωσης, τον χρόνο κορυφής, και το ποσοστό υπερύψωσης για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς δίδεται παρακάτω:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25(1 + 0.4s)}{(1 + 0.16s)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{10s + 25}{0.16s^3 + 1.96s^2 + 10s + 25}$$

```
>> num = [10,25];
>> den = [0.16 1.96 10 25];
>> t = 0:0.02:2;
>> c = step(num,den,t); plot(t,c),
>> xlabel('t - sec. '), ylabel('c(t)'), grid
>> timespec(num,den)
Peak time = 0.553333          Percent overshoot = 37.9675
Rise time = 0.206667
Settling time = 1.59
```

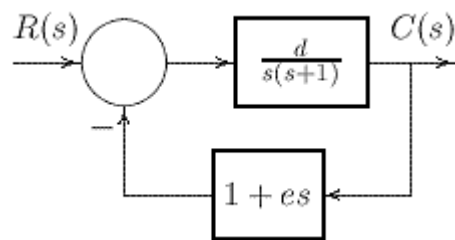
Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2: Μοναδιαία βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.2.

Παράδειγμα 4.3

Το δομικό διάγραμμα ενός σερβομηχανισμού δίδεται παρακάτω. Καθορίζουμε τις τιμές των  $d$ ,  $e$  έτσι ώστε η μέγιστη υπερύψωση στην μοναδιαία βηματική απόκριση να είναι **40** τις εκατό και ο χρόνος αιχμής είναι **0.8** δευτερόλεπτα.



```
>> os = 40; tmax = .80;
>> z = log(100/os)/sqrt( pi^2 +(log(100/os))^2 ) %From Eq.
(4.6)
z =
    0.2800
>> wn = pi/(tmax*sqrt(1-z^2)) %From Eq. (4.4)
wn =
    4.0906
>> num = wn^2; den = [1 2*z*wn wn^2];
>> t = 0:0.02:4;
>> c = step(num,den,t); plot(t,c),
>> xlabel('t - sec. '), ylabel('c(t)'), grid
>> timespec(num,den),
Peak time = 0.803239          Percent overshoot = 39.9965
Rise time = 0.314311
Settling time = 3.37011
```

Από το δομικό διάγραμμα έχουμε:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{d}{s^2 + (de + 1)s + d}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$s^2 + (de + 1)s + d = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές:

$$d = \omega_n^2 = 4.0906^2 = 16.733$$

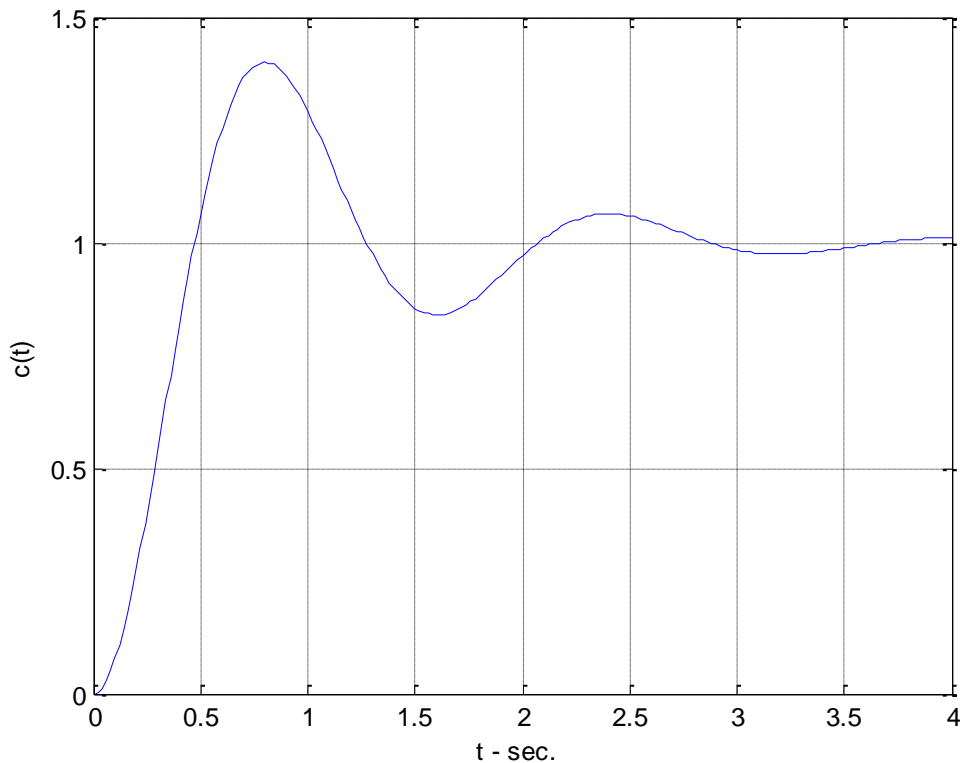
και

$$de + 1 = 2(0.28)(4.0906)$$

Επομένως:

$$e = 0.077$$

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3: Μοναδιαία βηματική συνάρτηση του παραδείγματος 4.3.

#### 4.4. Απόκριση συχνότητας συστήματος

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος ορίζεται ως η σταθερή απόκριση του συστήματος σε ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου. Θεωρώντας ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  και ημιτονοειδή είσοδο:

$$r(t) = A \cos \omega t \tag{4.10}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $\mathbf{r}(t)$ , ο μετασχηματισμός  $\mathbf{C}(s)$  της εξόδου του συστήματος είναι:

$$C(s) = \frac{AsG(s)}{s^2 + \omega^2} \quad (4.11)$$

Μετά την ανάπτυξη σε άθροισμα μερικών κλασμάτων το αποτέλεσμα είναι το εξής:

$$C(s) = \frac{k_1}{s-j} + \frac{k_1^*}{s+j} + \sum \text{terms generated by the poles of } G(s) \quad (4.12)$$

Οι πόλοι του  $\mathbf{G}(s)$  είναι οι φυσικές συχνότητες. Συγκρατούν τις κυματομορφές στην μεταβατική κατάσταση της απόκρισης. Για τα γραμμικά δίκτυα, οι όροι που παράγονται από τους πόλους του  $\mathbf{G}(s)$  δεν θα συμβάλουν στην απόκριση σταθερής κατάστασης  $\mathbf{c}(t)$ . Επομένως η απόκριση σταθερής κατάστασης δίδεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των δύο πρώτων όρων του  $\mathbf{C}(s)$ :

$$c(t) = A|G(j\omega)| \cos(\omega t + \theta) \quad (4.13)$$

Από αυτήν την εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι η έξοδος του συστήματος έχει την ίδια συχνότητα με την είσοδο και μπορεί να ληφθεί πολλαπλασιάζοντας το μέγεθος της εισόδου με  $|G(j\omega)|$  και μετατοπίζοντας την γωνία φάσης της εισόδου με την γωνία του  $\mathbf{G}(j\omega)$ . Το μέγεθος  $\mathbf{G}(j\omega)$  και κάθε γωνία  $\theta$  για όλα τα  $\omega$  αποτελούν την απόκριση συχνότητας του συστήματος, και αποτελούν ένα σημαντικό στοιχείο για την ανάλυση και σχεδίαση των συστημάτων ελέγχου. Η συσχέτιση μεταξύ συχνότητας και μεταβατικών αποκρίσεων είναι έμμεση, εκτός από την περίπτωση συστημάτων 2<sup>ης</sup> τάξης.

Πρακτικά, το χαρακτηριστικό της απόκρισης συχνότητας εκφράζεται με την χρησιμοποίηση ποικίλων κριτηρίων σχεδίασης τα οποία θα έχουν ένα φυσικό αποτέλεσμα σε μία αποδεκτή μεταβατική απόκριση.

Αρχικά θεωρούμε την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

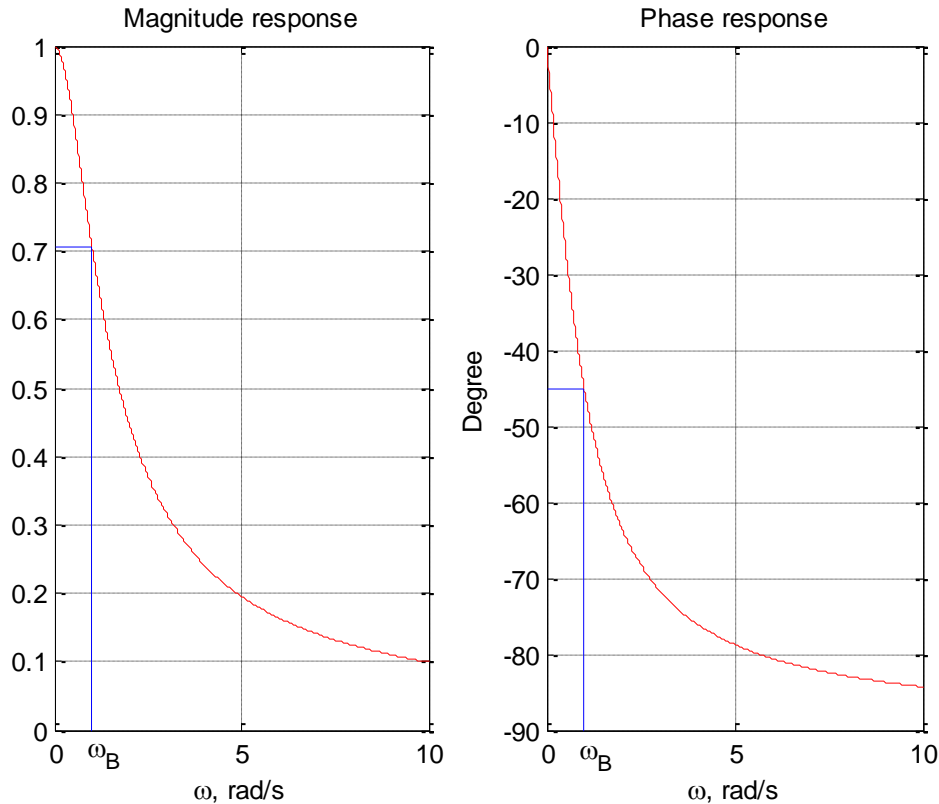
$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (4.14)$$

Η ημιτονοειδής συνάρτηση μεταφοράς σταθερής κατάστασης δίδεται από την εξής εξίσωση:

$$G(j\omega) = \frac{1}{[1 + \tau^2 \omega^2]^{1/2}} \angle \varphi(\omega) \quad (4.15)$$

$$\text{όπου: } \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \tau \omega$$

Οι γραφικές των  $G(j\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  δίδονται στο Σχήμα 4.4. Το εύρος ζώνης του συστήματος ορίζεται ως η τιμή της συχνότητας στην οποία το μέγεθος της συχνότητας απόκρισης μειώνεται στο  $1/\sqrt{2}$  της χαμηλότερης τιμής συχνότητας. Αυτή η συχνότητα συμβολίζεται με  $\omega_B$ . Για τα συστήματα 1<sup>ης</sup> τάξης το εύρος ζώνης δίδεται από την εξίσωση  $\omega_B = 1/\tau$ .



Σχήμα 4.4: Απόκριση συχνότητας ενός συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης.

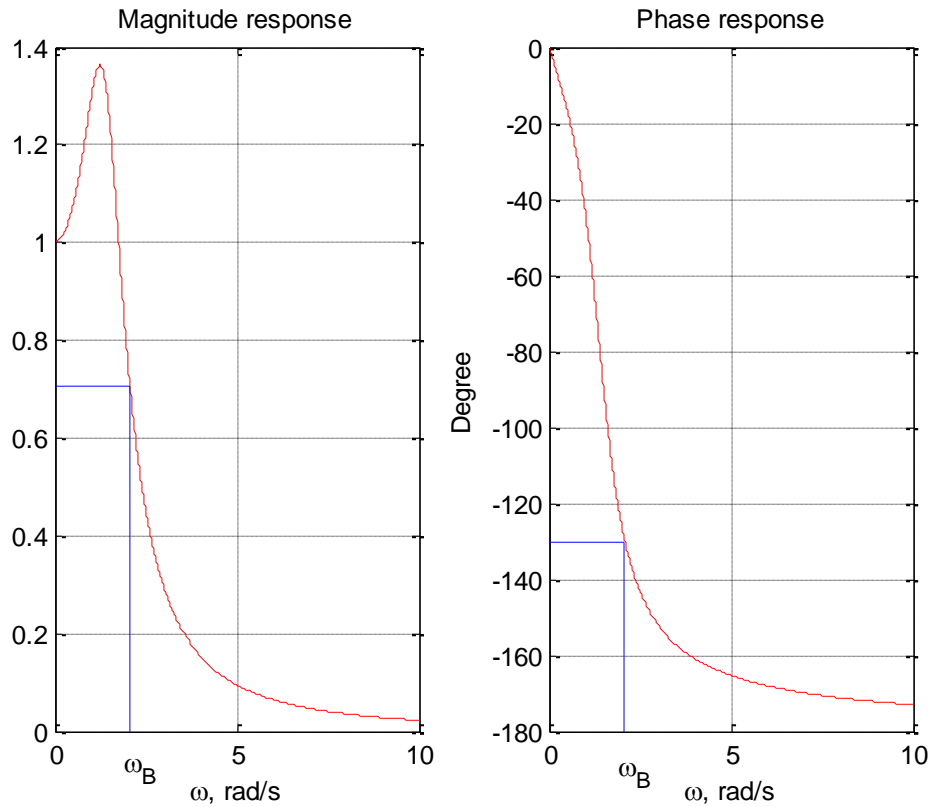
Θεωρούμε ότι η μορφή μίας συνάρτησης μεταφοράς 2<sup>ης</sup> τάξης είναι η εξής:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.16)$$

Η απόκριση συχνότητας δίδεται από την εξής εξίσωση:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)^{1/2}} \angle \varphi(\omega) \quad (4.17)$$

Ένα διάγραμμα της απόκρισης συχνότητας δοθέντος των  $\zeta$ ,  $\omega_n$  δίδεται στο Σχήμα 4.5.



Σχήμα 4.5: Απόκριση συχνότητας ενός συστήματος 2<sup>ης</sup> τάξης.

Για μία σταθερά  $\zeta$ , μία αύξηση του  $\omega_n$  ευθύνεται στην αύξηση του εύρους ζώνης, από τον ίδιο παράγοντα. Αυτό αντιστοιχεί στην μείωση του χρόνου κορυφής  $t_p$  και του χρόνου ανύψωσης  $t_r$  της μεταβατικής απόκρισης. Επομένως για να αυξηθεί η ταχύτητα απόκρισης του συστήματος, είναι αναγκαίο να αυξήσουμε το εύρος ζώνης. Για ένα λεπτομερές σύστημα, μία προσεγγιστική σχέση είναι η εξής:

$$\omega_B t_r \simeq \text{constant} \quad (4.18)$$

Όπου αυτή η σταθερά έχει τιμή περίπου ίση με 2.

Η συχνότητα στην οποία λαμβάνεται η κορυφή δίδεται θέτοντας την παράγωγο της σχέσης (4.16) ίση με μηδέν. Για  $\zeta < 0.707$ , η συχνότητα συντονισμού  $\omega_r$  δίδεται από την εξίσωση:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (4.19)$$

Η μέγιστη τιμή του μεγέθους της βηματικής απόκρισης, εκφράζεται με  $M_{p\omega}$  και είναι η εξής:

$$M_{p\omega} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.20)$$



Η κορυφή στην απόκριση συχνότητας σχετίζεται άμεσα με την ποσοστιαία υπερύψωση στην μεταβατική απόκριση. Όσο μεγαλύτερη είναι τόσο μεγαλύτερη υπερύψωση επέρχεται.

Δοθείσας της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, η συνάρτηση **bode(num,den)** του *Control System Toolbox* παράγει το διάγραμμα της συχνότητας απόκρισης με το διάνυσμα χρόνου να καθορίζεται αυτόματα. Αν το σύστημα έχει οριστεί στον χώρο κατάστασης, χρησιμοποιούμε την **bode(A,B,C,D)**. Η συνάρτηση **bode(num,den,ω)** ή **step(A,B,C,D,iu,ω)** χρησιμοποιεί το παρεχόμενο από τον χρήστη διάνυσμα χρόνου **ω**. Το κλιμακοποιημένο **iu** εστιάζει στο ποιά είσοδος πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την βηματική απόκριση. Εάν οι παραπάνω εντολές καλούνται με τα ορίσματα **[mag,phase,ω]**, η απόκριση συχνότητας του συστήματος επιστρέφει το μέγεθος, την φάση και το **ω**, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση **plot** για να πάρουμε το διάγραμμα.

Για συστήματα 2<sup>ης</sup> τάξης με  $\zeta < 1$ , οι σχέσεις (4.18), (4.19) μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό της συχνότητας  $\omega_r$  και της τιμής κορυφής  $M_{p\omega}$  της συχνότητας απόκρισης. Ωστόσο, η ανάπτυξη της συνάρτησης **frqspec(w,mag)** η οποία θα επιστρέψει τα  $\omega_r$ ,  $M_{p\omega}$ ,  $\omega_B$  βασίζεται στις συναρτησιακές τιμές των **w**, **mag**.

#### Παράδειγμα 4.4

Ένα σύστημα περιγράφεται με την εξής συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

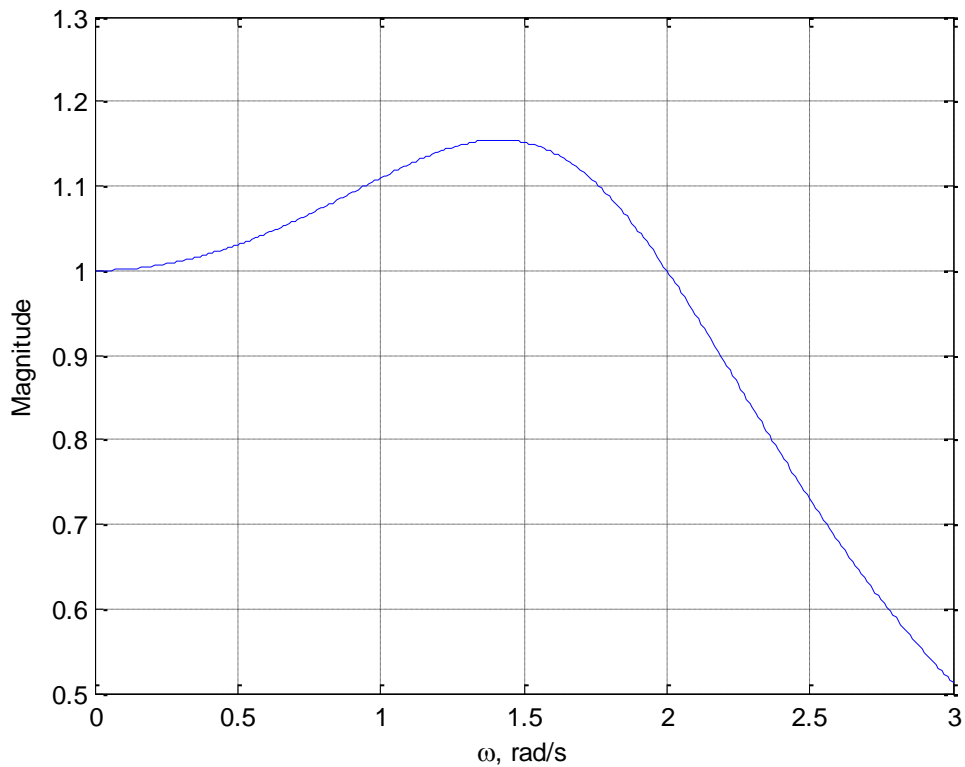
$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Λαμβάνουμε την απόκριση συχνότητας, το πλάτος κορυφής  $M_{p\omega}$ , την συχνότητα  $\omega_r$ , και το εύρος ζώνης  $\omega_B$  του συστήματος.

```
>> num = 4;
>> den = [1 2 4];
>> w = 0:.01:3;
>> [mag,phase] = bode(num,den,w);
>> frqspec(w,mag)
Peak Mag.      =      1.15      wr =      1.41      Bandwidth =
2.54

>> plot(w,mag)
>> ylabel('Magnitude'),xlabel('\omega, rad/s'), grid
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.6.



Σχήμα 4.6: Απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.4.

#### Παράδειγμα 4.5

Ένας πόλος προστίθεται στην συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του παραδείγματος 4.4 και η καινούργια συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{2.5 \times 4}{(s + 2.5)(s^2 + 2s + 4)} = \frac{10}{s^3 + 4.5s^2 + 9s + 10}$$

Καθορισμός:

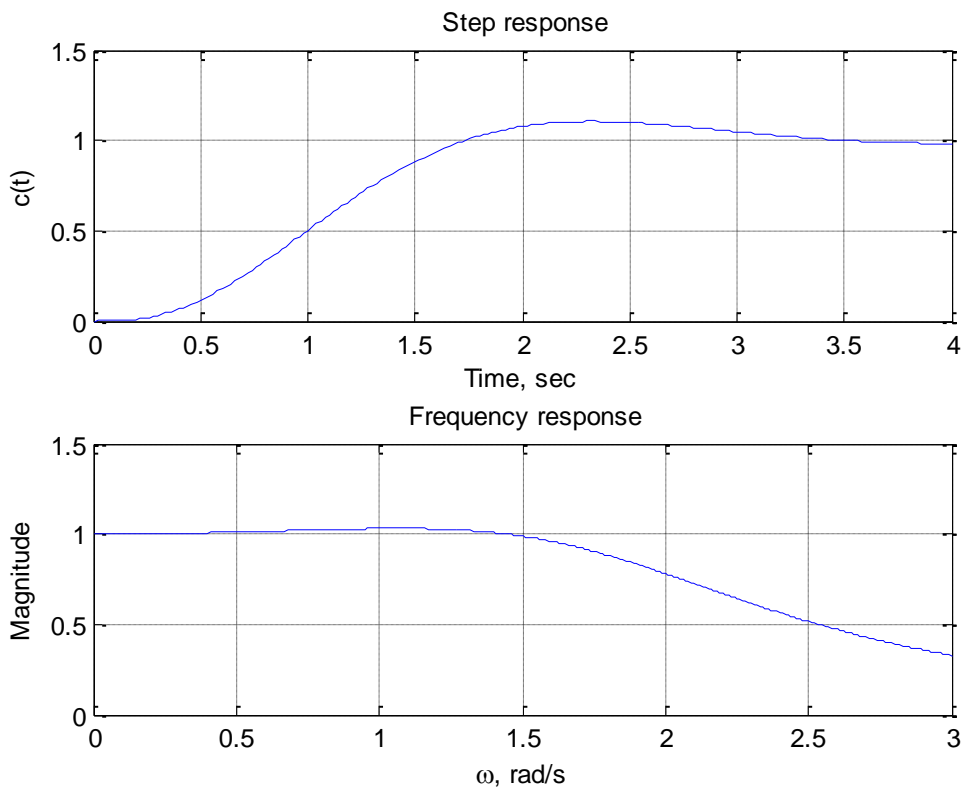
1. της βηματικής απόκρισης και του χρόνου ανύψωσης  $t_r$ .
2. της συχνότητας απόκρισης και του εύρους ζώνης  $\omega_B$ .
3. της προσεγγιστικής τιμής του εύρους ζώνης για να έχουμε χρόνο ανόδου **0.5** στην μεταβατική απόκριση.

```
>> num = 10;
>> den = [1 4.5 9 10];
>> t = 0:.02:4;
>> c = step(num,den,t);
>> timespec(num,den)
Peak time = 2.32          Percent overshoot = 10.6117
Rise time = 1.06
Settling time = 3.26
```

```
>> w = 0:.01:3;
>> [mag,phase] = bode(num,den,w);
>> frqspec(w,mag)
Peak Mag.      =    1.03      wr =    1.07      Bandwidth =
2.13

>> subplot(2,1,1), plot(t,c), title(' Step response')
>> ylabel('c(t)'),xlabel('Time, sec'), grid
>> subplot(2,1,2), plot(w,mag), title(' Frequency response')
>> ylabel('Magnitude'),xlabel('\omega, rad/s'), grid
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Βηματική απόκριση και απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.5.

Ο χρόνος ανύψωσης του εύρους ζώνης είναι  $\omega_B t_r = 2.14 \times 1.06 = 2.268$ . Έτσι από την σχέση (4.18), για χρόνο ανόδου  $t_r = 0.5s$ , είναι αναγκαίο να αυξήσουμε το εύρος ζώνης του συστήματος στο  $2.268/0.5 \approx 4.54$ .

#### Παράδειγμα 4.6

Δίδεται η περιγραφή του συστήματος από την συνάρτηση μεταφοράς 3<sup>ης</sup> τάξης:

$$G(s) = \frac{750}{s^3 + 36s^2 + 205s + 750}$$

1. Εύρεση των κυρίαρχων πόλων του συστήματος.
2. Εύρεση του μοντέλου απλοποιημένης τάξης του συστήματος. Καθορισμός των  $t_r$ ,  $t_p$  και της ποσοστιαίας υπερύψωσης της βηματικής απόκρισης. Επίσης εύρεση των  $\omega_r$ ,  $M_{p\omega}$  και του εύρους ζώνης  $\omega_B$  στην απόκριση συχνότητας.
3. Εύρεση των ακριβών τιμών για τις παραμέτρους και σύγκριση με τις τωρινές τιμές.

```
>> a = [ 1 36 205 750] ;
>> r = roots(a)
r =
-30.0000
-3.0000 + 4.0000i
-3.0000 - 4.0000i
```

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G(s) = \frac{750}{(s + 30)(s^2 + 6s + 25)} = \frac{25}{(1 + 0.0333s)(s^2 + 6s + 25)}$$

Οι κυρίαρχοι πόλοι είναι  $-3 \pm j4$  και ο πραγματικός πόλος  $s = -30$  είναι μακριά από τους κυρίαρχους, η επίδραση του είναι ελάχιστη και μπορεί να αγνοηθεί. Επομένως η προσεγγιστική συνάρτηση μεταφοράς είναι η εξής:

$$G(s) \simeq \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

```
>> num1 = 25; den1 = [1 6 25]; % Approximate 2nd-order
system
>> t = 0:.02:2;
>> c1 = step(num1,den1,t);
>> timespec(num1,den1)
Peak time = 0.786667          Percent overshoot = 9.47783
Rise time = 0.373333
Settling time = 1.18667

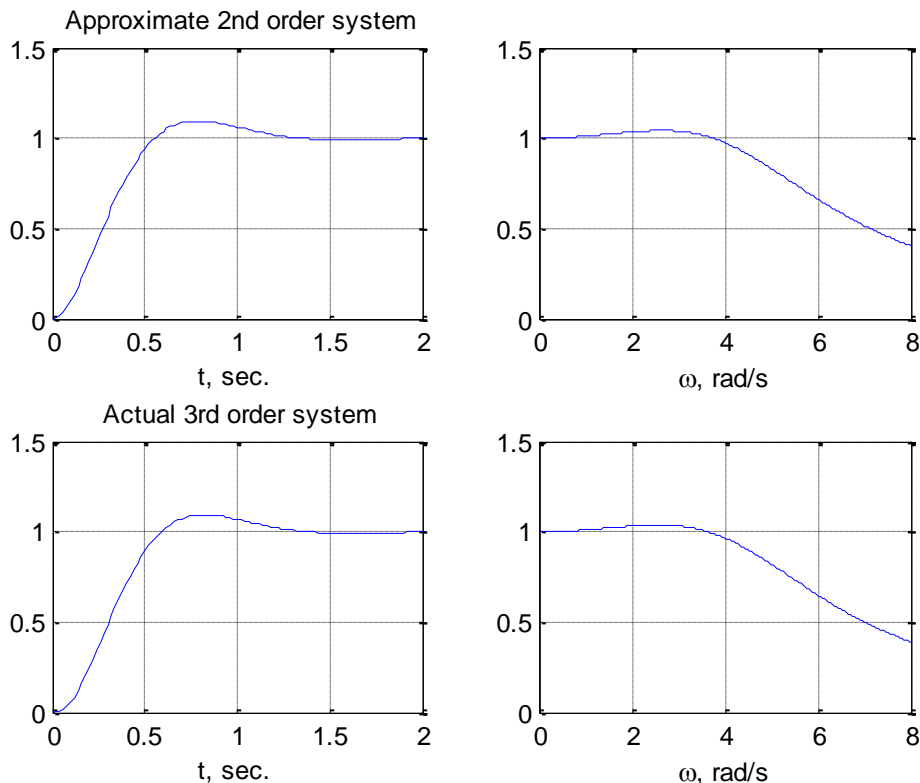
>> w = 0:.02:8;
>> [mag1,phase1] = bode(num1,den1,w);
>> frqspec(w,mag1)
Peak Mag.      =      1.04      wr =      2.64      Bandwidth =
5.75

>> num2 = 750; den2 =[1 36 205 750]; % 3rd-order system
>> c2 = step(num2,den2, t);
>> timespec(num2,den2)
Peak time = 0.823333          Percent overshoot = 9.32926
Rise time = 0.376667
Settling time = 1.22333
```

```
>> [mag2,phase2] = bode(num2,den2,w);
>> frqspec(w,mag2)
Peak Mag.      =    1.04      wr =    2.58      Bandwidth =
5.67

>> subplot(2,2,1), plot(t,c1), xlabel('t, sec. '), grid
>> title(' Approximate 2nd order system')
>> subplot(2,2,2), plot(w, mag1), xlabel('\omega, rad/s'),
grid
>> subplot(2,2,3), plot(t,c2), xlabel('t, sec. '), grid
>> title(' Actual 3rd order system')
>> subplot(2,2,4), plot(w,mag2), xlabel('\omega, rad/s'),
grid
>> subplot(111)
```

Η βηματική και η απόκριση συχνότητας για το ίδιο σύστημα και προσεγγιστικά για το σύστημα 2ης τάξης φαίνονται στο Σχήμα 4.8. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων μας δείχνει μικρές διαφορές στις παραμέτρους του μοντέλου.



Σχήμα 4.8: Βηματική απόκριση και απόκριση συχνότητας του παραδείγματος 4.6.

#### 4.5. Εργαλειοθήκη συστήματος ελέγχου: LTI Model και LTI Viewer

Το Toolbox του συστήματος ελέγχου παρέχει αρκετές ρυθμίσεις για την ανάλυση του συστήματος. Σε αυτή την ενότητα θα δούμε το LTI viewer σε μία γρήγορη περιγραφή.

### 4.5.1. LTI Models

Οι παρακάτω εντολές διαμορφώνουν την συνάρτηση μεταφοράς, μηδενικά/πόλους/κέρδος, ή τα μοντέλα στον χώρο κατάστασης.

$G1 = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$  % συνάρτηση μεταφοράς

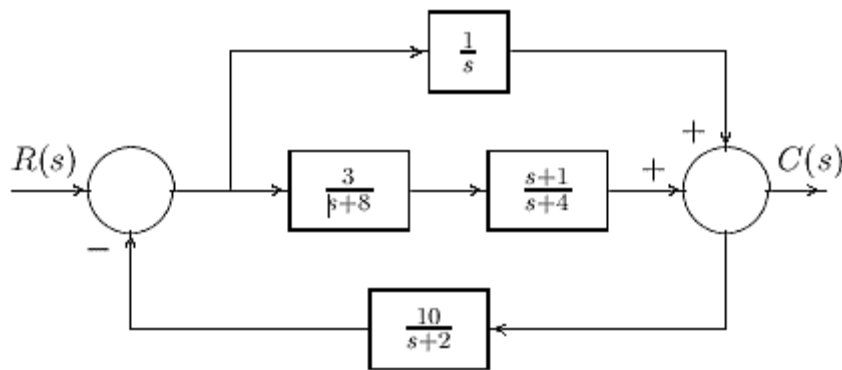
$G2 = \text{zpk}(z, p, k)$  % μηδενικά/πόλοι/κέρδος

$T = \text{ss} = (A, B, C, D)$  % χώρος κατάστασης

Η εντολή **T = feedback(G,H)** επιστρέφει την συνάρτηση μεταφοράς ενός απλού συστήματος ελέγχου αρνητικής ανατροφοδότησης. Για θετική ανατροφοδότηση, ένα επιπρόσθετο όρισμα χρησιμοποιείται. Τέλος η σύνταξη της εντολής για θετική ανατροφοδότηση είναι **T = feedback(G,H,+1)**.

#### Παράδειγμα 4.7

Λαμβάνεται η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου για το σύστημα ελέγχου που βλέπουμε στην Εικόνα 4.1.



Εικόνα 4.1: Δομικό διάγραμμα του παραδείγματος 4.7.

```
>> G = tf(3, [1 8])*tf([1 1], [1 4]) + tf(1, [1 0]);
>> H = tf(10, [1 2]);
>> T = feedback(G,H)
```

Transfer function:

$$4 s^3 + 23 s^2 + 62 s + 64$$

---


$$s^4 + 14 s^3 + 96 s^2 + 214 s + 320$$

### 4.5.2. LTI Viewer

Το LTI Viewer είναι μία διεπαφή με τον χρήστη που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκλάβουμε ποικίλες αποκρίσεις του συστήματος. Η σύνταξη του είναι η εξής:

```
ltiview('plot type', sys, Extra)
```

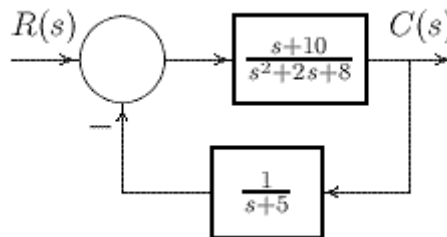
Όπου `sys` είναι το όνομα της συνάρτησης μεταφοράς και το `'plot type'` μία από τις ακόλουθες αποκρίσεις:

Step	Bode
Impulse	Nyquist
Initial	Nichols
Lsim	sigma

Πέρα από αυτά υπάρχει και ένα προαιρετικό όρισμα δίνοντας έμφαση στον τελικό χρόνο. Όταν ανοίγει το LTI Viewer με ένα δεξί κλικ στο ποντίκι μπορούμε να αλλάξουμε τον τύπο της απόκρισης και να πάρουμε τα χαρακτηριστικά του συστήματος στα πεδία χρόνου και συχνότητας.

#### Παράδειγμα 4.8

Χρησιμοποίηση του LTI Viewer για να πάρουμε την βηματική απόκριση και την απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου για το σύστημα ελέγχου στην Εικόνα 4.2.



Εικόνα 4.2: Δομικό διάγραμμα του παραδείγματος 4.8.

```
>> G = tf([1 10], [1 2 8]);
>> H = tf(1, [1 5]);
>> T = feedback(G,H)
```

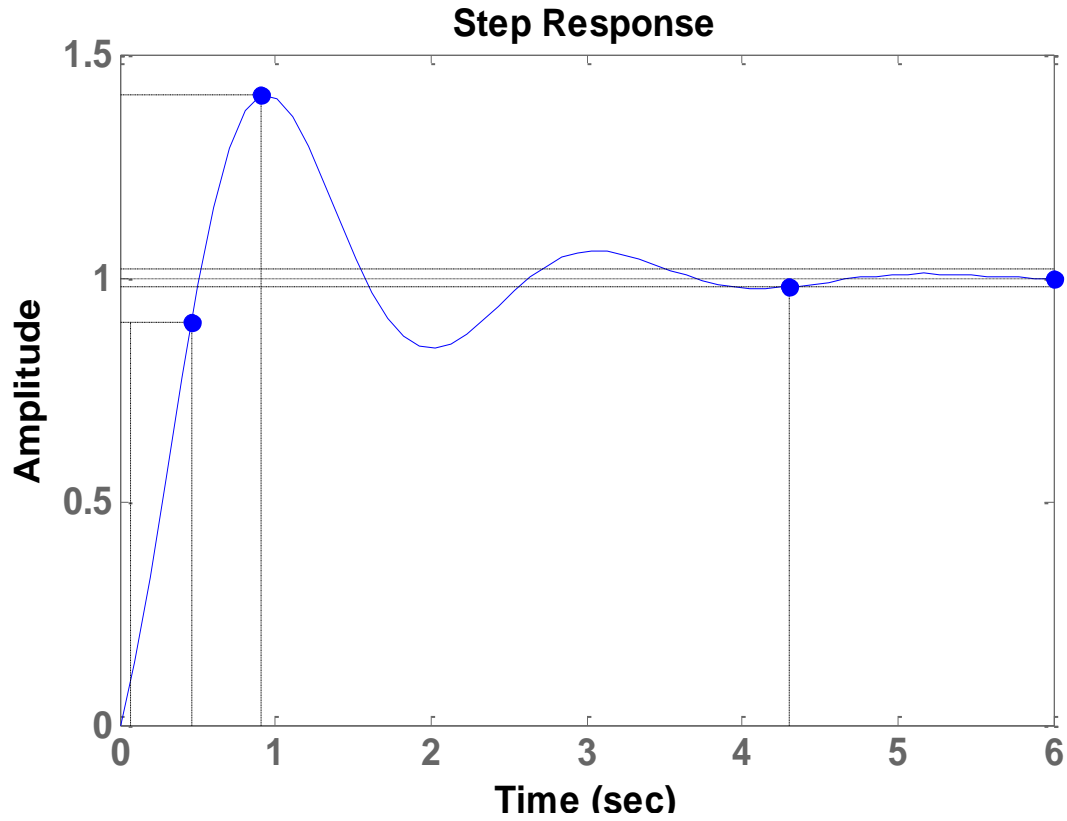
Transfer function:

$$s^2 + 15s + 50$$

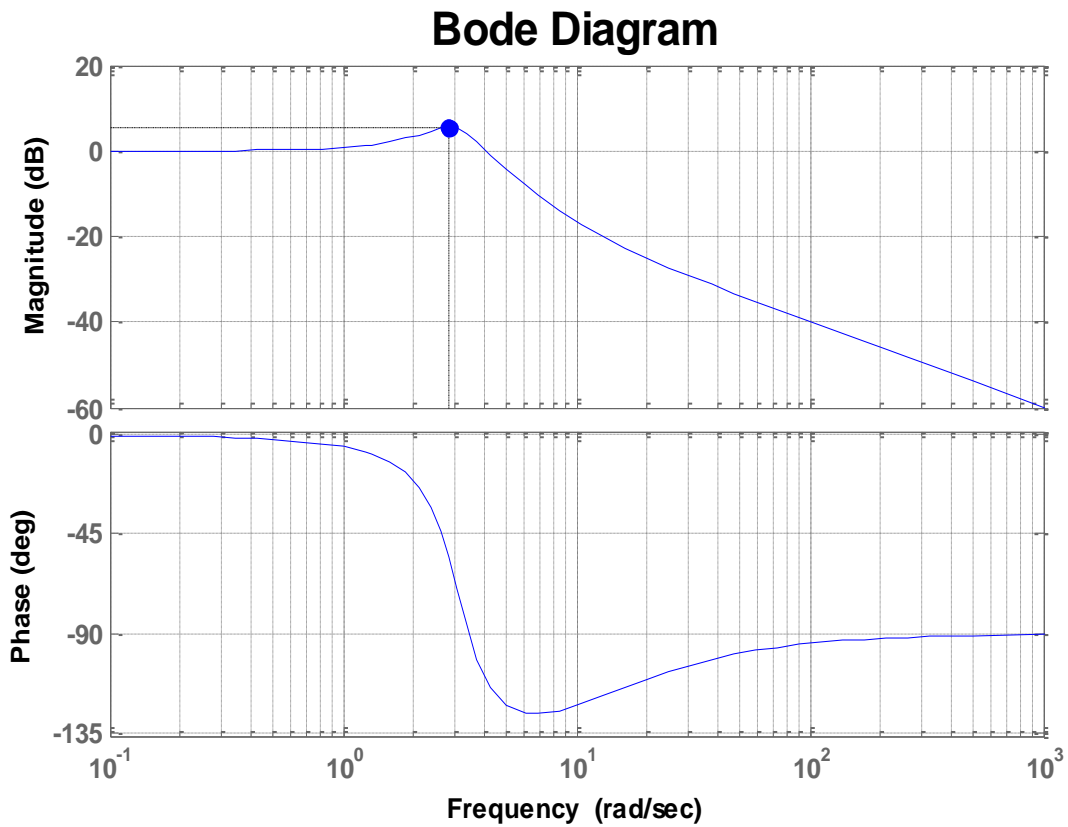
-----  
 $s^3 + 7s^2 + 19s + 50$

Η βηματική απόκριση λαμβάνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.9. Με το δεξί κλικ του ποντικιού παίρνουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου. Από το **File menu** μπορούμε να επιλέξουμε την ρύθμιση **Print to Figure** για να πάρουμε το παράθυρο με τον LTI viewer και την διαμόρφωση της γραφικής.

Στο LTI Viewer, κρατάμε το δεξί κλικ του ποντικιού και επιλέγουμε το **Plot Type** και έπειτα το **Bode plot**. Αυτό θα δημιουργήσει το πλάτος και την απόκριση συχνότητας γωνίας φάσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Το αριστερό κλικ χρησιμοποιείται για να πάρουμε την απόκριση του πλάτους κορυφής.



Σχήμα 4.9: Βηματική απόκριση του παραδείγματος 4.8.



Σχήμα 4.10: Μέτρο και γωνία φάσης του παραδείγματος 4.8.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

### 5.1. Ευστάθεια

Ένα σύστημα για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να είναι σταθερό-ευσταθές. Ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα είναι ευσταθές, αν για πεπερασμένη είσοδο, η έξοδος του είναι επίσης πεπερασμένη. Αυτή η βασική αρχή είναι γνώστη ως **κριτήριο ευσταθείας πεπερασμένης εισόδου-πεπερασμένης εξόδου** (bounded input-bounded output stability BIBO). Η ευστάθεια ενός συστήματος αυτόματου έλεγχου συνδέεται άμεσα με τις θέσεις των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (πόλων) της συνάρτησης μεταφοράς. Δηλαδή ένα σύστημα χρονικά αμετάβλητο είναι **ευσταθές** (stable) αν οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου βρίσκονται στο **αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο** (να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη), ενώ **ασταθές** (unstable) αν έστω και ένας πόλος βρίσκεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Στην περίπτωση που ένας ή παραπάνω πόλοι βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα (και οι υπόλοιποι αριστερά αυτού) τότε λέμε ότι έχουμε **κρίσιμη ευστάθεια**.

Η ευστάθεια ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να ελεγχθεί με τη χρήση της εντολής **impulse** για να ληφθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος. Το σύστημα είναι ευσταθές, αν η κρουστική απόκριση του πλησιάζει το μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Ένας τρόπος για να προσδιοριστεί η ευστάθεια του συστήματος είναι με προσομοίωση. Η συνάρτηση **lsim** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παρατήρηση της εξόδου για τυπικές εισόδους. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για μη γραμμικά συστήματα. Στην κλασική θεωρία ελέγχου, διάφορες τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για τον υπολογισμό και την ανάλυση της ευσταθείας. Ένας εκ των τεχνικών αυτών είναι το κριτήριο Routh-Hurwitz. Σε αυτό το κεφάλαιο η απάντηση στο ερώτημα της απόλυτης ευσταθείας αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας ένα απλό πρόγραμμα με βάση το κριτήριο **Routh-Hurwitz**.

Από την εξέταση του βαθμού ευσταθείας του συστήματος συχνά αντλούμε πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά του. Δηλαδή, αν είναι ευσταθές, πόσο κοντά είναι στο να είναι ασταθές κ.α. Αυτή είναι η έννοια της σχετικής ευσταθείας. Συνήθως, η σχετική ευστάθεια εκφράζεται σε όρους της ταχύτητας της αντίδρασης και της υπέρβασης. Άλλες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται συχνά για την μελέτη ευσταθείας είναι το διάγραμμα Bode, ο

γεωμετρικός τόπος, το κριτήριο Nyquist και το κριτήριο ευστάθειας του Lyapunov. Μερικές από αυτές τις τεχνικές παρουσιάζονται σε μεταγενέστερα κεφάλαια.

## 5.2. Κριτήριο ευστάθειας Routh-Hurwitz

Το **κριτήριο ευστάθειας Hurwitz** προσδιορίζει αν υπάρχουν πόλοι της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα άλλα δεν προσδιορίζει το πλήθος τους.

Ας θεωρήσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση της μορφής:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (5.1)$$

Το κριτήριο εφαρμόζεται μέσω της χρήσης ενός πίνακα Routh και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-1} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Οι  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  είναι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης και

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}, \dots$$

Οι υπολογισμοί σε κάθε σειρά θα συνεχιστούν μέχρι να παραμείνουν μόνο μηδενικά στοιχεία. Είναι απαραίτητο όλες οι ρίζες της σχέσης (5.1) να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh να έχουν το ίδιο πρόσημο. Εάν υπάρχουν μεταβολές των προσήμων στα στοιχεία της πρώτης στήλης, ο αριθμός των προσήμων δείχνει τον αριθμό των ριζών με θετικά πραγματικά μέρη. Μία εντολή που ονομάζεται **Routh( $\alpha$ )** σχηματίζει τη διάταξη Routh και προσδιορίζει αν τυχόν οι ρίζες έχουν θετικά πραγματικά μέρη. Το  $\alpha$  είναι ένα διάνυσμα γραμμής που περιέχει τους συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

### Παράδειγμα 5.1

Προσδιορισμός της ακόλουθης χαρακτηριστικής εξίσωσης για το αν αντιπροσωπεύει ένα ευσταθές σύστημα.

$$s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$$

```
>> a = [1 10 35 50 24];
>> routh(a)
Routh-Hurwitz Array

    1    35    24
   10    50     0
   30    24     0
   42     0     0
   24     0     0

System is stable
```

### Παράδειγμα 5.2

Εφαρμογή του κριτηρίου Routh-Hurwitz για την ακόλουθη χαρακτηριστική εξίσωση και Καθορισμός του αριθμού των ριζών στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

$$s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 22s + 24 = 0$$

```
>> a = [1 4 -7 -22 24];
>> routh(a)

Routh-Hurwitz Array

1.0000e+000 -7.0000e+000 2.4000e+001
4.0000e+000 -2.2000e+001 0
-1.5000e+000 2.4000e+001 0
4.2000e+001 0 0
2.4000e+001 0 0

There are 2 roots in the right half s-plane
```

## 5.2.1. Ειδικές περιπτώσεις

### Περίπτωση 1

Όταν ένας όρος της πρώτης στήλης είναι μηδέν, ενώ οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι διάφοροι του μηδενός ή δεν υπάρχουν τότε αντικαθίσταται ο μηδενικός όρος από ένα πολύ μικρό αριθμό ομόσημο με τους προηγούμενους της πρώτης στήλης έτσι ώστε να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός του πίνακα. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο παράδειγμα 5.3.

### Παράδειγμα 5.3

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο Routh-Hurwitz για την Καθορισμός του αριθμού των ριζών στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

$$s^4 - 5s^2 + 20s + 24 = 0$$

```
>> a = [1 0 -5 20 24];
>> routh(a)
Zero in the first column is replaced by 0.00001

Routh-Hurwitz Array

1.0000e+000 -5.0000e+000 2.4000e+001
1.0000e-005 2.0000e+001 0
-2.0000e+006 2.4000e+001 0
2.0000e+001 0 0
2.4000e+001 0 0

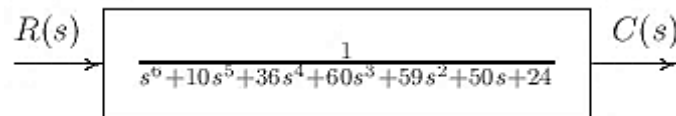
There are 2 roots in the right half s-plane
```

### Περίπτωση 2

Όταν όλοι οι όροι μίας σειράς του πίνακα είναι μηδενικοί ο πίνακας συμπληρώνεται με την τοποθέτηση, αντί των μηδενικών όρων της σειράς, των όρων της παραγωγίσιμης εξίσωσης της αμέσως προηγούμενης σειράς. Αυτή η περίπτωση παρουσιάζεται στο παράδειγμα 5.4.

### Παράδειγμα 5.4

Κατασκευή του πίνακα Routh για την χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος η οποία δίνεται στην παρακάτω Εικόνα 5.1.



Εικόνα 5.1: Σύστημα του παραδείγματος 5.4.

```
>> a = [1 10 36 60 59 50 24];
>> routh(a)
Elements of row 6 are all zero.
They are replaced by the auxiliary Eq. coefficients

Routh-Hurwitz Array

1    36    59    24
10   60   50     0
30   54   24     0
42   42    0     0
24   24    0     0
48    0    0     0
24    0    0     0

Characteristic Equation include roots on jw-axis or
pairs of real or complex roots symmetrical about jw-axis
```

### 5.3. Ευαισθησία

Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα των συστημάτων ελέγχου κλειστού βρόχου είναι η δυνατότητα μείωσης της ευαισθησίας σε διάφορες μεταβολές των παραμέτρων και του θορύβου. Ένα καλό σύστημα ελέγχου θα πρέπει να είναι «αδρανές» (να μην επηρεάζεται) σε αλλαγές της παραμέτρου ή σε εξωτερικές διαταραχές. Η ευαισθησία ενός συστήματος μπορεί να μετρηθεί ως η αναλογία του ποσοστού μεταβολής της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος προς την ποσοστιαία μεταβολή της παραμέτρου  $\mathbf{b}$ . Για παράδειγμα, η ευαισθησία της συνάρτησης μεταφοράς  $\mathbf{T}(s)$  για τη μεταβολή της παραμέτρου  $\mathbf{b}$  είναι ορίζεται ως:

$$S_b^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta b/b} = \frac{\Delta T(s)}{\Delta b} \frac{b}{T(s)} \quad (5.2)$$

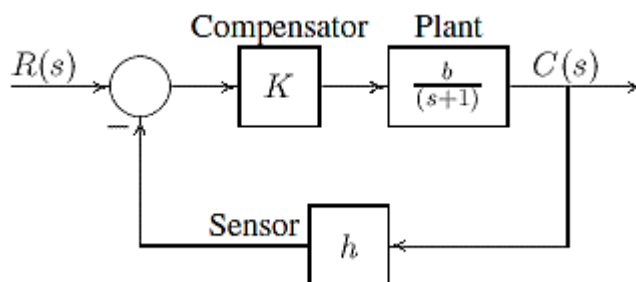
Καθώς η  $\Delta b$  πλησιάζει το μηδέν, η ευαισθησία του  $\mathbf{T}$  σε σχέση με το  $\mathbf{b}$  είναι:

$$S_b^T = \frac{\partial T(s)}{\partial b} \frac{b}{T(s)} \quad (5.3)$$

Η **στατική ευαισθησία** είναι η τιμή του  $\mathbf{S}$  για  $s \rightarrow 0$ . Οι **δυναμικές ευαισθησίες** υπολογίζονται συνήθως με την αντικατάσταση του  $\mathbf{s}$  από  $\mathbf{j}\omega$  και τη γραφική αναπαράσταση του  $\mathbf{S}$  ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ . Το μέγεθος της  $\mathbf{S}(\mathbf{j}\omega)$ , στην πραγματικότητα μετρά τα λάθη του συστήματος. Έτσι, ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί. Αυτό είναι σχετικά εύκολο να το κάνουμε σε χαμηλές συχνότητες, λόγω του εύρους ζώνης των φυσικών συσκευών που είναι άπειρο. Οποιοδήποτε φυσικό σύστημα έχει άπειρο εύρος ζώνης. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση μεταφοράς ενός πραγματικού συστήματος ελέγχου τείνει πάντα στο μηδέν, και η λειτουργία της ευαισθησίας της τείνει να ενώνεται για μεγάλο  $\omega$  (δηλαδή,  $\mathbf{S}(\mathbf{j}\omega) \rightarrow 1$ ). Αυτή η κατάσταση οδηγεί σε μεγάλα σφάλματα του συστήματος και οι διαταραχές δεν μπορούν να απορριφθούν.

#### Παράδειγμα 5.5

Έστω το σύστημα ελέγχου που αντιπροσωπεύεται από το δομικό διάγραμμα που φαίνεται στην Εικόνα 5.2, όπου το  $\mathbf{b}$  έχει τιμή 4 και το  $\mathbf{h}$  τιμή 0.5.



Εικόνα 5.2: Σύστημα του παραδείγματος 5.5.

1. Εύρεση της ευαισθησίας της  $T(s)$ , σε σχέση με το  $b$ . Σχεδίαση του μεγέθους της συνάρτησης της ευαισθησίας συναρτήσει της συχνότητας για  $K = 2$  και  $K = 0.5$ .
2. Εύρεση της ευαισθησίας του  $T(s)$  σε σχέση με το  $h$ . Σχεδίαση του μεγέθους της συνάρτησης ευαισθησίας συναρτήσει της συχνότητας για  $K = 2$  και  $K = 0.5$ .

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$T(s) = \frac{Kb}{s + 1 + Kbh}$$

Όπου  $b = 4$  και  $h = 0.5$ , το εύρος ζώνης του συστήματος  $\omega_B$  είναι  $1 + 2K$ . Η ευαισθησία του  $T$  σε σχέση με την  $b$  υπολογίζεται με βάση τις τιμές  $b = 4$  και  $h = 0.5$ .

$$S_b^T = \frac{\partial T b}{\partial b T} = \frac{s + 1}{s + 1 + Kbh} = \frac{s + 1}{s + 1 + 2K}$$

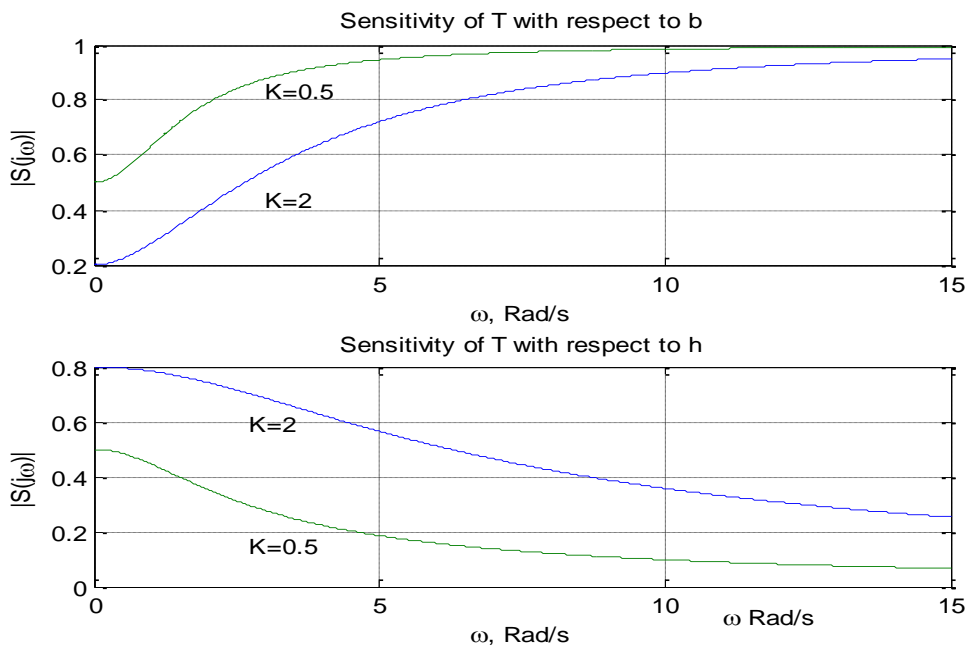
Παρομοίως, η ευαισθησία του  $T$  σε σχέση με  $h$  υπολογίζεται με της ίδιες τιμές οπότε έχουμε:

$$S_h^T = \frac{\partial T h}{\partial h T} = \frac{-Kbh}{s + 1 + Kbh} = \frac{-2K}{s + 1 + 2K}$$

Το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει τις γραφικές του  $|S_b^T(j\omega)|$  και του  $|S_h^T(j\omega)|$  για  $K = 2$  και  $K = 0.5$ .

```
>> k1 = 2;k2 = 0.5;
>> num = [1 1];
>> den1 = [1 1+2*k1];
>> den2 = [1 1+2*k2];
>> w = 0:.02:15;
>> STb1 = bode(num,den1,w); % Magnitude of S(jw)
>> STb2 = bode(num,den2,w); % Magnitude of S(jw)
>> subplot(2,1,1),plot(w,STb1,w,STb2),
>> title('Sensitivity of T with respect to b')
>> xlabel('\omega, Rad/s'), ylabel('|S(j\omega)|')
>> text(3,0.83,'K=0.5'),text(3,.44,'K=2')
>> num1 = -2*k1; num2 = -2*k2;
>> STb1 = bode(num1,den1,w); % Magnitude of S(jw)
>> STb2 = bode(num2,den2,w); % Magnitude of S(jw)
>> subplot(2,1,2),plot(w,STb1,w,STb2),
>> text(11,-.1,'\omega
Rad/s'),text(2.7,.15,'K=0.5'),text(2.7,.59,'K=2')
>> title('Sensitivity of T with respect to h')
>> xlabel('\omega, Rad/s'), ylabel('|S(j\omega)|')
>> subplot(111)
```

Από το Σχήμα 5.1 μπορούμε να δούμε ότι η ευαισθησία του συστήματος  $\mathbf{b}$  μειώνεται όταν αυξάνεται το κέρδος  $\mathbf{K}$  του ανοιχτού βρόχου, ενώ η ευαισθησία του  $\mathbf{h}$  αυξάνεται με την αύξηση του  $\mathbf{K}$ . Είναι σαφές ότι η ευαισθησία του  $\mathbf{b}$  αυξάνεται ταχέως έξω από το εύρος ζώνης του  $\omega_{\mathbf{B}}$ , και η ευαισθησία στο  $\mathbf{h}$  αυξάνεται για συχνότητα κάτω από το εύρος ζώνης του  $\omega_{\mathbf{B}}$ . Περισσότερες εφαρμογές της ευαισθησίας στην σχεδίαση και την ανάλυση του συστήματος ελέγχου θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: Παράδειγμα 5.5.

#### 5.4. Σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση και τύπος συστήματος

Ένας σημαντικός παράγοντας που αφορά στη λειτουργία των συστημάτων ελέγχου και πρέπει να εξετάζεται είναι το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση ( $\mathbf{e}_{ss}(t)$ -**steady state error**) το οποίο εμφανίζεται στην έξοδο του συστήματος αφού παρέλθει η περίοδος της μεταβατικής απόκρισης.

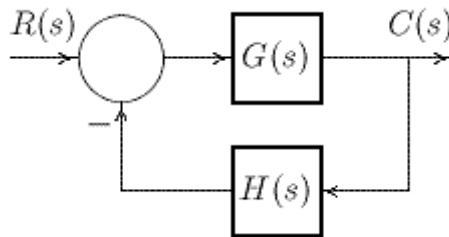
Η μόνιμη κατάσταση έχει ιδιαίτερη σημασία εφόσον η σχεδίαση ενός συστήματος αυτόματου ελέγχου αποσκοπεί στο ότι η μεταξύ των άλλων έξοδος του, έχει μία προκαθορισμένη μόνιμη κατάσταση  $\mathbf{y}_{ss}(t)$  η οποία είναι συνήθως η συνάρτηση εισόδου  $u(t)$ . Δηλαδή το σύστημα σχεδιάζεται έτσι ώστε, διεγερόμενο με την  $u(t)$  να την ακολουθεί στη μόνιμη κατάσταση δηλαδή να ισχύει  $\mathbf{y}_{ss}(t) = \mathbf{u}_{ss}(t)$ . Σε αντίθετη περίπτωση προκύπτει το στατικό σφάλμα ή σφάλμα

στη μόνιμη κατάσταση. Ένα σύστημα μπορεί να μην έχει σφάλμα σταθερής κατάστασης σε μία βηματική είσοδο, αλλά το ίδιο σύστημα μπορεί να παρουσιάζει μη μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης σε είσοδο ράμπα. Αυτό εξαρτάται από τον τύπο της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.

Εξετάζουμε το σύστημα που φαίνεται στην Εικόνα 5.3. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.4)$$

Το σφάλμα του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:



Εικόνα 5.3: Σύστημα ελέγχου μοναδιαίας ανατροφοδότησης.

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (5.5)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα τελικής τιμής, έχουμε:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.6)$$

Για πολυώνυμα εισόδων, όπως το βηματικό, ράμπας και παραβολικό, το σφάλμα σταθερής κατάστασης από την παραπάνω σχέση θα είναι:

**Για βηματική είσοδο:**

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (5.7)$$

**Για είσοδο ράμπας:**

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_u} \quad (5.8)$$

**Για είσοδο παραβολή:**

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} \quad (5.9)$$

Προκειμένου να καθοριστεί ο τύπος του συστήματος, η γενική συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου γράφεται στην παρακάτω μορφή:



$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + T_1s)(1 + T_2s) \dots (1 + T_ms)}{s^j(1 + T_as)(1 + T_bs) \dots (1 + T_ns)} \quad (5.10)$$

Το είδος του συστήματος ελέγχου ανάδρασης αναφέρεται στην σειρά των πόλων του  $G(s)H(s)$  στο  $s = 0$ . Το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση για τύπο συστήματος 0, 1, και 2 συνοψίζεται στον (Πίνακας 5.1).

Πίνακας 5.1: Σφάλμα στην μόνιμη κατάσταση για τύπο 0, 1, 2

j \ R(s)	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$	
0	$\frac{1}{1 + k_p}$	$\infty$	$\infty$	$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
1	0	$\frac{1}{k_u}$	$\infty$	$k_u = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$
2	0	0	$\frac{1}{k_a}$	$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)H(s)$

Δύο συναρτήσεις η **errorzp(z,p,k)** και η **errortf(num,den)** χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του σφάλματος στη μόνιμη κατάσταση ενός συστήματος εξαιτίας κάποιων τυπικών εισόδων όπως η βηματική, ράμπα και παραβολή. Η συνάρτηση **errorzp(z,p,k)** βρίσκει το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση όταν το σύστημα αντιπροσωπεύεται από πόλους, μηδενικά, και το κέρδος. Το **z** είναι ένα διάνυσμα στήλης που περιέχει τα μηδενικά της συνάρτηση μεταφοράς, το **p** είναι το διάνυσμα που περιλαμβάνει τους πόλους και **k** είναι το κέρδος. Εάν η δύναμη του αριθμητή, **m**, είναι μικρότερη από τη δύναμη παρονομαστή, **n**, τότε υπάρχουν **n-m** μηδενικά στο άπειρο. Στη περίπτωση αυτή το διάνυσμα **z** περιέχει **(n-m)** μηδενικά. Η συνάρτηση **errortf(num,den)** βρίσκει το σφάλμα σταθερής κατάστασης όταν η συνάρτηση μεταφοράς εκφράζεται ως ο λόγος των δύο πολυωνύμων. Αυτές οι συναρτήσεις παρουσιάζονται στα παραδείγματα 5.6 και 5.7.

Παράδειγμα 5.6

Προσδιορισμός των σταθερών σφάλματος για βηματική, ράμπα, παραβολή και του σφάλματος μόνιμης κατάστασης για την επόμενη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{10(s + 4)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 5)}$$

```
>> k = 10;
>> z = [-4; inf; inf; inf];
>> p = [0; -1; -2; -5];
>> errorzp(z,p,k)
System type is 1
```

Error Constants:

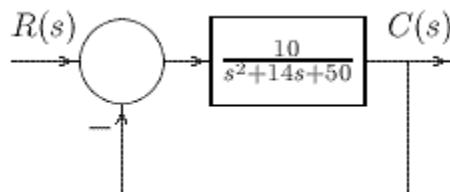
Kp	Kv	Ka
Inf	4	0

Steady-state Errors:

Step	Ramp	Parabolic
0	0.2500	Inf

### Παράδειγμα 5.7

Εύρεση των σταθερών σφάλματος και του σφάλματος μόνιμης κατάστασης του συστήματος που φαίνεται στην Εικόνα 5.4.



Εικόνα 5.4: Σύστημα του παραδείγματος 5.7.

```
>> num = 10;
>> den = [1 14 50];
>> errortf(num,den)
```

System type is 0

Error Constants:

Kp	Kv	Ka
0.2000		0
		0

Steady-state Errors:

Step	Ramp	Parabolic
0.8333	Inf	Inf

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με την μέθοδο του γεωμετρικού τόπου που έχει αναπτυχθεί από τον W.R.Evans. Αυτή η μέθοδος μας επιτρέπει να βρούμε τους πόλους κλειστού βρόχου από τους πόλους ανοικτού βρόχου για όλες τις τιμές του κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Ο γεωμετρικός τόπος ενός συστήματος είναι ένα διάγραμμα των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης όπου ο συντελεστής κέρδους  $K$  ποικίλει. Επομένως, ο σχεδιαστής μπορεί να επιλέξει τον κατάλληλο συντελεστή κέρδους για την επίτευξη των επιθυμητών κριτηρίων απόδοσης. Εάν δεν μπορεί να επιτευχθεί η απαιτούμενη απόδοση, ένας ελεγκτής μπορεί να προστεθεί στο σύστημα και να μεταβάλλει τον γεωμετρικό τόπο με τον απαιτούμενο τρόπο.

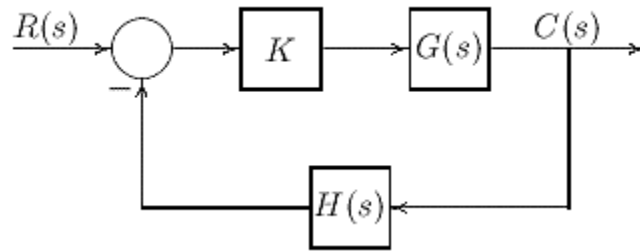
Δοθείσας της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος ελέγχου ανοικτού βρόχου, η συνάρτηση **rlocus(num,den)** παράγει το διάγραμμα του γεωμετρικού τόπου με το διάνυσμα κέρδους να καθορίζεται αυτόματα. Εάν το σύστημα ανοικτού βρόχου ορίζεται στον χώρο κατάστασης τότε χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **rlocus(A,B,C,D)**. Η συνάρτηση **rlocus(num,den,K)** ή **rlocus(A,B,C,D,K)** χρησιμοποιεί το διάνυσμα κέρδους  $K$  που παρέχει ο χρήστης. Αν οι παραπάνω εντολές επικαλούνται τα ορίσματα  $[r,K]$ , τότε ο πίνακας  $r$  και το διάνυσμα κέρδους  $K$  επιστρέφονται, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εντολή **plot(r, 's')** για να πάρουμε το διάγραμμα. Η συνάρτηση **rlocus** είναι ακριβής και κάνουμε χρήση της για να πάρουμε τον γεωμετρικό τόπο. Η εντολή **axis('equal')** θα δημιουργήσει τους άξονες  $x-y$  με τον ίδιο παράγοντα κλιμάκωσης. Η συνάρτηση **rlocfind** βρίσκει τα κέρδη του γεωμετρικού τόπου για τις δοθείσες ρίζες. Η συνάρτηση **[K,Poles] = rlocfind(num,den)** χρησιμοποιείται για να πάρουμε το κέρδος από το διάγραμμα του γεωμετρικού τόπου του συστήματος που δημιουργείται από την **rlocus**. Η **rlocfind** τοποθετεί έναν σταυρό στο παράθυρο γραφικών, ο οποίος χρησιμοποιείται στην επιλογή θέσης του πόλου στον υπάρχων γεωμετρικό τόπο. Το κέρδος του γεωμετρικού τόπου σχετίζεται με αυτό το σημείο και επιστρέφεται στο  $K$ , και όλοι οι πόλοι του συστήματος για αυτό το κέρδος επιστρέφονται στο **POLES**.

Μία καλή γνώση των χαρακτηριστικών του γεωμετρικού τόπου μας δίνει την δυνατότητα να γνωρίζουμε τις επιδράσεις της πρόσθεσης πόλων και μηδενικών στην συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πώς

γίνεται η σχεδίαση του γεωμετρικού τόπου με το χέρι, έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε - κατανοήσουμε ένα απλό σύστημα, και έπειτα να το παράξουμε στον υπολογιστή. Επομένως οι βασικοί κανόνες χάραξης γεωμετρικού τόπου συνοψίζονται παρακάτω.

### 6.1. Μέθοδος γεωμετρικού τόπου

Θεωρούμε ότι η ανατροφοδότηση του συστήματος δίδεται στην Εικόνα 6.1.



Εικόνα 6.1: Σύστημα ελέγχου για γεωμετρικό τόπο.

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του συστήματος είναι η εξής:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad (6.1)$$

Γενικά, η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται από την εξίσωση:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (6.2)$$

όπου  $m$  είναι ο αριθμός των πεπερασμένων μηδενικών και  $n$  ο αριθμός των πεπερασμένων πόλων του βρόχου της συνάρτησης μεταφοράς. Εάν,  $n > m$  τότε υπάρχουν  $(n - m)$  μηδενικά στο άπειρο.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (6.3)$$

Επομένως:

$$\frac{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)} = -K \quad (6.4)$$

Από την σχέση (6.4), καταλαβαίνουμε ότι για να βρίσκεται ένα σημείο στον φανταστικό άξονα στον γεωμετρικό τόπο, όταν  $0 < K < \infty$ , πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

$$K = \frac{(\text{product of vector lengths from finite poles})}{(\text{product of vector lengths from finite zeros})} \quad (6.5)$$

και

$$\sum \text{angles of zeros of } \{G(s)H(s)\} - \sum \text{angles of poles of } G(s)H(s) = r(180)^\circ \quad (6.6)$$

όπου  $r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

## 6.2. Σύνοψη των γενικών κανόνων κατασκευής γεωμετρικού τόπου

- **Αριθμός των τόπων:** Για  $n > m$ , ο αριθμός των τόπων είναι ο αριθμός των κλάδων του γεωμετρικού τόπου, ο οποίος είναι ίσος με τον αριθμό των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου  $G(s)H(s)$ . Ο γεωμετρικός τόπος είναι συμμετρικός σε σχέση με τον πραγματικό άξονα.
- **Σημεία εκκίνησης και λήξης:** Όσο το  $K$  αυξάνεται από το μηδέν στο άπειρο, οι τόποι των πόλων κλειστού βρόχου προέρχονται από τους πόλους του ανοικτού βρόχου ( $K = 0$ ), και προχωρούν με κατεύθυνση και τερματισμό στα μηδενικά ανοικτού βρόχου ( $K \rightarrow \infty$ ). Τα μηδενικά τείνουν να προσελκύσουν τον τόπο προς αυτά ενώ οι πόλοι να τον αποθήσουν.
- **Τμήματα γεωμετρικού τόπου στον πραγματικό άξονα:** Για  $K > 0$ , ο γεωμετρικός τόπος λαμβάνει χώρο σε ένα συγκεκριμένο τμήμα του πραγματικού άξονα αν και μόνο αν υπάρχει ένας μονός αριθμός στο σύνολο των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου στο δεξί τμήμα.
- **Σημεία τομής με τον φανταστικό άξονα:** Χρήση του κριτηρίου Routh για τον καθορισμό των σημείων τομής του γεωμετρικού τόπου με τον άξονα των φανταστικών. Το κέρδος  $K$  καθώς και η τιμή του  $\omega$  μπορούν να βρεθούν από τον πίνακα Routh.
- **Ασύμπτωτες (για  $n \neq m$ ):** Για τα περισσότερα συστήματα ενδιαφέροντος, το  $n$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $m$ . Για  $n > m$  υπάρχουν  $(n - m)$  μηδενικά στο άπειρο, έτσι για  $0 < K < \infty$ ,  $(n - m)$  μηδενικά του γεωμετρικού τόπου καταλήγουν στο άπειρο.

Τα σημεία του γεωμετρικού τόπου είναι ασυμπτωτικά σε ευθείες γραμμές με γωνίες που δίδονται από την εξίσωση:

$$\theta = \frac{r180^\circ}{n - m} \quad (6.7)$$

$$r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

καθώς το  $s$  τείνει στο άπειρο.

Πίνακας 6.1: Γωνίες ασυμπτωτών

n-m	Γωνίες ασυμπτωτών
0	δεν συμπίπτουν
1	180°
2	±90°
3	180° ± 60°
4	±45° ± 135°

Αυτές οι ευθείες γραμμές προέρχονται από ένα σημείο  $s$  στον πραγματικό άξονα, το οποίο καθορίζεται από την εξίσωση:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{poles of } G(s)H(s) - \sum \text{zeros of } G(s)H(s)}{n - m} \quad (6.8)$$

- **Γωνίες αναχώρησης και άφιξης:** Θεωρούμε ένα σημείο  $s_\theta$  αυθαιρέτως δίπλα στους πόλους (για την αναχώρηση) ή στα μηδενικά (για την άφιξη) και έπειτα εφαρμόζουμε την σχέση της θεμελιώδους γωνίας, (6.6) για να πάρουμε:

$$\theta_d = \sum_i \theta_{zi} - \sum_i \theta_{pi} + r(180^\circ) \quad (6.9)$$

$$\theta_a = \sum_i \theta_{pi} - \sum_i \theta_{zi} + r(180^\circ) \quad (6.10)$$

όπου  $r = \pm 1, \pm 3, \dots$

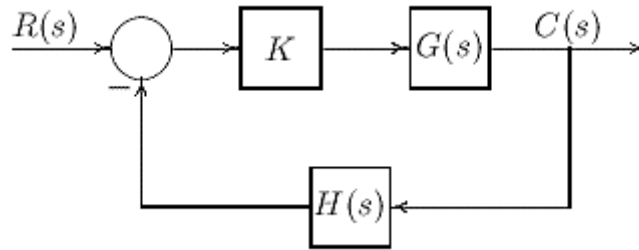
- **Σημεία θλάσης και δεκτά σημεία:** Αυτά είναι σημεία πάνω στον πραγματικό άξονα όπου δύο ή περισσότεροι κλάδοι του γεωμετρικού τόπου ξεκινάνε ή φτάνουν στον άξονα των πραγματικών. Τα σημεία θλάσης μπορούν να προσδιοριστούν εκφράζοντας την χαρακτηριστική εξίσωση για το κέρδος  $K$  ως συνάρτηση του  $s$ ,  $K = -1/G(s)H(s)$ , και έπειτα επιλύουμε την παρακάτω σχέση για τα σημεία θλάσης  $s$  από:

$$\left. \frac{dK(s)}{ds} \right|_{s=s_B} = 0 \quad (6.11)$$

Οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης η οποία ικανοποιεί τον κανόνα 3 είναι τα σημεία θλάσης ή τα δεκτά σημεία. Ο γεωμετρικός τόπος για τα συστήματα 2<sup>ης</sup> τάξης εμφανίζεται ως ευθείες γραμμές, κύκλοι, ή τμήματα αυτών.

### Παράδειγμα 6.1

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για την θέση ενός απλού σερβοκινητήρα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.2.



Εικόνα 6.2: Σύστημα ελέγχου του παραδείγματος 6.1.

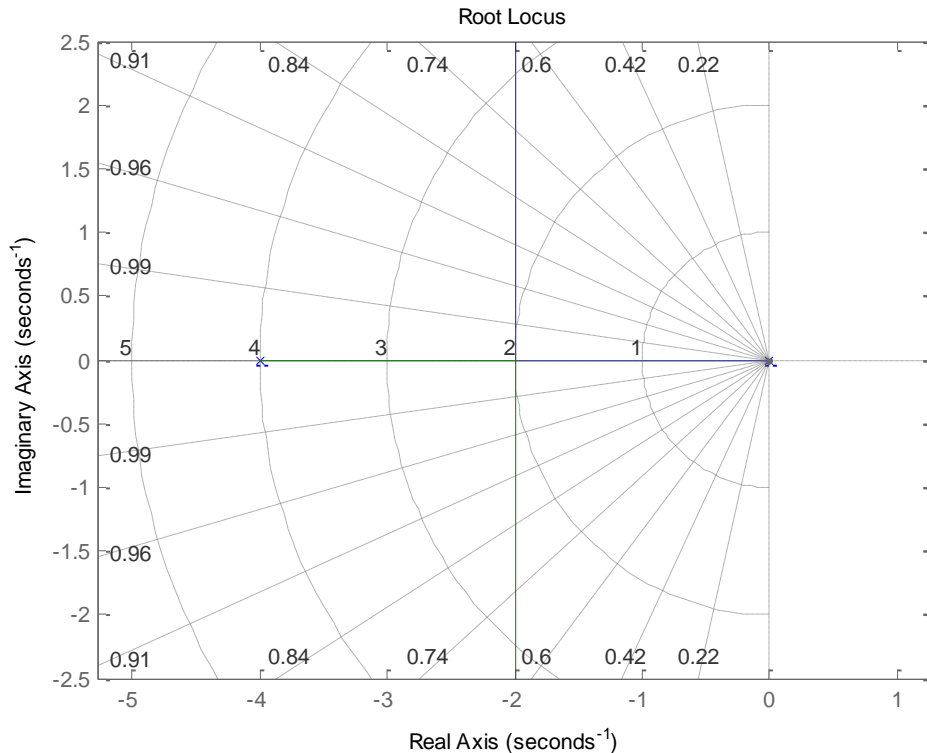
Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι η εξής:

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+4)} = \frac{K}{s^2 + 4s}$$

Η συνάρτηση `rlocus(num,den,K)` του *Control System Toolbox* χρησιμοποιείται για να πάρουμε τον γεωμετρικό τόπο κλειστού βρόχου για τα μεταβαλλόμενα **K**.

```
>> num = 1;
>> den = [1 4 0];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```

Η πρώτη δήλωση παρακάμπτει την αυτόματη κλιμάκωση, και η δεύτερη δήλωση παράγει ένα διάγραμμα με τετραγωνική αναλογία. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.1.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.

- $n - m = 2$  μηδενικά στο άπειρο.
- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = \pm 90^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο:

$$\sigma_a = \frac{-4 - 0}{2} = -2$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds}(s^2 + 4s) = 0$$

δηλαδή  $s = -2$

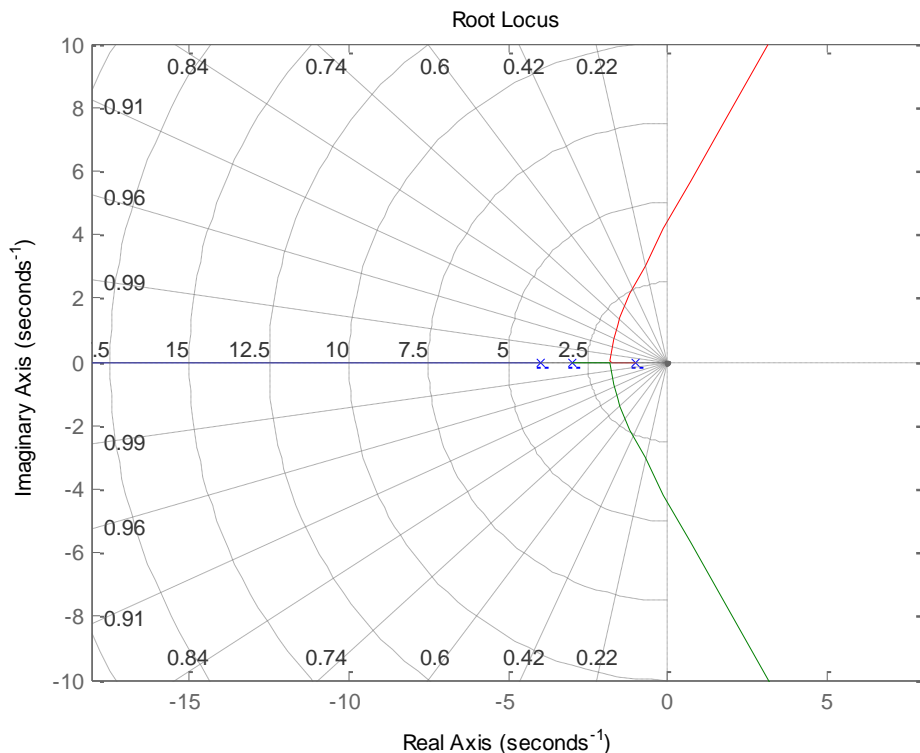
### Παράδειγμα 6.2

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω:

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{K}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

Οι δηλώσεις για να πάρουμε τον γεωμετρικό τόπο είναι παρόμοιες με το παράδειγμα 6.1. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.2.

```
>> num = 1;
>> den = [1 8 19 12];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.2: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.2.



- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 3$  μηδενικά στο άπειρο.
- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = 180^\circ, \pm 60^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο:

$$\sigma_a = \frac{-4 - 3 - 1}{3} = -2.66$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds}(s^3 + 8s^2 + 19s + 12) = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $s_1 = -3.55$  και  $s_2 = -1.78$ , όμως η  $s_1 = -3.55$  δεν είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου για  $K > 0$ , επομένως το σημείο θλάσης είναι το  $s = -1.78$ .

- Ο πίνακας Routh δίνει το σημείο τομής με τον φανταστικό άξονα.

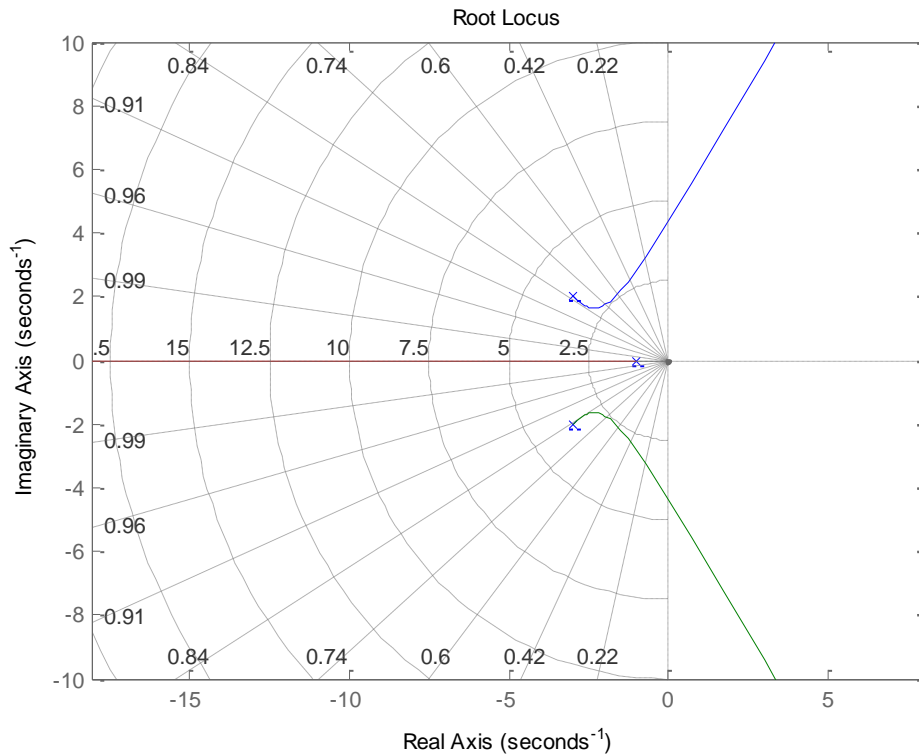
1	19	
8	$12 + K$	$s = \pm j4.36$
$\frac{140 - K}{8}$	0	$K = 140$

### Παράδειγμα 6.3

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.3.

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3-j2)(s+3+j2)} = \frac{K}{s^3 + 7s^2 + 19s + 13}$$

```
>> num = 1;
>> den = [1 7 19 13];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.3: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.3.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 3$  μηδενικά στο άπειρο.
- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = 180^\circ, \pm 60^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο:

$$\sigma_a = \frac{-3 - 3 - 1}{3} = -2.33$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds}(s^3 + 7s^2 + 19s + 13) = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $s_1, s_2 = -2.33 \pm j0.94$ , οι οποίες δεν έχουν τομή με τον άξονα των πραγματικών.

- Οι γωνίες αναχώρησης από τους μιγαδικούς πόλους είναι οι:

$$\theta_{d1} = 0 - (135 + 90) + 180 = -45^\circ$$

$$\theta_{d2} = 0 - (45 + 90) + 180 = 45^\circ$$

- Ο πίνακας Routh δίνει το σημείο τομής με το φανταστικό άξονα και την τιμή του  $K$  σε αυτό το σημείο.

$$\frac{1}{7} \frac{19}{13+K} s = \pm j4.36$$

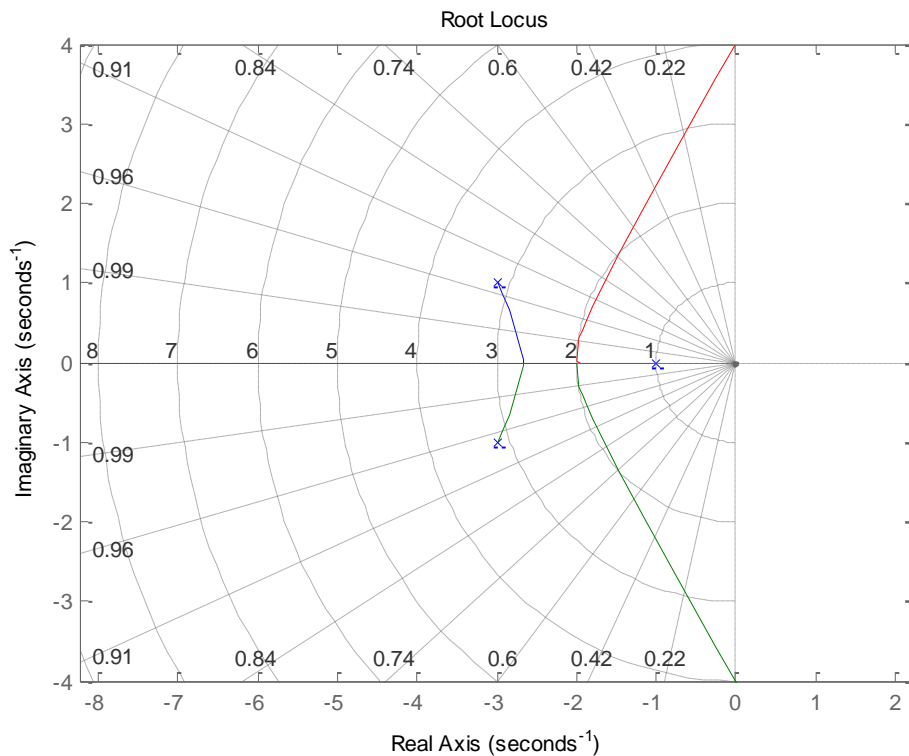
$$\frac{120-K}{7} = 0 \quad K = 140$$

Παράδειγμα 6.4

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.4.

$$KG(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3-j1)(s+3+j1)} = \frac{K}{s^3 + 7s^2 + 16s + 10}$$

```
>> num = 1;
>> den = [1 7 16 10];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.4: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.4.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 3$  μηδενικά στο άπειρο.

- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = 180^\circ, \pm 60^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο:

$$\sigma_a = \frac{-3 - 3 - 1}{3} = -2.33$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds}(s^3 + 7s^2 + 16s + 10) = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $s_1 = -2.0$  και  $s_2 = -2.66$ . Και τα δύο σημεία βρίσκονται στον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$ , και είναι σημεία θλάσης και δεκτά σημεία.

- Οι γωνίες αναχώρησης από τους μιγαδικούς πόλους είναι οι:

$$\theta_{d1} = 0 - (153.43 + 90) + 180 = -63.43^\circ$$

$$\theta_{d2} = 0 - (26.56 + 90) + 180 = 63.43^\circ$$

- Ο πίνακας Routh δίνει το σημείο τομής με τον φανταστικό άξονα.

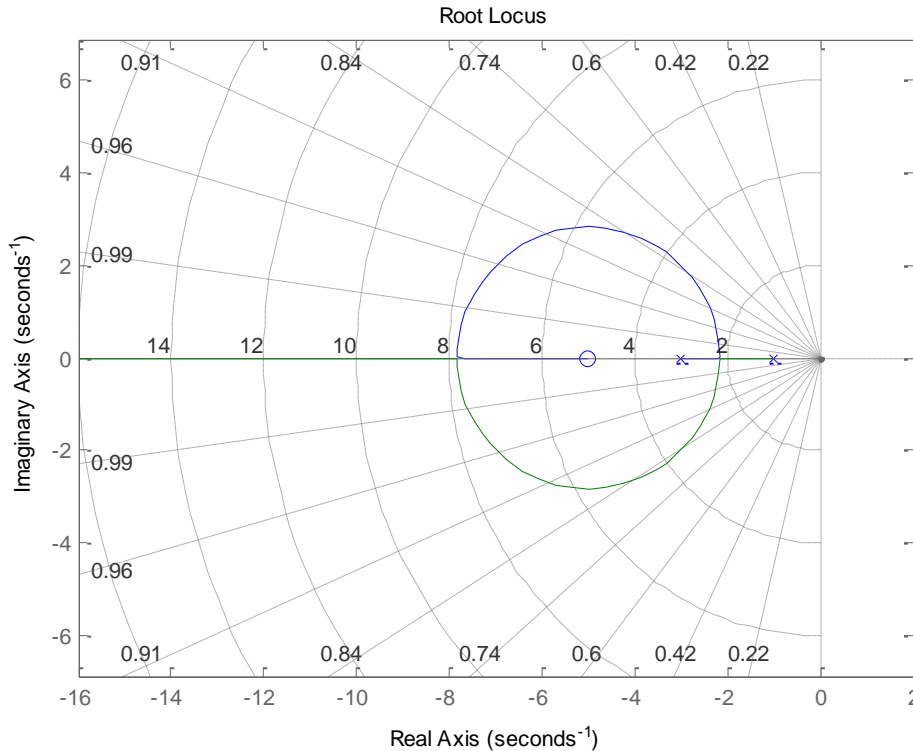
$$\begin{array}{ccc} 1 & 16 & \\ 7 & 10 + K & s = \pm j4 \\ \frac{102 - K}{7} & 0 & K = 102 \end{array}$$

### Παράδειγμα 6.5

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.5.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{(s+1)(s+3)} = \frac{K(s+5)}{(s^2+4s+3)}$$

```
>> num = [1 5];
>> den = [1 4 3];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.5: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.5.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 1$  μηδενικά στο άπειρο.
- Μία ασύμπτωτη με γωνία  $\theta = 180^\circ$ .
- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{(s^2 + 4s + 3)}{(s + 5)} = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $s_1 = -2.17$  και  $s_2 = -7.83$ . Και τα δύο σημεία βρίσκονται στον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$ , και είναι σημεία θλάσης και δεκτά σημεία.

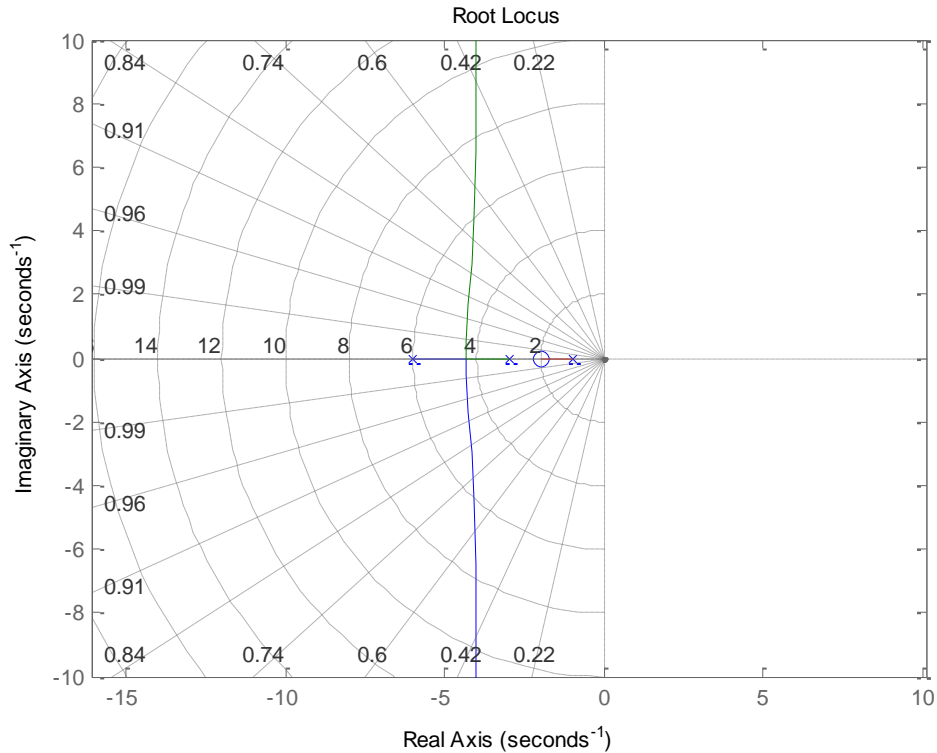
- Δεν υπάρχει τομή στον φανταστικό άξονα για  $K > 0$ .

### Παράδειγμα 6.6

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.6.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+6)} = \frac{K(s+2)}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$$

```
>> num = [1 2];
>> den = [1 10 27 18];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.6: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.6.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 2$  μηδενικά στο άπειρο.
- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = \pm 90^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο:

$$\sigma_a = \frac{(-1 - 3 - 6) - (-2)}{2} = -4$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{(s^3 + 10s^2 + 27s + 18)}{(s+2)} = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $-4.36$  και  $-1.8 \pm j0.0903$ . Άρα η  $s = -4.36$  βρίσκεται στον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$ , επομένως αυτό είναι και το σημείο θλάσης.

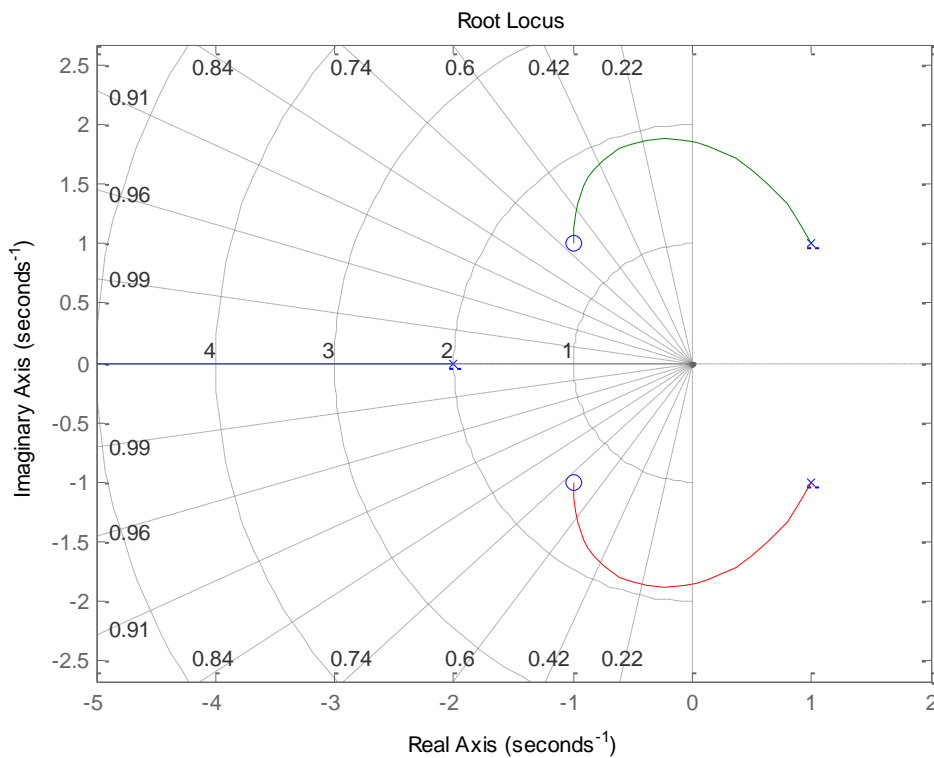
- Δεν υπάρχει τομή στον φανταστικό άξονα για  $K > 0$ .

Παράδειγμα 6.7

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.7.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s + 1 - j1)(s + 1 + j1)}{(s + 2)(s - 1 - j1)(s - 1 + j1)} = \frac{K(s^2 + 2s + 2)}{(s^3 - 2s + 4)}$$

```
>> num = [1 2 2];
>> den = [1 0 -2 4];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.7: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.7.

- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 1$  μηδενικά στο άπειρο.
- Μία ασύμπτωτη με γωνία  $\theta = 180^\circ$ .
- Δεν υπάρχουν σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα για  $K > 0$ .
- Οι γωνίες αναχώρησης από τους μιγαδικούς πόλους είναι οι:

$$\theta_{d1} = (0 + 45) - (90 + 18.43) + 180 = 116.56^\circ$$

$$\theta_{d2} = (-45 + 0) - (-90 - 18.43) + 180 = -116.56^\circ$$

- Οι γωνίες άφιξης από τους μιγαδικούς πόλους είναι οι:

$$\theta_{a1} = (180 + 135 + 45) - (90) + 180 = 90^\circ$$

$$\theta_{a2} = (180 + 45 - 45) - (90) + 180 = -90^\circ$$

- Ο πίνακας Routh δίνει το σημείο τομής με τον φανταστικό άξονα και την τιμή του  $K$  σε αυτό το σημείο.

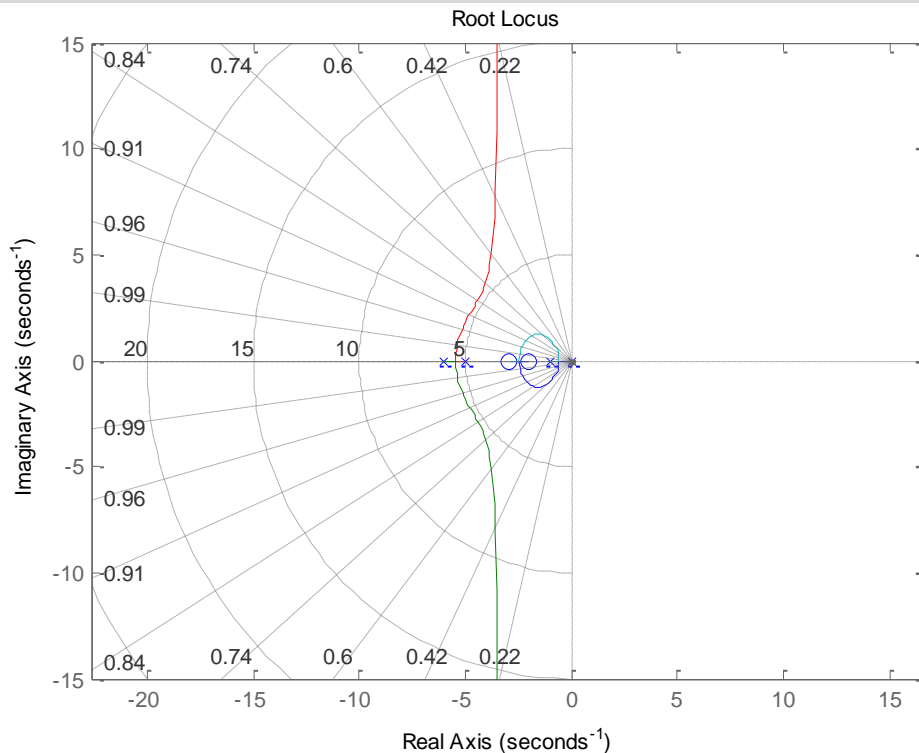
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2K - 2 & \\ K & 2K + 4 & s = \pm j1.86 \\ \frac{2K^2 - 4K - 4}{K} & 0 & K = 2.732 \end{array}$$

### Παράδειγμα 6.8

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο για  $K > 0$  για το σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται παρακάτω. Τα αποτελέσματα δίδονται στο Σχήμα 6.8.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s-5)(s+6)} = \frac{K(s^2 + 5s + 6)}{s^4 + 12s^3 + 41s^2 + 30s}$$

```
>> num = [1 5 6];
>> den = [1 12 41 30 0];
>> rlocus(num,den),grid;
>> axis('equal')
```



Σχήμα 6.8: Γεωμετρικός τόπος του παραδείγματος 6.8.



- Για  $K \geq 0$  το πλήθος των πόλων και των μηδενικών που βρίσκονται δεξιά του τμήματος, είναι περιττό.
- $n - m = 2$  μηδενικά στο άπειρο.
- Δύο ασύμπτωτες με γωνίες  $\theta = \pm 90^\circ$ .
- Δύο ασύμπτωτες που τέμνονται στο πραγματικό άξονα, στο σημείο

$$\sigma_a = \frac{(0 - 1 - 5 - 6) - (-2 - 3)}{2} = -3.5$$

- Τα σημεία θλάσης στον πραγματικό άξονα δίδονται από την εξής σχέση:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{(s^4 + 12s^3 + 41s^2 + 30s)}{(s^2 + 5s + 6)} = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $-0,586$  και  $-5,46$ , τα οποία είναι τα σημεία θλάσης και το  $-2,247$  το οποίο είναι δεκτό σημείο.

- Δεν υπάρχει τομή στον φανταστικό άξονα για  $K > 0$ .

### 6.3. Σχεδίαση γεωμετρικού τόπου

Οι προδιαγραφές σχεδίασης που εξετάζονται εδώ περιορίζονται σε εκείνους που ασχολούνται με την ακρίβεια του συστήματος και με τις προδιαγραφές απόδοσης στο πεδίο του χρόνου. Αυτές οι προδιαγραφές απόδοσης μπορούν να οριστούν σε σχέση με την επιθυμητή θέση των κυρίαρχων πόλων κλειστού βρόχου.

Ο γεωμετρικός τόπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την Προσδιορισμός της τιμής του κέρδους του βρόχου  $K$ , η οποία οδηγεί σε μία ικανοποιητική συμπεριφορά κλειστού βρόχου. Αυτό ονομάζεται αναλογικός ελεγκτής και παρέχει σταδιακή απόκριση με αποκλίσεις από το σημείο εκκίνησης. Υπάρχουν πρακτικά όρια ως προς το πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το κέρδος. Στην πραγματικότητα πολύ υψηλά κέρδη οδηγούν σε αστάθειες. Εάν το διάγραμμα του γεωμετρικού τόπου είναι τέτοιο έτσι ώστε η επιθυμητή απόδοση να μην μπορεί να επιτευχθεί με προσαρμογή του κέρδους, τότε είναι απαραίτητο να αναδιαμορφώσουμε τον γεωμετρικό τόπο προσθέτοντας έναν επιπλέον ελεγκτή  $G_c(s)$  στην συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Ο ελεγκτής  $G_c(s)$  πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε ο γεωμετρικός τόπος να περνάει μέσα από την κατάλληλη περιοχή του μιγαδικού ημιεπιπέδου.

Ο αναλογικός ελεγκτής ( $P$ ) δεν έχει καμία αίσθηση του χρόνου, και η δράση του καθορίζεται από την παρούσα τιμή του σφάλματος. Ένας κατάλληλος ελεγκτής

πρέπει να κάνει διορθώσεις βασιζόμενες σε παλιές και μελλοντικές τιμές. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί συνδυάζοντας την αναλογική με την ολοκληρωτική δράση (**PI**) ή την αναλογική με την διαφορική δράση (**PD**). Υπάρχει επίσης ένας αναλογικός – ολοκληρωτικός - διαφορικός ελεγκτής (**PID**).

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (6.12)$$

Οι ιδανικοί ολοκληρωτικοί και διαφορικοί αντισταθμιστές απαιτούν την χρήση ενεργών ενισχυτών. Άλλοι αντισταθμιστές οι οποίοι μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο με τα στοιχεία παθητικού δικτύου είναι καθυστέρησης, προήγησης, και καθυστέρησης - προήγησης φάσης. Ένας αντισταθμιστής 1<sup>ης</sup> τάξης που έχει ένα μηδενικό και πόλο στην συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G_c(s) = \frac{K_c(s + z_0)}{s + p_0} \quad (6.13)$$

Πολλαπλές συναρτήσεις έχουν αναπτυχθεί για την σχεδίαση γεωμετρικού τόπου. Αυτές είναι:

Πίνακας 6.2: Συναρτήσεις σχεδίασης γεωμετρικού τόπου

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΕΛΕΓΚΤΗΣ
$[numopen, denopen, denclsd] = pcomp(num, den, \zeta)$	Αναλογικός
$[numopen, denopen, denclsd] = phlead(num, den, \zeta)$	Προήγησης Φάσης
$[numopen, denopen, denclsd] = phlag(num, den, \zeta)$	Καθυστέρησης Φάσης
$[numopen, denopen, denclsd] = pdcomp(num, den, s_1)$	PD
$[numopen, denopen, denclsd] = pucomp(num, den, s_1)$	PI
$[numopen, denopen, denclsd] = pidcomp(num, den, s_1)$	PID

Εναλλακτικά, η συνάρτηση

$$[numopen, denopen, denclsd] = rldesign(num, den, s_1)$$

επιτρέπει στον χρήστη να επιλέξει κάποιο από τα παραπάνω σχέδια ελεγκτή. Ο  $s_1 = \sigma + j\omega$  είναι ένας επιθυμητός πόλος της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου, εκτός από τους ελεγκτές **pcomp**, **phlag** όπου, ο λόγος απόσβεσης των κυρίαρχων πόλων αντικαθίσταται από το  $s_1$ . Τα **num**, **den** είναι τα διανύσματα γραμμής των πολυωνυμικών συντελεστών της μη - αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Η συνάρτηση **phlead(num,den,s<sub>1</sub>)** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την σχεδίαση των ελεγκτών προήγησης φάσης. Για να γίνει

αυτό η επιθυμητή θέση του πόλου  $s_1$  πρέπει να θεωρείται ελαφρώς δεξιά της μη αντισταθμισμένης θέσης του πόλου. Αυτή η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και τους παρανομαστές της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς συστήματος ανοικτού και κλειστού βρόχου.

#### 6.4. Ελεγκτής P

Ο αναλογικός ελεγκτής είναι ένας καθαρός ελεγκτής κέρδους. Η σχεδίαση επιτυγχάνεται επιλέγοντας μία τιμή του  $K_0$  η οποία οδηγεί σε μία ικανοποιητική μεταβατική απόκριση. Η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{rldesign}(\text{num}, \text{den}, \zeta)$$

η οποία έχει αναπτυχθεί, εμφανίζει έξι επιλογές για την σχεδίαση του γεωμετρικού τόπου. Για έναν αναλογικό ελεγκτή, η επιλογή **1** θα πρέπει να επιλεγεί. Η επιλογή καλεί την συνάρτηση  $[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{pcomp}(\text{num}, \text{den}, \zeta)$ . Η συνάρτηση αυτή θα υπολογίσει το απαιτούμενο κέρδος  $K_0$ , το οποίο θα οδηγήσει σε έναν επιθυμητό συντελεστή απόσβεσης στην βηματική απόκριση.

#### Παράδειγμα 6.9

Λαμβάνουμε το κέρδος  $K_0$  ενός αναλογικού ελεγκτή για το σύστημα με την εξής συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

έτσι ώστε ο λόγος απόσβεσης των κυρίαρχων πόλων να είναι ίσος με **0.6**. Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο, την βηματική απόκριση, και τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα.

```
>> num = 1;
>> den = [1 5 4 0];
>> zeta = 0.6;
>> [numopen, denopen, denclsd] = rldesign(num, den, zeta); %
compensated
% open-loop & closed-loop transfer function
Compensator type          Enter
-----
Gain compensation          1
Phase-lead (or phase-lag ) 2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K) 3
PD Controller              4
PI Controller              5
PID Controller             6
To quit                    0
```

```

Enter your choice -> 1
Controller gain:   K0 = 2.05

Compensated open-loop
Transfer function:
      2.05
-----
s^3 + 5 s^2 + 4 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      2.05
-----
s^3 + 5 s^2 + 4 s + 2.05

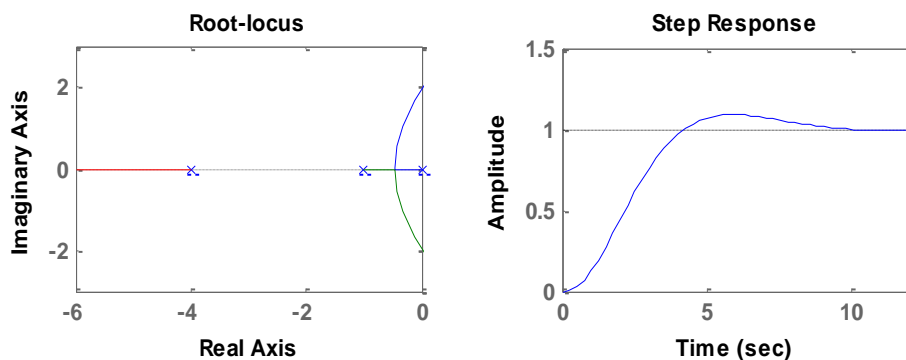
Roots of the compensated characteristic equation:

-4.1563
-0.4219 + 0.5615i
-0.4219 - 0.5615i
>> subplot(221), rlocus(numopen,denopen), grid % Comp. Root-
locus
>> axis('equal'), axis([-6 0 -3 3]), title('Root-locus')
>> subplot(222), step(numopen,denclsd), grid % Comp. step
response
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
Peak time = 5.85495          Percent overshoot = 9.28566
Rise time = 2.70229
Settling time = 8.69947

>> subplot(111)

```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 6.9.



Σχήμα 6.9: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.9.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα το κέρδος του ελεγκτή είναι  $K_0 = 2.05$ . Αυτό το κέρδος θα οδηγήσει σε σφάλμα σταθερής ταχύτητας με τιμή  $K_u = 2.05/4 = 0.5125$ . Έτσι το σφάλμα σταθερής κατάστασης οφείλεται σε μία είσοδο ράμπας η

οποία είναι  $e_{ss} = 1/K_u = 1.95$ . Η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.05}{s^3 + 5s^2 + 4s + 2.05}$$

### 6.5. Σχεδίαση αντιστάθμισης προήγησης φάσης

Στην σχέση (6.13) ο αντισταθμιστής είναι ένα υπιπερατό φίλτρο ή προήγησης φάσης, αν  $p_0 > z_0$ . Το δίκτυο προήγησης φάσης συμβάλει σε μία θετική γωνία του κριτηρίου γωνίας του γεωμετρικού τόπου της σχέσης (6.6) και τείνει να μετατοπίσει τον γεωμετρικό τόπο ανοικτού βρόχου προς το αριστερό τμήμα του μιγαδικού ημιεπιπέδου. Το δίκτυο προήγησης λειτουργεί κυρίως για να τροποποιεί την δυναμική απόκριση ώστε να αυξηθεί το εύρος ζώνης και για την αύξηση της ταχύτητας της απόκρισης. Κατά μία έννοια, το δίκτυο προήγησης προσεγγίζει τον παραγωγικό έλεγχο. Αν  $p_0 < z_0$ , ο αντισταθμιστής είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο ή καθυστέρησης φάσης. Ο αντισταθμιστής καθυστέρησης φάσης προσθέτει μία αρνητική γωνία στο κριτήριο γωνίας, και τείνει να μετατοπίσει τον γεωμετρικό τόπο προς το δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Η γωνία αντιστάθμισης θα πρέπει να είναι μικρή για να διατηρεί την ευστάθεια του συστήματος. Το δίκτυο καθυστέρησης συνήθως χρησιμοποιείται για την αύξηση του κέρδους χαμηλών συχνοτήτων και ως εκ τούτου για να βελτιωθεί η ακρίβεια σταθερής κατάστασης του συστήματος. Το δίκτυο καθυστέρησης είναι μία προσέγγιση αναπόσπαστου ελέγχου.

Το κέρδος συνεχούς ρεύματος του αντισταθμιστή είναι:

$$a_0 = G_c(0) = \frac{K_c z_0}{p_0} \quad (6.14)$$

Για μία δεδομένη επιθυμητή θέση ενός πόλου  $s_1$  του κλειστού βρόχου, η σχεδίαση μπορεί να επιτευχθεί εμπειρικά. Επιλέγουμε μία κατάλληλη τιμή του  $z_0$  και χρησιμοποιούμε το κριτήριο γωνίας της σχέσης (6.6) για τον καθορισμό του  $p_0$ . Στην συνέχεια, το κέρδος  $K_c$  λαμβάνεται με την εφαρμογή του κριτηρίου μέτρου της σχέσης (6.5). Εναλλακτικά, εάν το κέρδος αντισταθμιστή συνεχούς ρεύματος,  $a_0 = (K_c z_0)/p_0$ , έχει καθοριστεί, τότε για μία δοθείσα θέση του πόλου κλειστού βρόχου:

$$s_1 = |s_1| \angle \beta \quad (6.15)$$

Τα  $z_0$  και  $p_0$  είναι τέτοια έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση:

$$1 + G_c(s_1)G_p(s_1) = 0 \quad (6.16)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω παράμετροι βρέθηκαν από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$z_o = \frac{a_0}{a_1}, \quad p_o = \frac{1}{b_1}, \quad K_c = \frac{a_0 p_o}{z_o} \quad (6.17)$$

όπου:

$$a_1 = \frac{\sin \beta + a_0 M \sin(\beta - \psi)}{|s_1| M \sin \psi}$$

$$b_1 = - \frac{\sin(\beta + \psi) + a_0 M \sin \beta}{|s_1| \sin \psi} \quad (6.18)$$

όπου **M** και **ψ** είναι το μέτρο και η γωνία φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου στο **s<sub>1</sub>**, δηλαδή,

$$G_p(s_1) = M \angle \psi \quad (6.19)$$

Για την περίπτωση που το **ψ** είναι είτε **0°** ή **180°**, η σχέση (6.18) δίδεται απο την εξίσωση:

$$a_1 |s_1| \cos \beta \pm \frac{b_1 |s_1|}{M} \cos \beta \pm \frac{1}{M} + a_0 = 0 \quad (6.20)$$

όπου το θετικό πρόσημο ισχύει για **ψ = 0°** ενώ το αρνητικό για **ψ = 180°**. Για αυτήν την περίπτωση το μηδενικό του αντισταθμιστή πρέπει επίσης να ανατεθεί.

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, η συνάρτηση

$$[\text{numopen,denopen,dencld}] = \text{phlead}(\text{num,den},s_1)$$

έχει αναπτυχθεί για την σχεδίαση του ελεγκτή προήγησης φάσης. Τα **num**, **den** είναι ο αριθμητής και ο παρανομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου και το **s<sub>1</sub>** είναι ο επιθυμητός κυρίαρχος πόλος κλειστού βρόχου. Ο χρήστης εισάγει το κέρδος αντισταθμιστή σταθερού ρεύματος. Η συνάρτηση λαμβάνει την συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή και τις ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επίσης, η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές, παρανομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### Παράδειγμα 6.10

Το σύστημα του παραδείγματος 6.9 του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

απαιτείται να έχει ταχύτερη απόκριση και ένα μικρότερο σφάλμα σταθερής κατάστασης εξαιτίας της εισόδου ράμπας. Ένας αντισταθμιστής προήγησης φάσης πρέπει να σχεδιαστεί για να πληροί τις παρακάτω προδιαγραφές:

- Σταθερά χρόνου  $\tau = 1/\zeta\omega_n = 0.6667 \text{ sec}$ .
- Λόγο απόσβεσης  $\zeta = 0.6$ .
- Σφάλμα σταθερής κατάστασης εξαιτίας μοναδιαίας εισόδου ράμπας  $e_{ss} = 0.5$ .

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο, την βηματική απόκριση, και τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα.

Από τις δύο πρώτες προδιαγραφές  $\zeta\omega_n = 1/\tau = 1.5$  και  $\theta = \cos^{-1}0.6 = 53.13^\circ$ . Έτσι ο απαιτούμενος πόλος κλειστού βρόχου είναι  $s_1 = -1.5 + j2$ . Η τρίτη προδιαγραφή απαιτεί:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_u} = 0.5$$

ή

$$K_u = 2$$

όπου:

$$K_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c(s + z_0)}{(s + p_0)} \frac{1}{s(s + 1)(s + 4)} = \frac{K_c z_0}{p_0} \frac{1}{4}$$

Επομένως, το απαιτούμενο κέρδος αντισταθμιστή είναι  $a_0 = (k_c z_0)/p_0 = 4 \times 2 = 8$ . Η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{rldesign}(\text{num}, \text{den}, s_1)$$

με την επιλογή 2 χρησιμοποιείται για την σχεδίαση της αντιστάθμισης φάσης.

```
>> num = 1;
>> den = [1 5 4 0];
>> j = sqrt(-1);
>> s1 = -1.5+j*2;
>> [numopen,denopen,denclsd] = rldesign(num,den,s1);
%compensated
% open-loop & closed-loop transfer function
Compensator type          Enter
-----
Gain compensation          1
Phase-lead (or phase-lag ) 2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K) 3
PD Controller              4
PI Controller              5
PID Controller             6
To quit                    0
```

```

Enter your choice -> 2
Enter the compensator DC Gain -> 8
Gc(0) = 8,      Gc = 82.2813(s + 1.11407)/(s + 11.4583)

Compensated open-loop
Transfer function:
      82.28 s + 91.67
-----
s^4 + 16.46 s^3 + 61.29 s^2 + 45.83 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      82.28 s + 91.67
-----
s^4 + 16.46 s^3 + 61.29 s^2 + 128.1 s + 91.67

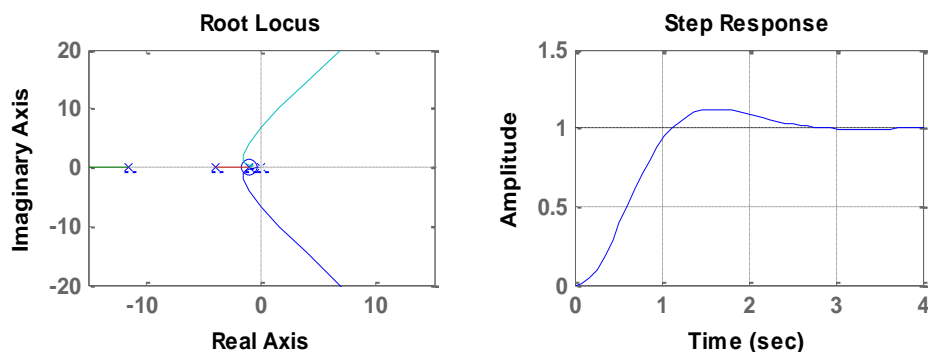
Roots of the compensated characteristic equation:

-12.2623
-1.5000 + 2.0000i
-1.5000 - 2.0000i
-1.1961
>> subplot(2,2,1), rlocus(numopen,denopen), grid %Comp.Root-
locus
>> subplot(2,2,2), step(numopen,denclsd), grid % Comp. step
resp
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
Peak time = 1.6136          Percent overshoot = 12.0833
Rise time = 0.710653
Settling time = 2.53327

>> subplot(111)

```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 6.10.



Σχήμα 6.10: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.10.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι η εξής:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{82.28(s + 1.114)}{s^4 + 16.46s^3 + 61.3s^2 + 128.1s + 91.66}$$



### 6.6. Σχεδίαση καθυστέρησης φάσης

Κατά τον έλεγχο καθυστέρησης φάσης, οι πόλοι και τα μηδενικά του ελεγκτή τοποθετούνται πολύ κοντά μαζί, και ο συνδυασμός βρίσκεται σχετικά κοντά στην περιοχή του μιγαδικού ημιεπιπέδου. Έτσι, οι τόποι στο αντισταθμισμένο σύστημα έχουν μετατοπιστεί μόνο ελαφρά από τις αρχικές τους θέσεις. Ως εκ τούτου, ο αντισταθμιστής καθυστέρησης φάσης χρησιμοποιείται όταν η μεταβατική απόκριση είναι ικανοποιητική, αλλά απαιτεί μία μείωση του σφάλματος σταθερής κατάστασης. Η συνάρτηση  $[numopen, denopen, denclsd] = phlead(num, den, s_1)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αντιστάθμιση καθυστέρησης φάσης καθορίζοντας τον επιθυμητό πόλο  $s_1$  ελαφρά προς τα δεξιά της μη αντισταθμισμένης θέσης του πόλου. Εναλλακτικά, η αντιστάθμιση καθυστέρησης φάσης μπορεί να ληφθεί θεωρώντας ένα μοναδιαίο κέρδος σταθερού ρεύματος για τον αντισταθμιστή βασιζόμενο στην ακόλουθη προσεγγιστική μέθοδο.

$$a_0 = G_c(0) = \frac{K_c z_0}{p_0} = 1 \quad (6.21)$$

Επομένως:

$$K_c = \frac{p_0}{z_0}, \quad \text{όσο } p_0 < z_0 \text{ τότε } K_c < 1 \quad (6.22)$$

Εάν το  $K_0$  είναι το επιθυμητό κέρδος για τον αναμενόμενο πόλο κλειστού βρόχου  $s_1$ , τότε από την σχέση (6.3):

$$K_0 = -\frac{1}{G_p(s_1)} \quad (6.23)$$

Εάν τοποθετήσουμε τον πόλο και το μηδενικό του αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης πολύ κοντά το ένα στο άλλο με το μέτρο τους πολύ μικρότερο από  $s_1$  τότε:

$$G_c(s_1) = \frac{K_c(s + z_0)}{s + p_0} \simeq K_c \quad (6.24)$$

Τώρα, το απαιτούμενο κέρδος  $K$  για να τοποθετηθεί ένας πόλος κλειστού βρόχου κοντά στο  $s_1$  δίδεται από την εξίσωση:

$$K = -\frac{1}{G_c(s_1)G_p(s_1)} \cong \frac{1}{K_c G_p(s_1)} \simeq \frac{K_0}{K_c} \quad (6.25)$$

από  $K_c < 1$ , τότε  $K > K_0$ . Στην συνέχεια, επιλέγουμε τον μηδενικό αντισταθμιστή  $z_0$ , αυθαίρετα μικρό. Στην συνέχεια ο αντισταθμιστικός πόλος είναι:

$$p_0 = K_0 z_0 \quad (6.26)$$

Η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς δίδεται από την εξίσωση:

$$K G_p G_c = K K_c \frac{s + z_0}{s + p_0} G_p \quad (6.27)$$

Η συνάρτηση  $[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{phlead}(\text{num}, \text{den}, \zeta)$  έχει αναπτυχθεί για την σχεδίαση του ελεγκτή καθυστέρησης φάσης, βασιζόμενη στα παραπάνω κριτήρια. Τα **num** και **den** είναι ο αριθμητής και παρανομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου, και το  $\zeta$  είναι ο επιθυμητός λόγος απόσβεσης της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου. Ζητείται από τον χρήστη να εισάγει το κέρδος **K** ώστε να συνειδητοποιήσει το σφάλμα σταθερής κατάστασης και τον μηδενικό αντισταθμιστή,  $z_0$ . Η συνάρτηση λαμβάνει την συνάρτηση μεταφοράς και τις ρίζες του ελεγκτή της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επίσης, η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και παρανομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Ένας ελεγκτής καθυστέρησης φάσης μπορεί να ληφθεί με κατάλληλο συνδυασμό ενός δικτύου καθυστέρησης και προήγησης σε σειρά.

#### Παράδειγμα 6.11

Το σύστημα του παραδείγματος 6.9 του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$KG_p(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

απαιτείται να έχει περίπου ίδιες θέσεις κυρίαρχου πόλου κλειστού βρόχου και ίδιο συντελεστή απόσβεσης (**= 0.6**) όπως στο παράδειγμα 6.9. Σχεδιάζουμε έναν αντισταθμιστή καθυστέρησης - φάσης έτσι ώστε το σφάλμα σταθερής κατάστασης εξαιτίας της μοναδιαίας εισόδου ράμπας,  $e_{ss}$ , να είναι ίσο με **0.125**.

Λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο, την βηματική απόκριση, και τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα.

Το κέρδος **K** το οποίο θα έχει αποτέλεσμα  $e_{ss} = 0.125$  δίδεται από την εξής σχέση:

$$K_u = \frac{1}{e_{ss}} = 8 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

Έτσι, το κέρδος για να καθοριστεί η προδιαγραφή σφάλματος σταθερής κατάστασης είναι **K = 32**.

Η συνάρτηση  $[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{rldesign}(\text{num}, \text{den}, \zeta)$  με την επιλογή **3** χρησιμοποιείται για να λάβουμε τις παραμέτρους της αντιστάθμισης καθυστέρησης φάσης. Επιλέγουμε τιμή για τον μηδενικό αντισταθμιστή, π.χ.  $z_0 = 0.1$ .

```

>> num = 1;
>> den = [1 5 4 0];
>> zeta = 0.6;
>> [numopen,denopen,denclsd] = rldesign(num,den,zeta); %
compensated
% open-loop & closed-loop transfer function
Compensator type          Enter
-----
Gain compensation          1
Phase-lead (or phase-lag ) 2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K) 3
PD Controller              4
PI Controller              5
PID Controller            6
To quit                    0
Enter your choice -> 3
Enter gain K required for the steady-state error
specification -> 32
Enter magnitude of the compensator zero -> 0.1
Gain for the desired closed-loop pole      K0 = 2.05
Gain for the desired steady-state response K = 32
Gc(0) = 1,      Gc = 0.0640625(s + 0.1)/(s + 0.00640625)

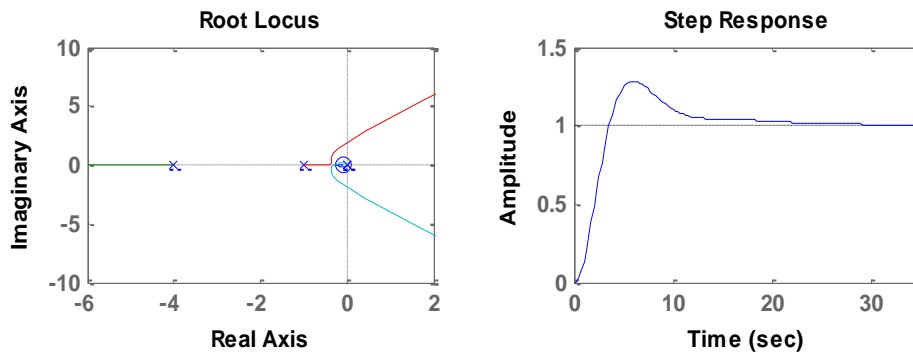
Compensated open-loop
Transfer function:
      2.05 s + 0.205
-----
s^4 + 5.006 s^3 + 4.032 s^2 + 0.02562 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      2.05 s + 0.205
-----
s^4 + 5.006 s^3 + 4.032 s^2 + 2.076 s + 0.205

Roots of the compensated characteristic equation:
-4.1530
-0.3646 + 0.5142i
-0.3646 - 0.5142i
-0.1242
>> subplot(221), rlocus(numopen,denopen), grid % Comp. Root-
locus
>> subplot(222), step(numopen,denclsd), grid % Comp. step
response
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
Peak time = 6.03676          Percent overshoot = 28.1944
Rise time = 2.33421
Settling time = 22.0543
>> subplot(111)

```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 6.11.



Σχήμα 6.11: Γραφική γεωμετρικού τόπου και βηματική απόκριση του παραδείγματος 6.11.

Μπορούμε να δούμε ότι οι μιγαδικοί πόλοι έχουν τοποθετηθεί περίπου στην ίδια θέση όπως στο παράδειγμα 6.9. Το σφάλμα σταθερής κατάστασης μειώθηκε κατά ένα μεγάλο βαθμό, αλλά το ποσοστό υπέρβασης έχει αυξηθεί. Η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.05(s + 0.1)}{s^4 + 5.006s^3 + 4.032s^2 + 2.075s + 0.205}$$

### 6.7. Σχεδίαση PID

Ένας από τους πιο συνηθισμένους ελεγκτές που είναι εμπορικά διαθέσιμος είναι ο ελεγκτής PID. Διαφορικές διεργασίες εφαρμόζονται σε διαφορετικούς συνδυασμούς απλού αναλογικού, ολοκληρωτικού, και παραγωγικού ελέγχου. Το καθήκον του μηχανικού ελέγχου είναι να προσαρμόζει τους τρεις παράγοντες κέρδους για να καταλήξει σε έναν αποδεκτό βαθμό μείωσης σφάλματος ταυτόχρονα με την αποδεκτή δυναμική απόκριση. Για μία επιθυμητή θέση του πόλου κλειστού βρόχου  $s_1$ , όπως δίδεται από την σχέση (6.15), οι ακόλουθες εξισώσεις [12] που λαμβάνονται για την ικανοποίηση της σχέσης (6.16):

$$K_P = \frac{-\sin(\beta + \psi)}{M \sin \beta} - \frac{2K_I \cos \beta}{|s_1|}$$

$$K_D = \frac{\sin \psi}{|s_1| M \sin \beta} + \frac{K_I}{|s_1|^2} \quad (6.28)$$

Για τους ελεγκτές PI ή PD, το κατάλληλο κέρδος τίθεται στο μηδέν. Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για τον μιγαδικό πόλο  $s_1$ . Για την περίπτωση που ο  $s_1$  είναι πραγματικός, το μηδενικό του ελεγκτή PD ( $z_0 = K_P/K_D$ ) και το μηδενικό του ελεγκτή PI ( $z_0 = K_I/K_P$ ) προσδιορίζονται και

τα αντίστοιχα κέρδη για να ικανοποιηθούν τα κριτήρια γωνίας και μέτρου που λαμβάνονται αντίστοιχα. Για την σχεδίαση PID ελεγκτή, η τιμή του  $K_I$  ώστε να επιτευχθεί ένα επιθυμητό σφάλμα μόνιμης κατάστασης έχει καθοριστεί. Και πάλι, η σχέση (6.28) εφαρμόζεται μόνο για τον μιγαδικό πόλο  $s_1$ .

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, οι συναρτήσεις:

$$[\text{numopen,denopen,denc1sd}] = \text{pdcomp}(\text{num,den},s_1),$$

$$[\text{numopen,denopen,denc1sd}] = \text{picomp}(\text{num,den},s_1),$$

$$[\text{numopen,denopen,denc1sd}] = \text{pidcomp}(\text{num,den},s_1)$$

έχουν αναπτυχθεί για την σχεδίαση PID ελεγκτή. Τα **num** και **den** είναι ο αριθμητής και ο παρανομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου και  $s_1$  ο επιθυμητός κυρίαρχος πόλος κλειστού βρόχου. Η συνάρτηση λαμβάνει την συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή και τις ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επίσης, η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και παρανομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### 6.7.1. Ελεγκτής PD

Εδώ και το σφάλμα και τα παράγωγά του χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο, και η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G_c(s) = K_P + K_D s = K_D \left( s + \frac{K_P}{K_D} \right) \quad (6.29)$$

Από το ανωτέρω, μπορούμε να δούμε ότι ο ελεγκτής PD είναι ισοδύναμος με την πρόσθεση ενός απλού μηδενικού στο  $s = -K_P/K_D$  στην συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου η οποία βελτιώνει την μεταβατική απόκριση. Από μία διαφορετική σκοπιά, ο ελεγκτής PD μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την βελτίωση του σφάλματος σταθερής κατάστασης, διότι προσδοκά μεγάλα σφάλματα και προσπαθεί για διόρθωσή τους πριν αυτά συμβούν. Η συνάρτηση **[numopen,denopen,denc1sd] = rldesign(num,den,s1)**, με την επιλογή **4** χρησιμοποιείται για την σχεδίαση του ελεγκτή PD. Η χρήση του παρουσιάζεται στο παρακάτω παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 6.12

Για το σύστημα του παραδείγματος 6.9, σχεδιάζετε ο ελεγκτής PD για να τοποθετηθεί ο κυρίαρχος πόλος κλειστού βρόχου στη ίδια θέση όπως στο

παράδειγμα 6.10, δηλαδή,  $s_1 = -1.5 \pm j2$ . Λαμβάνουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα.

```
>> num = 1;
>> den = [1 5 4 0];
>> j=sqrt(-1);
>> s1 = -1.5+j*2;
>> [numopen,denopen,denclsd] = rldesign(num,den,s1); %
Compensated
% open-loop & closed-loop transfer function
Compensator type          Enter
-----
Gain compensation          1
Phase-lead (or phase-lag ) 2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K) 3
PD Controller              4
PI Controller              5
PID Controller             6
To quit                    0
Enter your choice -> 4
Gc = 12.5 + 8.25s

Compensated open-loop
Transfer function:
  8.25 s + 12.5
-----
s^3 + 5 s^2 + 4 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
  8.25 s + 12.5
-----
s^3 + 5 s^2 + 12.25 s + 12.5

Roots of the compensated characteristic equation:
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
-1.5000 + 2.0000i
-1.5000 - 2.0000i
-2.0000
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
Peak time = 1.39333          Percent overshoot = 17.2375
Rise time = 0.613333
Settling time = 2.37333
```

Έτσι η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$G_p G_c = \frac{8.25s + 12.5}{s^3 + 5s^2 + 4s}$$

Το σφάλμα σταθερής κατάστασης οφείλεται σε είσοδο ράμπα και είναι:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_u} = \frac{4}{12.5} = 0.32$$

Έχουμε περίπου την ίδια ταχύτητα απόκρισης, αλλά ελαφρώς υψηλότερο ποσοστό υπέρβασης σε σύγκριση με την σχεδίαση προήγησης φάσης του παραδείγματος 6.10.

### 6.7.2. Ελεγκτής PI

Η ολοκλήρωση του σφάλματος καθώς και το ίδιο το σφάλμα χρησιμοποιείται για τον έλεγχο, και η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p(s + K_I/K_p)}{s} \quad (6.30)$$

Ο ελεγκτής PI είναι συνηθισμένος στον έλεγχο διαδικασίας ή τα συστήματα ρύθμισης. Ο ολοκληρωτικός έλεγχος βασίζει τις διορθωτικές ενέργειές του στο αθροιστικό σφάλμα που είναι ενσωματωμένο. Ο ελεγκτής αυξάνει τον τύπο του συστήματος κατά 1 και χρησιμοποιείται για την μείωση των σφαλμάτων σταθερής κατάστασης.

Η συνάρτηση `[numopen,denopen,dencldsd] = rldesign(num,den,s1)`, με την επιλογή 4 χρησιμοποιείται για την σχεδίαση του ελεγκτή PI. Παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 6.13

Για το σύστημα του παραδείγματος 6.9, σχεδιάζετε ο ελεγκτής PI για να τοποθετηθεί ο κυρίαρχος πόλος κλειστού βρόχου στη ίδια θέση όπως στην σχεδίαση προήγησης φάσης του παραδείγματος 6.11, δηλαδή,  $s_1 = -0.3646 + j0.514$ .

```
>> num = 1; den = [1 5 4 0];
>> s1 = -.3646+j*.5142;
>> [numopen,denopen,dencldsd] = rldesign(num,den,s1);
Compensator type                                Enter
-----
Gain compensation                                1
Phase-lead (or phase-lag )                      2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K)              3
PD Controller                                    4
PI Controller                                    5
PID Controller                                    6
To quit                                          0
```

```

Enter your choice -> 5
Gc = 2.05308 + 0.194057/s
Compensated open-loop
Transfer function:
  2.053 s + 0.1941
-----
s^4 + 5 s^3 + 4 s^2

Compensated closed-loop
Transfer function:
      2.053 s + 0.1941
-----
s^4 + 5 s^3 + 4 s^2 + 2.053 s + 0.1941

Roots of the compensated characteristic equation:

-4.1532
-0.3646 + 0.5142i
-0.3646 - 0.5142i
-0.1176
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications.
Peak time = 6.03765          Percent overshoot = 28.7029
Rise time = 2.29601
Settling time = 23.1302

```

Έτσι η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$G_P G_c = \frac{2.053s + 0.194}{s^2(s^2 + 5s + 4)}$$

Ο ελεγκτής PI αυξάνει τον τύπο συστήματος κατά 1. Δηλαδή, έχουμε ένα σφάλμα τύπου 2 και το σφάλμα σταθερής κατάστασης οφείλεται σε είσοδο ράμπα και είναι μηδέν. Η ταχύτητα απόκρισης και το ποσοστό υπέρβασης είναι σχεδόν ίδια με την σχεδίαση καθυστέρησης φάσης.

### 6.7.3. Ελεγκτής PID

Ο ελεγκτής PID χρησιμοποιείται για τη βελτίωση της δυναμικής απόκρισης, καθώς και για την μείωση ή την εξάλειψη του σφάλματος σταθερής κατάστασης. Η συνάρτηση `[numopen,denopen,denclsd] = rldesign(num,den,s1)`, με την επιλογή **6** χρησιμοποιείται για την σχεδίαση του ελεγκτή PID. Η χρήση του παρουσιάζεται στο παρακάτω παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 6.14

Για το σύστημα του παραδείγματος 6.9, σχεδιάζετε ο ελεγκτής PID για την τοποθέτηση του κυρίαρχου πόλου κλειστού βρόχου στη ίδια θέση όπως στο



παράδειγμα 6.10, δηλαδή,  $s_1 = -1.5 \pm j2$ . Λαμβάνουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα.

```
>> num = 1; den = [1 5 4 0];
>> s1 = -1.5+j*2;
>> [numopen,denopen,dencld] = rldesign(num,den,s1);
%Returns compensated open-loop & closed-loop
Compensator type          Enter
-----
Gain compensation          1
Phase-lead (or phase-lag ) 2
Phase-lag (Approximate Kc = K0/K) 3
PD Controller              4
PI Controller              5
PID Controller             6
To quit                    0
Enter your choice -> 6
Enter the integrator gain KI -> 0.1
Gc = 12.548 + 0.1/s + 8.266s

Compensated open-loop
Transfer function:
8.266 s^2 + 12.55 s + 0.1
-----
s^4 + 5 s^3 + 4 s^2

Compensated closed-loop
Transfer function:
8.266 s^2 + 12.55 s + 0.1
-----
s^4 + 5 s^3 + 12.27 s^2 + 12.55 s + 0.1

Roots of the compensated characteristic equation:

-1.5000 + 2.0000i
-1.5000 - 2.0000i
-1.9920
-0.0080

>> timespec(numopen,dencld); % Time-domain specifications
Peak time = 1.39333          Percent overshoot = 17.5549
Rise time = 0.613333
Settling time = 2.4
```

Έτσι η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$G_P G_c = \frac{8.266s^2 + 12.55s + 0.1}{s^2(s^2 + 5s + 4)}$$

Ο ελεγκτής PID αυξάνει τον τύπο συστήματος κατά 1. Δηλαδή, έχουμε ένα σφάλμα τύπου 2 και το σφάλμα σταθερής κατάστασης οφείλεται σε είσοδο ράμπα και είναι μηδέν. Η μεταβατική απόκριση είναι εξίσου βελτιωμένη.

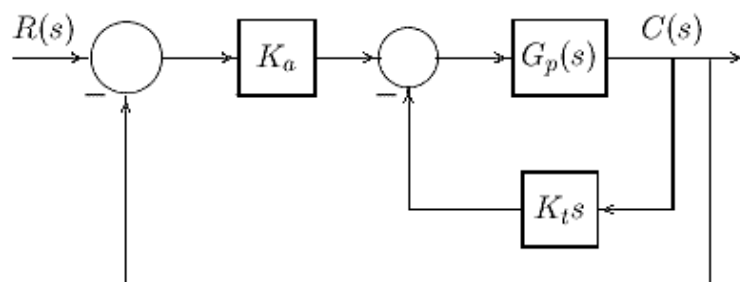
### 6.8. Έλεγχος βρόχου αρνητικής ανατροφοδότησης

Οι ελεγκτές που συζητήθηκαν στο προηγούμενο τμήμα τοποθετούνται σε σειρά με το σύστημα για να ελέγχονται. Μία άλλη τεχνική είναι η τοποθέτηση του αντιστάθμιστή σε έναν βρόχο αρνητικής ανατροφοδότησης. Το σχεδιάγραμμα αυτό ονομάζεται αντιστάθμιση βρόχου αρνητικής ανατροφοδότησης. Η επιλογή του σχεδιαγράμματος αντιστάθμισης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το σύστημα ελέγχου, το επίπεδο ισχύος των διαθέσιμων σημάτων, καθώς και από τις απαιτούμενες προδιαγραφές σχεδίασης. Η αντιστάθμιση ανατροφοδότησης χρησιμοποιείται για την βελτίωση της παρακολούθησης του συστήματος μίας επιθυμητής εισόδου και για να επιφέρει ένα σύστημα το οποίο είναι λιγότερο ευαίσθητο σε διαταραχές και σε παραλλαγές παραμέτρων. Σε γενικές γραμμές, ένας ενισχυτής μπορεί να μην είναι αναγκαίος εφόσον ο ελεγκτής τοποθετείται σε ένα αρνητικό βρόχο, ο οποίος είναι σε υψηλότερο επίπεδο ισχύος από την αντιστάθμιση σειράς.

Η τεχνική αντιστάθμισης ανατροφοδότησης ασχολείται κυρίως με την προσθήκη του ρυθμού ή της επιτάχυνσης ανάδρασης. Σε γενικές γραμμές, ο ελεγκτής PID ή οι ελεγκτές καθυστέρησης και προήγησης φάσης που συζητήθηκαν νωρίτερα μπορούν όλοι να εφαρμοστούν ως ελεγκτές βρόχου αρνητικής ανατροφοδότησης.

### 6.9. Ρυθμός ανατροφοδότησης ή έλεγχος ανατροφοδότησης ταχύμετρου

Το πιο κοινό παράδειγμα μίας αντιστάθμισης ανατροφοδότησης είναι ο ρυθμός ανατροφοδότησης. Ο ρυθμός σήματος συνήθως υλοποιείται με ένα ταχύμετρο. Ο ρυθμός ανατροφοδότησης χρησιμοποιείται για την απόσβεση ταλαντώσεων και συνήθως χρησιμοποιείται με μία μοναδιαία ανατροφοδότηση όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.3. Τα αποτελέσματα του ρυθμού ανατροφοδότησης είναι παρόμοια με εκείνα ενός ελεγκτή προήγησης σειράς. Ως εκ τούτου, έχει σαν αποτέλεσμα την μετακίνηση του γεωμετρικού τόπου προς τα αριστερά και την βελτίωση του χρόνου απόκρισης.



Εικόνα 6.3: Βρόχος ελέγχου αρνητικής ανατροφοδότησης με ταχύμετρο.

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του συστήματος είναι:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_p(s)}{1 + (K_a + K_t s) G_p(s)} \quad (6.31)$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$1 + H(s)G_p(s) = 0 \quad (6.32)$$

όπου η  $H(s) = K_a + K_t s$  είναι η ίδια όπως στον ελεγκτή PD. Για την επιθυμητή θέση ενός πόλου κλειστού βρόχου  $s_1$  όπως δίδεται από την σχέση (6.15), οι ακόλουθες εξισώσεις λαμβάνονται για την ικανοποίηση της σχέσης (6.32).

$$K_a = \frac{-\sin(\beta + \psi)}{M \sin \beta}$$

$$K_t = \frac{\sin \psi}{|s_1| M \sin \beta} \quad (6.33)$$

όπου  $M$  και  $\psi$  είναι το μέτρο και η γωνία φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου στο  $s_1$ . Τα  $|s_1|$  και  $\beta$  είναι το μέτρο και η γωνία φάσης του επιθυμητού πόλου κλειστού βρόχου. Στον ρυθμό ανατροφοδότησης, δεν εμφανίζεται κανένα μηδενικό στην συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου. Επομένως, η βηματική απόκριση κλειστού βρόχου θα είναι πιο αργή από τον ελεγκτή σειράς PD.

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{tachfdbk}(\text{num}, \text{den}, s_1)$$

έχει αναπτυχθεί για τον έλεγχο ανατροφοδότησης κλειστού βρόχου με ταχύμετρο.

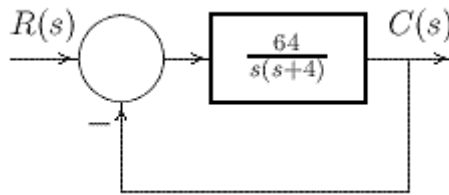
Εναλλακτικά η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{fbdesign}(\text{num}, \text{den}, s_1)$$

με την επιλογή **1** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτήν την σχεδίαση. Ο πόλος  $s_1 = \sigma + j\omega$  είναι ένας επιθυμητός πόλος της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου. Τα **num** και **den** είναι τα διανύσματα σειράς των πολυωνυμικών συντελεστών της μη αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.

Παράδειγμα 6.15

Καθορισμός της βηματικής απόκρισης και των προδιαγραφών στο πεδίο του χρόνου για το σύστημα στην Εικόνα 6.4.



Εικόνα 6.4: Σύστημα ελέγχου του παραδείγματος 6.15.

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου δίδεται από την σχέση:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{64}{s^2 + 4s + 64}$$

Οι πόλοι κλειστού βρόχου βρίσκονται στο σημείο  $-2 + j7.746$  με έναν λόγο απόσβεσης **0.25** και σταθερά χρόνου  $\tau = 1/\zeta\omega_n = 2$ .

```
>> num = 64; denc = [1 4 64]; timespec(num,denc);
Peak time = 0.405          Percent overshoot = 44.4339
Rise time = 0.16
Settling time = 1.76
```

Η απόκριση κάνει μεγάλη ταλάντωση με μία υπέρβαση της τάξης του **44.4** τις εκατό.

Ένας έλεγχος ανατροφοδότησης ταχύμετρου, φαίνεται στην Εικόνα 6.4, και χρησιμοποιείται για την βελτίωση του χρόνου απόκρισης. Καθορίζουμε τις τιμές των  $K_a$  και  $K_t$  τα οποία έχουν σαν αποτέλεσμα την σχεδίαση του συστήματος έχοντας κυρίαρχους πόλους με σταθερά χρόνου  $\tau = 0.125 \text{ sec}$ , και έναν λόγο απόσβεσης  $\zeta = 0.707$ . Λαμβάνουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου και το διάγραμμα της βηματικής απόκρισης των μη αντισταθμισμένων και αντισταθμισμένων συστημάτων. Από τις παραπάνω προδιαγραφές,  $\zeta\omega_n = 1/\tau = 8$  και  $\theta = \cos^{-1}0.707 = 45^\circ$ . Έτσι ο απαιτούμενος πόλος κλειστού βρόχου είναι  $s_1 = -8 + j8$ . Η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{dencisd}] = \text{fbdesign}(\text{num}, \text{den}, s_1)$$

με την επιλογή **1** χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση του ρυθμού ανατροφοδότησης.

```

>> num = 64;
>> den = [1 4 0];dencu=[1 4 64];%uncompensated closed-loop
denominator
>> s1 = -8+j*8;
>> [numopen,denopen,denc1sd] = fbdesign(num,den,s1); %
compensated
% open-loop & closed-loop transfer function
Compensator type                                Enter
-----
Rate feedback                                    1
Minor-loop design with passive network          2
To quit                                          0
Enter your choice -> 1
Ka = 2 , Kt = 0.1875s

Compensated open-loop
Transfer function:
    128
-----
s^2 + 4 s

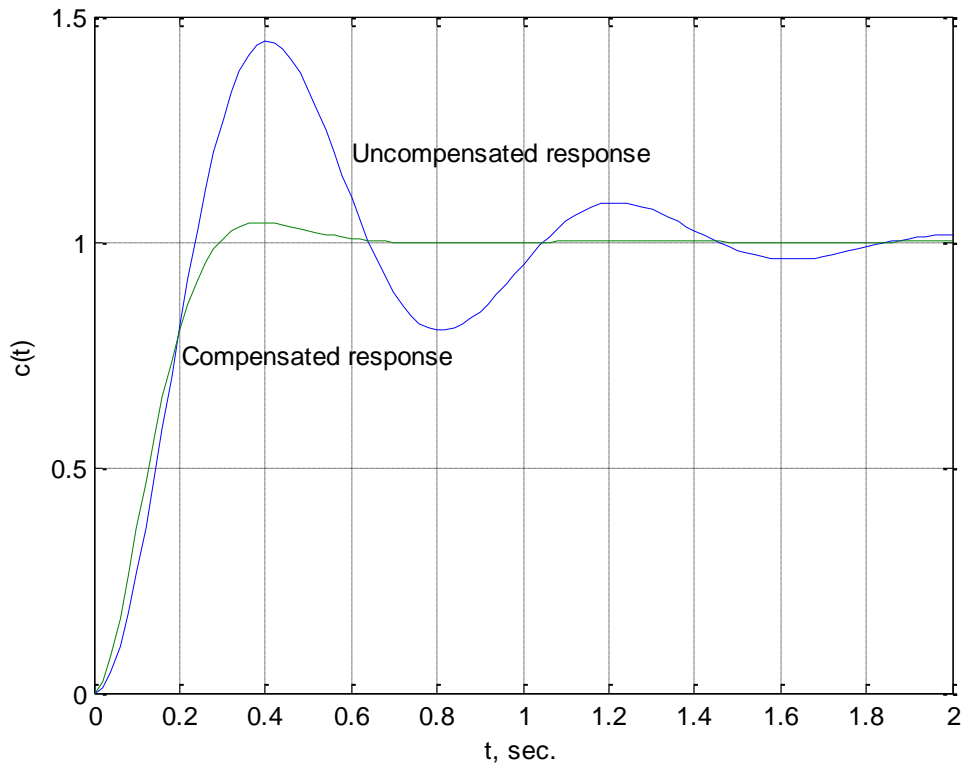
Compensated closed-loop
Transfer function:
    128
-----
s^2 + 16 s + 128

Roots of the compensated characteristic equation:

-8.0000 + 8.0000i
-8.0000 - 8.0000i
>> t = 0:.02:2;
>> c1 = step(num,dencu,t); % Uncompensated system step
response
>> timespec(num,dencu); % uncompensated time-domain
specifications
Peak time = 0.405           Percent overshoot = 44.4339
Rise time = 0.16
Settling time = 1.76
>> c2 = step(numopen,denc1sd,t); % Compensated system step
response
>> timespec(numopen,denc1sd);%Compensated time-domain
specifications
Peak time = 0.3925           Percent overshoot = 4.32138
Rise time = 0.19
Settling time = 0.52625
>> plot(t,c1,t,c2); xlabel('t, sec. '), ylabel('c(t)'), grid
>> text(.60, 1.2, 'Uncompensated response')
>> text(.205, 0.75, 'Compensated response')

```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 6.12.



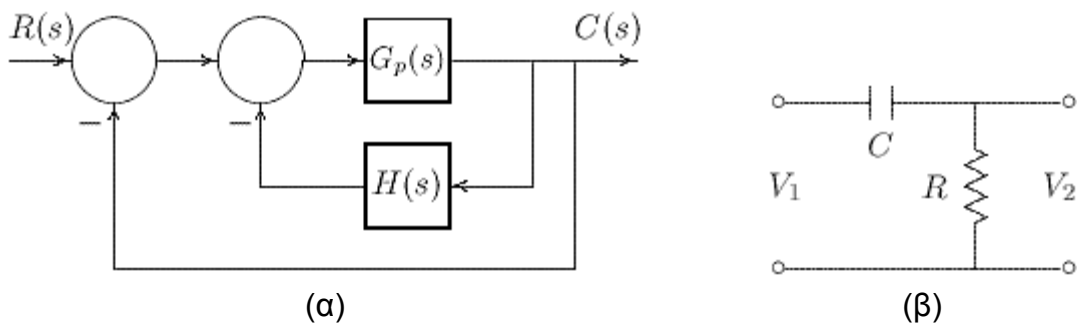
Σχήμα 6.12: Μοναδιαία βηματική απόκριση του συστήματος του παραδείγματος 6.15

**6.10. Αντιστάθμιση ανατροφοδότησης με χρήση παθητικών στοιχείων**

Για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος, αντί να γίνει χρήση ενός ταχύμετρου, ένα δίκτυο RC με χαρακτηριστικά προήγησης φάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε έναν βρόχο αρνητικής ανατροφοδότησης για την αντιστάθμιση όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.5(α).

Ο ελεγκτής  $H(s)$  περιλαμβάνει ένα απλό δίκτυο RC όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.5(β) με την συνάρτηση μεταφοράς να δίνεται από την εξίσωση:

$$H(s) = \frac{a_1 s}{b_1 s + 1} \tag{6.34}$$



Εικόνα 6.5: Αντιστάθμιση ανατροφοδότησης με χρήση παθητικών στοιχείων.

Η χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου για το σύστημα στην Εικόνα 6.5 (α) είναι:

$$1 + G_p(s) + H(s)G_p(s) = 0 \quad (6.35)$$

Για μία δεδομένη θέση του πόλου κλειστού βρόχου:

$$s_1 = |s_1| \angle \beta \quad (6.36)$$

Τα  $a_1$  και  $b_1$  λαμβάνονται έτσι ώστε η σχέση (6.35) να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$H(s)G_p(s) = -[1 + G_p(s)] = K \angle \gamma \quad (6.37)$$

και ικανοποιείται. Μπορεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω παράμετροι βρέθηκαν από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$a_1 = \frac{\sin \beta}{|s_1| M \sin \theta}$$

$$b_1 = -\frac{\sin(\theta - \beta)}{|s_1| \sin \theta} \quad (6.38)$$

όπου  $M = |G_p(s_1)|/K$ ,  $\psi = \angle G_p(s_1)$ ,  $\theta = \gamma - \psi$ .

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, η συνάρτηση

$$[\text{numopen,denopen,dencldsd}] = \text{pnetfdbk}(\text{num,den},s_1)$$

έχει αναπτυχθεί για τον έλεγχο βρόχου αρνητικής ανατροφοδότησης με ένα παθητικό δίκτυο.

Η συνάρτηση  $[\text{numopen,denopen,dencldsd}] = \text{fbdesign}(\text{num,den},s_1)$  με την επιλογή **2** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτήν την σχεδίαση. Ο πόλος  $s_1 = \sigma + j\omega$  είναι ένας επιθυμητός πόλος της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου. Τα **num** και **den** είναι τα διανύσματα σειράς των πολυωνυμικών συντελεστών της μη αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου.

### Παράδειγμα 6.16

Για το σύστημα του παραδείγματος 6.15, αντί της τοποθέτησης του ταχύμετρου στον αρνητικό βρόχο, κάνουμε χρήση του ελεγκτή παθητικού δικτύου που φαίνεται στην Εικόνα 6.5(α). Γίνεται Προσδιορισμός των παραμέτρων του ελεγκτή για να τοποθετηθούν οι κυρίαρχοι πόλοι κλειστού βρόχου στην ίδια θέση όπως στο παράδειγμα 6.15, δηλαδή  $s_1 = -8 + j8$ . Λαμβάνουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου για το αντισταθμισμένο σύστημα. Η συνάρτηση  $[\text{numopen,denopen,dencldsd}] = \text{fbdesign}(\text{num,den},s_1)$  με την επιλογή **2** χρησιμοποιείται.

```

>> num = 64;
>> den = [1 4 0];
>> s1 = -8+j*8;
>> [numopen,denopen,denclsd] = fbdesign(num,den,s1);
% Returns compensated open-loop &
% closed-loop transfer function
Compensator type                                Enter
-----
Rate feedback                                    1
Minor-loop design with passive network          2
To quit                                          0
Enter your choice -> 2
Gc = 2.5 s/(s + 24)

Compensated open-loop
Transfer function:
    64 s + 1536
-----
s^3 + 28 s^2 + 256 s

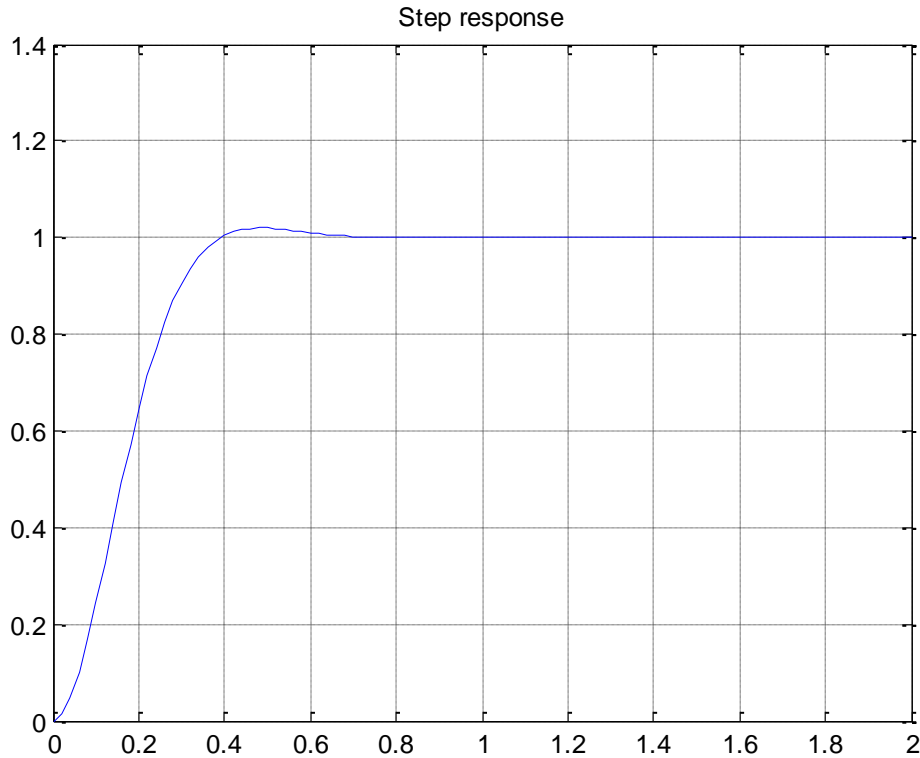
Compensated closed-loop
Transfer function:
    64 s + 1536
-----
s^3 + 28 s^2 + 320 s + 1536

Roots of the compensated characteristic equation:

-12.0000
-8.0000 + 8.0000i
-8.0000 - 8.0000i
>> t = 0:.02:2;
>> timespec(numopen,denclsd); % Time-domain specifications
Peak time = 0.48375           Percent overshoot = 2.01421
Rise time = 0.2375
Settling time = 0.49375
>> c = step(numopen,denclsd,t); % Compensated system
>> plot(t,c); title('Step response'), grid % step response

```





Σχήμα 6.13: Βηματική απόκριση αντισταθμισμένου συστήματος

### 6.11 Πρόγραμμα GUI για σχεδίαση γεωμετρικού τόπου

Ένα πρόγραμμα γραφικής διεπαφής χρήστη (**GUI**) έχει αναπτυχθεί για την σχεδίαση ενός ελεγκτή πρώτης τάξης ενός συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου. Αυτό το πρόγραμμα GUI σχεδιάζει τους ακόλουθους ελεγκτές: αναλογικό, καθυστέρησης φάσης, προήγησης φάσης, PD, PI, και PID. Για να τρέξουμε το πρόγραμμα σχεδίασης ελεγκτή GUI πληκτρολογούμε στο prompt του MATLAB την εντολή **rldesigngui**.

#### Παράδειγμα 6.17

Θεωρούμε το σύστημα του παραδείγματος 6.10 του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι η εξής:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

Γίνεται χρήση του προγράμματος **rldesigngui** για την σχεδίαση ενός ελεγκτή προήγησης φάσης που να ικανοποιεί τις ακόλουθες προδιαγραφές:

- Σταθερά χρόνου  $\tau = 1/\zeta\omega_n = 0.6667 \text{ sec}$ .
- Λόγο απόσβεσης  $\zeta = 0.6$ .

- Σφάλμα σταθερής κατάστασης εξαιτίας μίας μοναδιαίας εισόδου ράμπας  $e_{ss} = 0.5$ .

Από τις δύο πρώτες προδιαγραφές  $\zeta\omega_n = 1/\tau = 1.5$  και  $\theta = \cos^{-1}0.6 = 53.13^\circ$ . Έτσι, ο απαιτούμενος πόλος κλειστού βρόχου είναι  $s_1 = -1.5 + j2$ . Η τρίτη προδιαγραφή απαιτεί:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_u} = 0.5$$

ή

$$K_u = 2$$

όπου:

$$K_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c(s + z_0)}{(s + p_0)} \frac{1}{s(s + 1)(s + 4)} = \frac{K_c z_0}{p_0} \frac{1}{4}$$

Επομένως, το απαιτούμενο κέρδος αντισταθμιστή είναι  $a_0 = (k_c z_0)/p_0 = 4 \times 2 = 8$ . Στο prompt του MATLAB πληκτρολογούμε την εξής εντολή:

```
>> rldesigngui
```

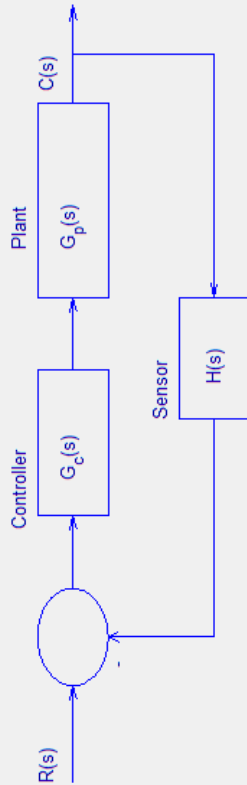
Το παρακάτω παράθυρο γραφικών εμφανίζεται.

**Control Systems**

**Root Locus Design**

Enter the numerator and denominator coefficients in descending power of s

Plant Transfer Function	$G_p(s)$	num = <input type="text" value="1"/>	den = <input type="text" value="[1 5 4 0]"/>
Feedback path Transfer Function	$H(s)$	num = <input type="text" value="1"/>	den = <input type="text" value="1"/>



<b>P Controller</b>	Find K to satisfy the desired damping ratio
<b>Phase Lag Controller</b>	Design a phase lag controller for the specified damping ratio of dominant closed-loop poles and to satisfy the steady-state error
<b>Phase Lead Controller</b>	Design a phase lead controller for the desired dominant closed-loop poles
<b>PD Controller</b>	Design a PD controller for the desired dominant closed-loop poles
<b>PI Controller</b>	Design a PI controller for the desired dominant closed-loop poles
<b>PID Controller</b>	Design a PID controller for the desired dominant closed-loop poles
<b>Info</b>	Information
<b>Exit</b>	Close all Figures and Exit

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου καθορίζεται κάνοντας κλικ στο κουμπί "**Phase Lead Controller**", και εμφανίζεται το ακόλουθο παράθυρο γραφικών όπως φαίνεται στην επόμενη σελίδα. Οι επιθυμητοί κυρίαρχοι πόλοι κλειστού βρόχου έχουν τεθεί, πατώντας το κουμπί "**Find  $G_c(s)$** ", και οι αντισταθμισμένες συναρτήσεις μεταφοράς ανοικτού και κλειστού βρόχου λαμβάνονται όπως φαίνεται σε αυτήν την εικόνα.

**Control Systems**

Enter the desired dominant close-loop poles

$s_1 = -1.5 + j2$

Enter the Controller DC gain

$G_c = 8$

[Find G\\_c\(s\)](#)

Controller:  $G_c(s) = 82.2813(s + 1.1141)(s + 11.4583)$   
 Compensated Open-loop TF

$KG_cG_pH(s) = \frac{82.2813s + 91.6667}{1s^4 + 16.4583s^3 + 61.2917s^2 + 45.8333s + 0}$   
 Compensated Closed-loop TF

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{82.2813s + 91.6667}{1s^4 + 16.4583s^3 + 61.2917s^2 + 128.1146s + 91.6667}$   
 Roots of the Characteristic Equation:

-12.2623+0i      -1.5+2i      -1.5-2i      -1.19608+0i

Phase Lead Controller Design

Uncompensated system root-locus

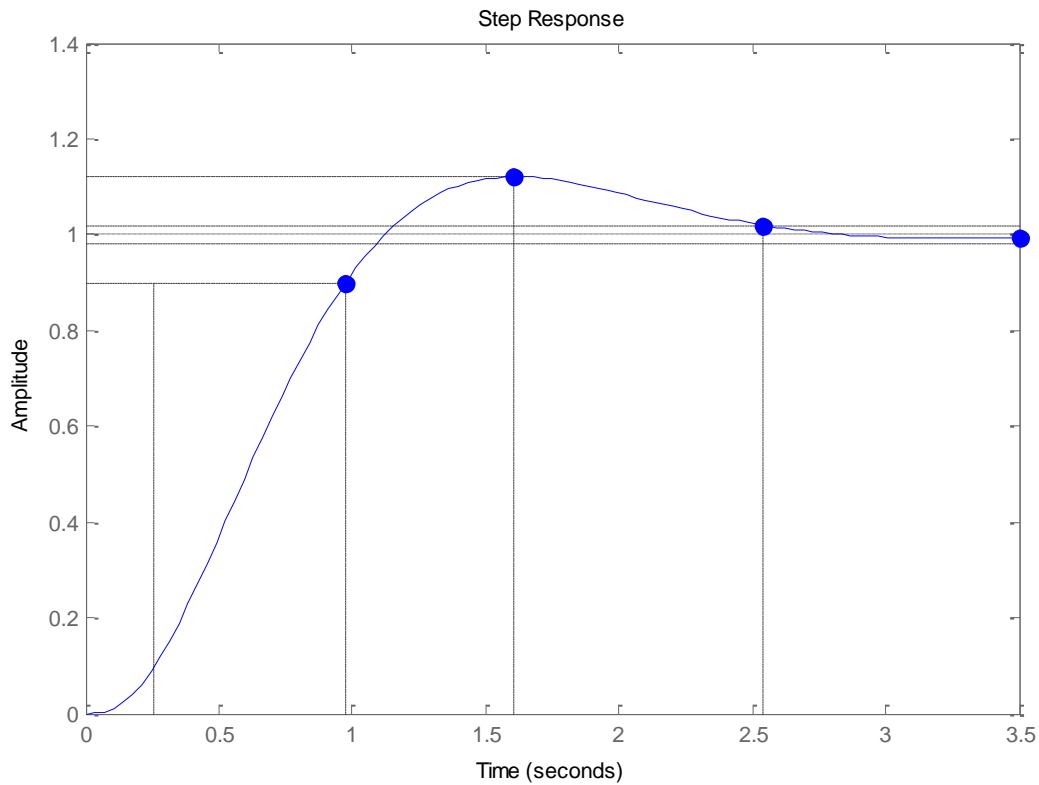
Real Axis (seconds<sup>-1</sup>)

Imaginary Axis (seconds<sup>-1</sup>)

[System Responses](#)

[Close](#)

Πατώντας το κουμπί **“System Responses”**, ποικίλες αποκρίσεις μπορούν να ληφθούν. Η βηματική απόκριση φαίνεται στο Σχήμα 6.14. Κάνοντας διπλό κλικ πάνω στην απόκριση ανοίγει ένα dialog box για τα χαρακτηριστικά της απόκρισης. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνονται τα χαρακτηριστικά απόδοσης στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 6.14: Βηματική απόκριση προσομοίωσης GUI

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος είναι η σταθερή απόκριση του συστήματος σε ένα ημιτονοειδή σήμα εισόδου. Η μέθοδος απόκρισης συχνότητας και η μέθοδος γεωμετρικού τόπου είναι απλά δύο διαφορετικές μέθοδοι, που εφαρμόζουν τις ίδιες βασικές αρχές ανάλυσης. Αυτές οι μέθοδοι συμπληρώνουν η μία την άλλη, και χρησιμοποιούνται σε πολλά πρακτικά προβλήματα σχεδίασης. Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου απόκρισης συχνότητας είναι ότι μπορεί να προσδιορίσει (με πειραματικές δοκιμές) τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος. Επιπλέον, η σχεδίαση ενός συστήματος στο πεδίο συχνοτήτων παρέχει στον σχεδιαστή τον έλεγχο του εύρους ζώνης του συστήματος κατά τη διάρκεια της επίδρασης του θορύβου και των διαταραχών σχετικά με την απόκριση του συστήματος.

Σε αυτό το κεφάλαιο τα πολικά διαγράμματα και διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου, το περιθώριο κέρδους, και οι προδιαγραφές περιθωρίου φάσης λαμβάνονται με τη χρήση των συναρτήσεων του *Control System Toolbox* του MATLAB. Εξετάζεται η σχετική ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου με βάση το κριτήριο Nyquist. Η απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου, το πλάτος κορυφής, και το εύρος ζώνης λαμβάνονται επίσης. Επιπλέον, αρκετές συναρτήσεις έχουν αναπτυχθεί για την σχεδίαση του συστήματος ελέγχου στο πεδίο συχνοτήτων.

### 7.1. Απόκριση συχνότητας

Η απόκριση ενός συστήματος ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος σε ημιτονοειδή είσοδο  $r(t) = A \sin(\omega t)$  δίδεται από την σχέση:

$$c(t) = A|G(j\omega)| \sin[\omega t + \theta(\omega)] \quad (7.1)$$

Όπου η συνάρτηση μεταφοράς  $G(j\omega)$  λαμβάνεται αντικαθιστώντας το  $j\omega$  με  $s$  στην εξίσωση για την  $G(s)$ . Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει μπορεί να γραφτεί σε πολική μορφή ως εξής:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle \theta(\omega) \quad (7.2)$$

Εναλλακτικά, η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να αναπαρασταθεί σε εκθετική μιγαδική μορφή:

$$G(j\omega) = \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega) \quad (7.3)$$

Η πιο συνηθισμένη γραφική αναπαράσταση μίας συνάρτησης απόκρισης συχνότητας είναι το διάγραμμα Bode.

### 7.1.1. Διάγραμμα Bode

Το διάγραμμα Bode αποτελείται από δύο γραφικές παραστάσεις σχεδιασμένες σε ημιλογαριθμικό χαρτί με γραμμικές κατακόρυφες και λογαριθμικές οριζόντιες κλίμακες. Η πρώτη γραφική είναι ένα διάγραμμα του μέτρου μίας συνάρτησης απόκρισης συχνότητας  $G(j\omega)$  σε ντεσιμπέλ με τον λογάριθμο του  $\omega$ , η συχνότητα. Η δεύτερη γραφική του διαγράμματος Bode δείχνει την γωνία συνάρτησης  $\theta(\omega)$  με τον λογάριθμο του  $\omega$ . Η λογαριθμική αναπαράσταση είναι χρήσιμη γιατί δείχνει μαζί τα χαρακτηριστικά χαμηλών και υψηλών συχνοτήτων της συνάρτησης μεταφοράς σε ένα διάγραμμα. Επιπλέον, η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος μπορεί να προσεγγιστεί από μία σειρά ευθύγραμμων τμημάτων.

Δοθείσας μίας συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, η συνάρτηση του *Control System Toolbox* **bode(num,den)** παράγει το διάγραμμα απόκρισης συχνότητας με το διάνυσμα συχνότητας να έχει καθοριστεί αυτόματα. Εάν το σύστημα έχει οριστεί στον χώρο κατάστασης, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση **bode(A,B,C,D)**. Η συνάρτηση **bode(num,den, $\omega$ )** ή **bode(A,B,C,D,iu, $\omega$ )** χρησιμοποιεί το παρεχόμενο από τον χρήστη διάνυσμα συχνότητας  $\omega$ . Εάν οι παραπάνω εντολές καλούνται με ορίσματα [**mag,phase, $\omega$** ], η απόκριση συχνότητας του συστήματος στα **mag, phase,  $\omega$**  επιστρέφεται, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις **plot** ή **semilogx** για να πάρουμε το διάγραμμα.

#### Παράδειγμα 7.1

Λαμβάνουμε το διάγραμμα Bode για την μοναδιαία ανατροφοδότηση του συστήματος ελέγχου με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

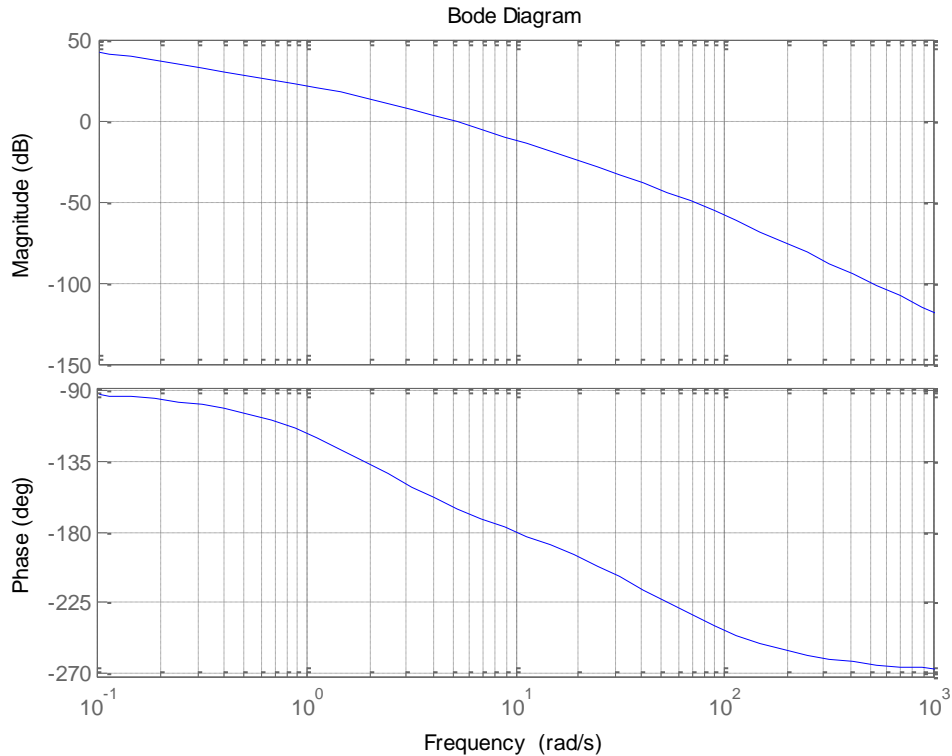
$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+50)} = \frac{K}{s^3 + 52s^2 + 100s}$$

για  $K = 1300$ .

```
>>num = 1300;
>>den = [1 52 100 0];
>>bode(num,den), grid % Obtains the frequency response plots
% Magnitude in dB and phase angle in degrees
```

Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 7.1.





Σχήμα 7.1: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.1

Οι εντολές που χρησιμοποιούνται για την εμφάνιση κειμένου ( $\omega_{gc}$ ,  $\omega_{pc}$ , **G.M.**, **P.M.**) στο διάγραμμα δεν περιλαμβάνονται στις παραπάνω δηλώσεις.

### 7.1.2. Πολικό διάγραμμα

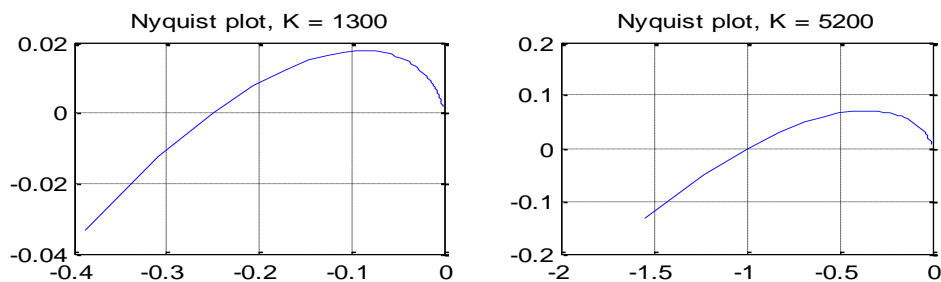
Ένα πολικό διάγραμμα, που ονομάζεται επίσης και διάγραμμα Nyquist, είναι μία γραφική παράσταση της  $\text{ImG}(j\omega)$  με την  $\text{ReG}(j\omega)$  με  $\omega$  που κυμαίνεται από  $-\infty$  έως  $+\infty$ . Το πολικό διάγραμμα μπορεί να σχεδιαστεί απευθείας από ημιτονοειδής μετρήσεις σταθερής κατάστασης πάνω στις συνιστώσες της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόγχου. Σύμφωνα με το *Control System Toolbox* του MATLAB η συνάρτηση  $[\text{Re}, \text{Im}] = \text{Nyquist}(\text{num}, \text{den}, \omega)$  επιστρέφει τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της συνάρτησης μεταφοράς για το συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων.

#### Παράδειγμα 7.2

Λαμβάνουμε το πολικό διάγραμμα για το σύστημα του παραδείγματος 7.1 με κέρδη  $K = 1300$  και  $K = 520$ .

```
>> k1 = 1300; k2 = 5200; w = 8:1:80;
>> num1 = [k1]; num2 = [k2];
>> den = [1 52 100 0];
>> [Re1,Im1] = nyquist(num1,den,w);
>> [Re2,Im2] = nyquist(num2,den,w);
>> subplot(2,2,1),plot(Re1,Im1), title('Nyquist plot, K =
1300')
>>grid
>> subplot(2,2,2),plot(Re2,Im2), title('Nyquist plot, K =
5200')
>>grid, subplot(111)
```

Παράγει το γράφημα που φαίνεται στο Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2: Πολικό διάγραμμα του παραδείγματος 7.1.

### 7.1.3. Διάγραμμα λογαριθμικού μέτρου - φάσης

Το διάγραμμα λογαριθμικού μέτρου - φάσης δείχνει το λογαριθμικό μέτρο σε ντεσιμπέλ με φάση γωνίας για ένα εύρος συχνοτήτων που μας ενδιαφέρει. Συνήθως σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα Nichols. Το διάγραμμα Nichols περιέχει γραμμές σταθερού μέτρου και φάσης κλειστού βρόχου, δείχνοντας την σχέση μεταξύ της απόκρισης συχνότητας ανοικτού και κλειστού βρόχου. Στο παράδειγμα 7.1, η προσθήκη της δήλωσης **plot(dB,phase)** θα παράγει το διάγραμμα λογαριθμικού μέτρου - φάσης.

### 7.2. Σχετική ευστάθεια

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου ενός συστήματος ελέγχου δίνεται από την εξίσωση:

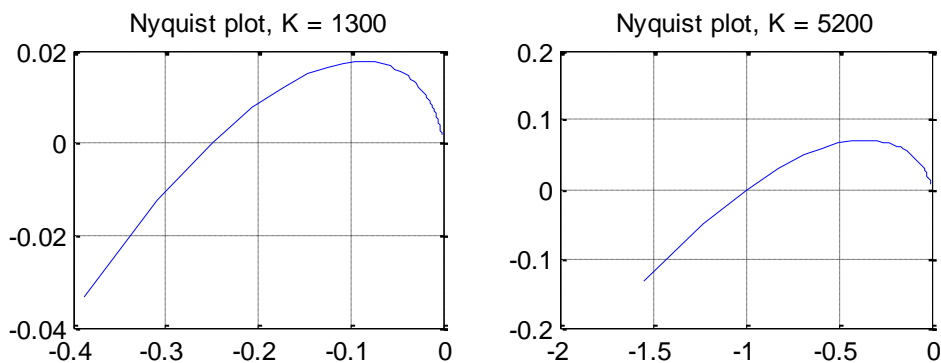
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)} \quad (7.4)$$

Για τη ευστάθεια BIBO, οι πόλοι της **T(s)** πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό τμήμα του μιγαδικού ημιεπιπέδου. Αφού τα μηδενικά της **1+KGH(s)** είναι πόλοι της **T(s)**, το σύστημα BIBO είναι ευσταθές όταν οι ρίζες της χαρακτηριστικής

εξίσωσης  $1+KGH(s)$  βρίσκονται στο αριστερό τμήμα του μιγαδικού ημιεπιπέδου. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών, ο οποίος είναι ο τόπος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης όσο το  $K$  κυμαίνεται από μηδέν έως άπειρο, καλύπτεται στο κεφάλαιο 6. Όλα τα σημεία του γεωμετρικού τόπου ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

$$|KGH(s)| = 1 \quad \text{και} \quad \angle GH(s) = -180^\circ \quad (7.5)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών για το παράδειγμα 7.1 φαίνεται στο Σχήμα 7.3. Καθώς αυξάνεται το  $K$ , το σύστημα γίνεται οριακά ευσταθές όταν τα πραγματικά μέρη των κυρίαρχων μιγαδικών ριζών είναι μηδέν. Αυτό αντιστοιχεί στο σημείο τομής του γεωμετρικού τόπου με τον φανταστικό άξονα, δηλαδή, όταν  $s = j\omega$ . Για αυτό στο σύστημα, το κρίσιμο κέρδος για οριακή ευστάθεια είναι  $K_c = 5200$ . Το πολικό διάγραμμα του παραπάνω συστήματος για τρεις τιμές του  $K$  φαίνεται επίσης στο Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3: Γεωμετρικός τόπος και πολικό διάγραμμα για 3 τιμές του κέρδους.

Η τομή του πολικού διαγράμματος με τον αρνητικό πραγματικό άξονα έχει μία γωνία φάσης  $-180^\circ$ . Η συχνότητα  $\omega_{pc}$  που αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο είναι γνωστή ως συχνότητα μηδενισμού του πλάτους συχνότητας. Επιπλέον, επειδή το κέρδος βρόχου έχει αυξηθεί, το σημείο τομής του πολικού διαγράμματος  $(-1,0)$ , περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$|K_c GH(j\omega_{pc})| = 1 \quad \text{και} \quad \angle GH(j\omega_{pc}) = -180^\circ \quad (7.6)$$

Η απόκριση κλειστού βρόχου γίνεται οριακά σταθερή, όταν η συχνότητα απόκρισης μέτρου είναι μοναδιαία και η γωνία φάσης του είναι  $-180^\circ$ . Η συχνότητα στην οποία το πολικό διάγραμμα τέμνεται στο σημείο  $(-1,0)$  είναι η ίδια συχνότητα με αυτήν που ο γεωμετρικός τόπος τέμνει τον φανταστικό άξονα. Για μία ακόμα

μεγαλύτερη τιμή του  $K$ , το πολικό διάγραμμα θα περικυκλώσει το σημείο  $(-1,0)$  και το σύστημα θα είναι ασταθές. Έτσι, το σύστημα είναι ευσταθές εάν:

$$|K_c GH(j\omega)| < 1 \quad \text{στο} \quad \angle GH(j\omega_{pc}) = -180^\circ \quad (7.7)$$

Η εγγύτητα του διαγράμματος  $KGH(j\omega)$  στις πολικές συντεταγμένες στο σημείο  $(-1,0)$  δίνει μία ένδειξη της ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου.

### 7.2.1. Περιθώρια κέρδους και φάσης

Το περιθώριο κέρδους και το περιθώριο φάσης είναι δύο κοινά κριτήρια σχεδίασης που σχετίζονται με την απόκριση συχνότητας ανοικτού βρόχου. Το περιθώριο κέρδους είναι ο συντελεστής με τον οποίο το κέρδος ενός σταθερού συστήματος θα πρέπει να αυξηθεί ώστε το πολικό διάγραμμα να περάσει μέσα από το σημείο  $(-1,0)$ . Το περιθώριο κέρδους ορίζεται ως εξής:

$$G.M. = \frac{K_c}{K} \quad (7.8)$$

όπου  $K_c$  είναι το κρίσιμο κέρδος βρόχου για οριακή ευστάθεια και  $K$  είναι το πραγματικό κέρδος βρόχου. Το παραπάνω μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$G.M. = \frac{K_c |GH(j\omega_{pc})|}{K |GH(j\omega_{pc})|} = \frac{1}{K |GH(j\omega_{pc})|} = \frac{1}{a} \quad (7.9)$$

Από την άποψη των ντεσιμπέλ το περιθώριο κέρδους είναι:

$$G.M._{dB} = 20 \log_{10}(G.M.) = -20 \log_{10} |KGH(j\omega_{pc})| = -20 \log_{10} a \quad (7.10)$$

Το περιθώριο κέρδους είναι απλώς ο συντελεστής με τον οποίο πρέπει να αλλάξει το  $K$ , για να καθιστά το σύστημα ασταθές. Σε αυτό το παράδειγμα, με  $K = 1300$ , το  $G.M. = 1/a = 1/0.25 = 4$ , ή  $G.M._{dB} = 20 \log_{10} 4 = 12.04$  dB. Έτσι, το κρίσιμο κέρδος βρόχου είναι:  $K_c = (G.M.)K = (4)1300 = 5200$ . Για  $K = 10400$ ,  $G.M. = 1/2 = 0.5 = -6.02$  dB και το σύστημα είναι ασταθές.

Το περιθώριο κέρδους μόνο του δεν επαρκεί για να δείξει τη σχετική ευστάθεια όταν οι παράμετροι του συστήματος που επηρεάζουν τη φάση της  $GH(j\omega)$  υπόκεινται σε μεταβολές. Για αυτό τον λόγο ένα άλλο μέτρο που ονομάζεται περιθώριο φάσης απαιτείται για να αναφέρει το βαθμό ευστάθειας. Έστω  $\omega_{gc}$ , γνωστό ως η συχνότητα μηδενισμού του πλάτους συχνότητας, είναι η συχνότητα στην οποία η απόκριση συχνότητας ανοικτού βρόχου είναι μοναδιαία. Το περιθώριο φάσης είναι η γωνία σε μοίρες, μέσω του οποίου το πολικό διάγραμμα πρέπει να περιστρέφεται γύρω από την περιοχή ώστε να τέμνει το σημείο  $(-1,0)$ . Το περιθώριο φάσης δίνεται από την:

$$P.M. = \angle GH(j\omega_{gc}) - (-180^\circ) \quad (7.11)$$

Σε αυτό το παράδειγμα για  $K = 1300$ ,  $\omega_{gc} = 4.89$  και  $P.M. = -163.36 - (-180) = 16.64^\circ$ .

Τα περιθώρια κέρδους και φάσης μαζί με τα  $\omega_{pc}$  και  $\omega_{gc}$  λαμβάνονται πιο εύκολα από το διάγραμμα Bode. Το περιθώριο φάσης μπορεί να διαβαστεί απευθείας από τη γραφική παράσταση Bode στην συχνότητα στην οποία η καμπύλη πλάτους διασχίζει τη γραμμή  $0$  dB [ $\omega_{gc} = 4.89$ ], και το περιθώριο κέρδους μπορεί να διαβαστεί (σε ντεσιμπέλ) στην συχνότητα στην οποία η καμπύλη γωνίας φάσης διασταυρώνεται με τη γραμμή και σχηματίζουν γωνία φάσης  $-180^\circ$  [ $\omega_{pc} = 10$ ]. Από το Σχήμα 7.1, αυτά είναι  **$G.M. = 12.04$  dB** και  **$P.M. = 16.64^\circ$** .

Για ικανοποιητική απόδοση, το περιθώριο φάσης πρέπει να είναι μεταξύ  $30^\circ$  και  $60^\circ$ , και το περιθώριο κέρδους θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από  $6$  dB.

Η συνάρτηση του *Control System Toolbox* του MATLAB [ **$Gm, Pm, \omega_{pc}, \omega_{gc} = \text{margin}(\text{mag}, \text{phase } \omega)$** ] μπορεί να χρησιμοποιηθεί με τη συνάρτηση **bode** για τον υπολογισμό των περιθωρίων κέρδους και φάσης,  $\omega_{pc}$  και  $\omega_{gc}$ .

### Παράδειγμα 7.3

Στο παράδειγμα 7.1 για  $K = 1300$ , γίνεται υπολογισμός του περιθωρίου κέρδους  $\omega_{pc}$ , και του περιθωρίου φάσης  $\omega_{gc}$ .

```
>> k = 1300; num = [k]; den = [1 52 100 0]; w = .1:.1:20;
>> [mag, phase] = bode(num, den, w);
>> [Gm, Pm, wpc, wgc] = margin(mag, phase, w);
>> fprintf('Gain Margin = %7.3g', Gm), fprintf('..Gain
crossover w = %7.3g', wgc)
Gain Margin =      4      Gain crossover w =      4.89
>> fprintf('Phase Margin = %7.3g', Pm), fprintf('Phase
crossover w = %7.3g', wpc)
Phase Margin =     16.6      Phase crossover w =      10
```

### 7.2.2. Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist παρέχει μία βολική μέθοδο για την εύρεση του αριθμού των μηδενικών της  $1+GH$  στο δεξί μισό του μιγαδικού ημιεπιπέδου απευθείας από το διάγραμμα Nyquist της  $GH(s)$ . Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist ορίζεται σύμφωνα με το σημείο  $(-1,0)$  στο διάγραμμα Nyquist ή το  $0$  dB,  $180^\circ$

σημείο στο διάγραμμα Bode. Το κριτήριο Nyquist βασίζεται πάνω στην θεωρία των μιγαδικών μεταβλητών μαθηματικών σύμφωνα με τον Cauchy. Το διάγραμμα Nyquist λαμβάνεται χαρτογραφώντας τον δρόμο Nyquist στο μιγαδικό ημιεπίπεδο μέσω της χαρτογραφημένης συνάρτησης  $\mathbf{GH}(s)$ . Ο δρόμος Nyquist επιλέγεται έτσι ώστε να περικυκλώνει ολόκληρο δεξί μισό του μιγαδικού ημιεπιπέδου. Όταν ο μιγαδικός τόπος είναι ο δρόμος Nyquist, το κριτήριο ευστάθειας Nyquist δίδεται από την εξίσωση:

$$Z = N + P \quad (7.12)$$

όπου:

$P$  ο αριθμός των πόλων της  $\mathbf{GH}(s)$  στο δεξί μισό του μιγαδικού ημιεπιπέδου,  
 $Z$  ο αριθμός των μηδενικών της  $1+\mathbf{GH}(s)$  στο δεξί μισό του μιγαδικού ημιεπιπέδου,  
 $N$  ο αριθμός των περικυκλώσεων του σημείου  $(-1,0)$  δεξιόστροφα από  $\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)$ .

Για να είναι το σύστημα κλειστού βρόχου σταθερό, το  $Z$  πρέπει να είναι μηδέν.  
 Άρα:

$$N = -P \quad (7.13)$$

### 7.2.3. Απλοποιημένο κριτήριο Nyquist

Αν η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου  $\mathbf{GH}(s)$  δεν έχει πόλους στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο ( $P = 0$ ) δεν είναι αναγκαίο να σχεδιαστεί το πλήρες διάγραμμα Nyquist, το πολικό διάγραμμα για  $\omega$  αυξανόμενο από  $0$  έως  $\infty$  είναι επαρκές. Μία τέτοια συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς **ελάχιστης φάσης**. Για συναρτήσεις μεταφοράς ανοικτού βρόχου ελάχιστης φάσης το σύστημα κλειστού βρόχου είναι σταθερό αν και μόνο αν το πολικό διάγραμμα εκτείνεται δεξιά του σημείου  $(-1,0)$ . Για μία συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου ελάχιστης φάσης το κριτήριο ορίζεται σύμφωνα με την τομή του πολικού διαγράμματος σε σχέση με το σημείο  $(-1,0)$  ως εξής:

- Δεξιά του  $(-1,0)$  ευσταθές  $\omega_{pc} > \omega_{gc} |\mathbf{GH}(j\omega)| < 1, \mathbf{G.M.}_{dB} > 0, \mathbf{P.M.} > 0^\circ$ .
- Πάνω στο  $(-1,0)$  οριακά ευσταθές  $\omega_{pc} = \omega_{gc} |\mathbf{GH}(j\omega)| = 1, \mathbf{G.M.}_{dB} = 0, \mathbf{P.M.} = 0^\circ$ .
- Αριστερά του  $(-1,0)$  ασταθές  $\omega_{pc} < \omega_{gc} |\mathbf{GH}(j\omega)| > 1, \mathbf{G.M.}_{dB} < 0, \mathbf{P.M.} < 0^\circ$ .

Αν το  $\mathbf{P}$  δεν είναι μηδέν, το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο αριθμός των πόλων είναι ίσος με  $\mathbf{P}$  αριστερόστροφα του διαγράμματος Nyquist περίπου στο σημείο  $(-1,0)$ .

Η συνάρτηση του *Control System Toolbox* του MATLAB

$$[\mathbf{re}, \mathbf{im}] = \mathbf{nyquist}(\mathbf{num}, \mathbf{den}, \omega)$$

μπορεί να εμφανίσει το διάγραμμα Nyquist χαρτογραφώντας τον δρόμο Nyquist. Ωστόσο, το  $\omega$  ορίζεται ως πραγματικός αριθμός. Για να αντιστοιχίσουμε έναν μιγαδικό αριθμό  $s = a + jb$ , θα πρέπει να προσδιοριστεί το  $s = a - js$ , όσο η παραπάνω συνάρτηση πολλαπλασιάζει αυτόματα το  $\omega$  με το  $j$ . Για να αποφευχθεί αυτό, η ανεπτυγμένη συνάρτηση  $[\mathbf{re}, \mathbf{im}] = \mathbf{cnyquist}(\mathbf{num}, \mathbf{den}, \mathbf{s})$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όπου η μεταβλητή  $\mathbf{s}$  πρέπει να προσδιοριστεί ως ένας μιγαδικός αριθμός. Κατά τον ορισμό του δρόμου Nyquist πρέπει να προσέξουμε για την δρόμο να μην περάσει μέσα από κανένα πόλο ή μηδενικό της  $\mathbf{GH}(s)$ . Η χρήση αυτής της συνάρτησης αποδεικνύεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 7.4

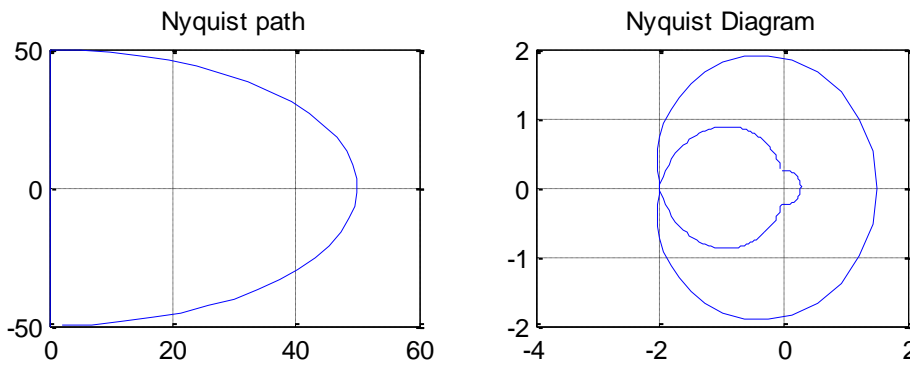
Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του συστήματος δίνεται από την:

$$\mathbf{GH}(s) = \frac{K(s+1)}{(s-2)(s-4)} = \frac{K(s+1)}{s^2 - 6s + 8}$$

Λαμβάνουμε το διάγραμμα Nyquist για  $K = 12$  και κρίνουμε την ευστάθεια του συστήματος.

```
>> th = pi/2:-.1:-pi/2;
% Select a path with a large radius, say
% 50 to ensure open-loop poles are
% enclosed.
>> s1 = j*(-50:.2:50); % Nyquist path on the jw-axis from -
j50
% to j50
>> s2 = 50*exp(j*th); % Nyquist path from pi/2 to -pi/2 with
% radius 50
>> s = [s1 s2]; % Row vector containing the Nyquist path
>> num = [12 12];
>> den = [1 -6 8];
>> [Re, Im] = cnquist(num, den, s);
>> subplot(221), plot(s), title('Nyquist path'), grid
>> subplot(222), plot(Re, Im), title('Nyquist Diagram'), grid
```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4: Δρόμος και διάγραμμα Nyquist του συστήματος του παραδείγματος 7.4.

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου έχει δύο πόλους στο δεξί μισό του μιγαδικού ημιεπιπέδου, οπότε  $P = 2$ . Η μέθοδος Nyquist περικυκλώνει το σημείο  $(-1,0)$  δύο φορές στην αριστερόστροφη κατεύθυνση, δηλαδή  $N = -2$  και  $Z = P + N = 2 - 2 = 0$ . Επομένως, για  $K = 12$ , το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές. Η  $G.M.$  είναι  $1/2$ , και το κέρδος για την οριακή ευστάθεια είναι  $K_c = 1/2 (12) = 6$ . Το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε  $K > 6$ .

### 7.3. Απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου

Η απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου είναι η απόκριση συχνότητας της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου  $T(j\omega)$ . Οι προδιαγραφές απόδοσης όσον αφορά την απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου ενός συστήματος είναι το εύρος ζώνης κλειστού βρόχου  $\omega_B$  και το μέτρο συντονισμού κορυφής του συστήματος κλειστού βρόχου,  $M_p$ .

Το εύρος ζώνης,  $\omega_B$ , ορίζεται ως η συχνότητα στην οποία το  $|T(j\omega)|$  εξασθενεί κατά  $3$  db από την τιμή μηδενικής συχνότητας. Το εύρος ζώνης αποτελεί ένα μέτρο με το οποίο εκφράζεται η δυνατότητα του συστήματος να αναπαράγει ένα ημιτονοειδές σήμα και είναι ένα μέτρο της ταχύτητας της απόκρισης.

Εάν το εύρος ζώνης είναι μικρό, μόνο τα σήματα σχετικά χαμηλής συχνότητας περνούν, και η απόκριση είναι αργή, ενώ ένα μεγάλο εύρος ζώνης αντιστοιχεί σε ταχύτερη αύξηση του χρόνου ανόδου. Ως εκ τούτου, ο χρόνος ανόδου και το εύρος ζώνης είναι αντιστρόφως ανάλογα το ένα με το άλλο.

Η συχνότητα συντονισμού, δηλώνεται ως  $\omega_r$ , και το μέγιστο πλάτος,  $M_p$  που ονομάζεται και μέτρο συντονισμού κορυφής. Το  $M_p$  είναι ένα μέτρο σχετικής



ευστάθειας του συστήματος. Ένα μεγάλο  $M_p$  αντιστοιχεί στην παρουσία ενός ζεύγους κυρίαρχων πόλων κλειστού βρόχου με μικρό λόγο απόσβεσης, το οποίο καταλήγει σε υπερύψωση της βηματικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου. Αν το κέρδος  $K$  ρυθμίζεται έτσι ώστε η απόκριση συχνότητας ανοικτού βρόχου  $G_H(j\omega)$  να περνά μέσα από το σημείο  $(-1,0)$ , το  $M_p$  θα είναι άπειρο. Γενικά, εάν το  $M_p$  διατηρείται μεταξύ 1.0 και 1.7, η μεταβατική απόκριση θα είναι αποδεκτή. Η ανεπτυγμένη συνάρτηση `frqspec(w,mag)` υπολογίζει τα  $M_p$ ,  $\omega_r$ , και το εύρος ζώνης  $\omega_B$  από τα δεδομένα της απόκρισης συχνότητας.

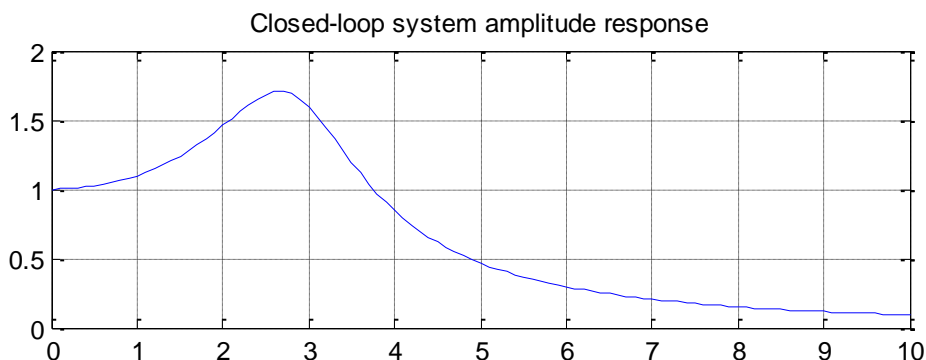
### Παράδειγμα 7.5

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του παραδείγματος 7.1 για  $K = 438$  είναι:

$$T(s) = \frac{438}{s^3 + 52s^2 + 100s + 438}$$

Λαμβάνουμε την απόκριση πλάτους και καθορίζουμε το εύρος ζώνης του συστήματος και το μέτρο συντονισμού κορυφής.

```
>> k = 438; num = k; den = [1 52 100 k];
>> w = 0:.1:10;
>> [mag,phase] = bode(num,den,w);
>> subplot(211),plot(w,mag),
>> title('Closed-loop system amplitude response'),
>> grid, pause, frqspec(w, mag)
Peak Mag.      =      1.7      wr =      2.7      Bandwidth =
4.25
```



Σχήμα 7.5: Απόκριση συχνότητας του συστήματος κλειστού βρόχου του παραδείγματος 7.5.

#### 7.3.1. Διάγραμμα Nichols

Η απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου που ελήφθη παραπάνω είναι γρήγορη, ακριβή, και δεν περιορίζεται σε ένα σύστημα μοναδιαίας

ανατροφοδότησης. Ωστόσο, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί το διάγραμμα Nichols, το οποίο παρέχει μία γραφική τεχνική για την απόκτηση της απόκρισης κλειστού βρόχου από τα δεδομένα ανοικτού βρόχου. Το διάγραμμα συνήθως κατασκευάζεται για ένα σύστημα μοναδιαίας ανατροφοδότησης. Η απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου ενός συστήματος μοναδιαίας ανατροφοδότησης δίδεται από την:

$$M(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \quad (7.14)$$

Έστω  $M = |M(j\omega)|$  και  $N = \tan \phi_m(j\omega)$ , όπου  $\phi_m$  είναι η γωνία φάσης της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου. Κατά την αντικατάσταση, οι ακόλουθες δύο εξισώσεις ελήφθησαν από πλευράς  $M$  και  $N$  [10].

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2 \quad (7.15)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N^2} \quad (7.16)$$

Για ένα δεδομένο  $M$ , η σχέση (7.15) αντιπροσωπεύει κύκλο με ακτίνα  $r = M/(1 - M^2)$  και το κέντρο στο  $(M^2/(1 - M^2), 0)$  που είναι γνωστός ως κύκλος  $M$ .

Για δεδομένο  $N$ , η σχέση (7.16) αντιπροσωπεύει ένα κύκλο με ακτίνα  $r = \sqrt{\frac{N^2+1}{4N^2}}$  και κέντρο στο  $(-1/2, 1/(2N))$  που είναι γνωστός ως κύκλος  $N$ .

Οι σταθεροί  $M$  και  $N$  κύκλοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση και τη σχεδίαση στο πολικό επίπεδο. Ωστόσο, είναι σύνηθες να μετατρέπουμε τους κύκλους  $M$  και  $N$  στο πολικό διάγραμμα σε μη κυκλικά περιγράμματα σε ένα διάγραμμα λογαριθμικού μέτρου - φάσης. Το προκύπτον γράφημα ονομάζεται διάγραμμα **Nichols**. Η διαδικασία για την απόκτηση της απόκρισης κλειστού βρόχου από το διάγραμμα Nichols έχει ως εξής:

1. Η απόκριση συχνότητας ανοικτού βρόχου βρίσκεται επάνω στο διάγραμμα Nichols.
2. Από το σημείο τομής αυτής της καμπύλης με τα περιγράμματα σε διάφορα σημεία συχνότητας, οι τιμές  $M$  και  $\phi_m$  διαβάζονται από τη γραφική.
3. Οι καμπύλες απόκρισης συχνότητας κλειστού βρόχου λαμβάνονται από τις ανωτέρω τιμές.
4. Η μέγιστη κορυφή συντονισμού  $M_r$  και της αντίστοιχης  $\omega_r$  δίνεται σε ένα σημείο όπου η  $G(j\omega)$  εφάπτεται σε ένα κύκλο  $M$ .

5. Το εύρος ζώνης  $\omega_B$  λαμβάνεται σημειώνοντας την συχνότητα στην οποία η  $G(j\omega)$  καμπύλη τέμνει τον  $M = 0.707$  κύκλο.

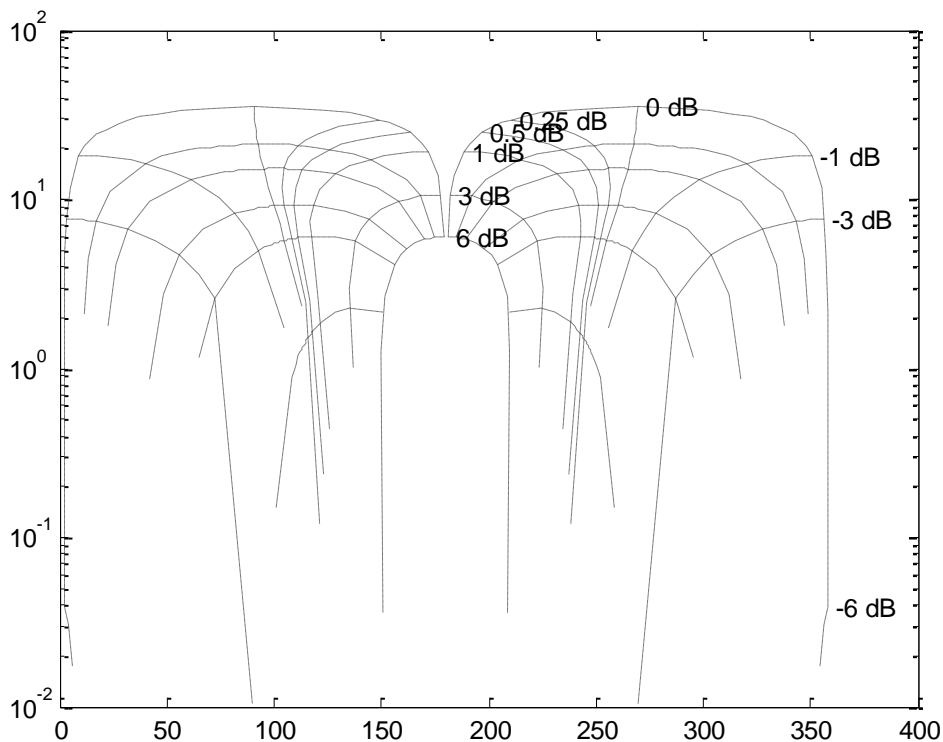
Για να χρησιμοποιήσετε το διάγραμμα Nichols για τα μη μοναδιαία συστήματα ανατροφοδότησης, το δομικό διάγραμμα πρέπει να αναδιαμορφωθεί για να αποκτήσουμε ένα ισοδύναμο σύστημα μοναδιαίας ανατροφοδότησης. Η συνάρτηση **ngrid** του *Control System Toolbox* του MATLAB χρησιμοποιείται για να αποκτήσουμε το διάγραμμα Nichols. Η εντολή **ngrid('off')** συνεχίζει κανονικά την αυτόματη κλιμάκωση.

### Παράδειγμα 7.6

Στο διάγραμμα Nichols σχεδιάζουμε την λογαριθμική καμπύλη μέτρου-φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του παραδείγματος 7.1 για  $k = 438$ .

```
>> k = 438;
>> num = k; den = [1 52 100 0]; % open-loop transfer
function
>> w = .1:.1:10;
>> [mag,phase] = bode(num,den,w);
>> ngrid, % generates Nichols chart
>> semilogy(phase,mag) % log-magnitude-phase plot
>> ngrid('off') % resumes normal auto-scaling
```

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.6.



Σχήμα 7.6: Διάγραμμα Nichols του παραδείγματος 7.6.

Από το διάγραμμα Nichols μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι εφαπτόμενη με τον  $M = 1.7$  κύκλο. Αυτή είναι η μεγίστη κορυφή συντονισμού της  $M_r$  η οποία συμφωνεί με την τιμή που βρέθηκε στο παράδειγμα 7.5.

#### 7.4. Σχεδίαση απόκρισης συχνότητας

Στο κεφάλαιο 6, παρουσιάστηκαν η ανάλυση και σχεδίαση του γεωμετρικού τόπου. Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, η σχεδίαση των γραμμικών συστημάτων ελέγχου πραγματοποιούνται στο πεδίο των συχνοτήτων. Η σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας μας παρέχει πληροφορίες σχετικά με την σταθερή απόκριση, το περιθώριο ευστάθειας και το εύρος ζώνης του συστήματος. Η μεταβατική απόκριση μπορεί να εκτιμάται έμμεσα από το περιθώριο φάσης, το περιθώριο κέρδους και ο μέτρο συντονισμού κορυφής. Το ποσοστό υπέρβασης μειώνεται με την αύξηση του περιθωρίου φάσης και η ταχύτητα απόκρισης αυξάνεται με την αύξηση του εύρους ζώνης. Έτσι, η συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας, η συχνότητα συντονισμού, και το εύρος ζώνης μας δίνουν μία πρόχειρη εκτίμηση της ταχύτητα της μεταβατικής απόκρισης.

Μία κοινή προσέγγιση στην σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας είναι η προσαρμογή του κέρδους ανοιχτού βρόχου, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η απαιτούμενη ακρίβεια στο χώρο κατάστασης. Αυτό ονομάζεται **αναλογικός ελεγκτής**. Εάν οι προδιαγραφές σχετικά με το περιθώριο φάσης και το περιθώριο κέρδους δεν ικανοποιούνται, τότε είναι απαραίτητο να αναδιαμορφωθεί η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου με την προσθήκη επιπλέον ελεγκτή στη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου  $G_c(s)$ . Η  $G_c(s)$  πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε το σύστημα να έχει ορισμένα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το συνδυασμό αναλογικής με ολοκληρωτικής δράσης (PI) ή αναλογικής με διαφορικής δράσης (PD). Υπάρχουν, επίσης, αναλογικοί-ολοκληρωτικοί - διαφορικοί ελεγκτές (PID) με την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (7.17)$$

Οι ιδανικοί ολοκληρωτικοί και διαφορικοί αντισταθμιστές απαιτούν την χρήση ενεργών ενισχυτών.

Άλλοι αντισταθμιστές οι οποίοι μπορούν να πραγματοποιηθούν μόνο με ορίσματα παθητικού δικτύου είναι οι αντισταθμιστές προήγησης, καθυστέρησης, και προήγησης - καθυστέρησης. Ένας αντισταθμιστής πρώτης τάξης έχοντας ένα μηδενικό και πόλο στην συνάρτηση μεταφοράς του είναι:

$$G_c(s) = \frac{K_c(s + z_0)}{s + p_0} \quad (7.18)$$

Αρκετές συναρτήσεις έχουν αναπτυχθεί για την επιλογή των κατάλληλων παραμέτρων του ελεγκτή βασιζόμενες στην ικανοποίηση των κριτηρίων απόκρισης συχνότητας όπως το περιθώριο φάσης. Αυτές είναι:

Πίνακας 7.1: Συναρτήσεις ελεγκτή

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΕΛΕΚΤΗΣ
[numopen, denopen, denclsd] = frqp(num, den)	Αναλογικός
[numopen, denopen, denclsd] = frqlead(num, den)	Προήγησης φάσης
[numopen, denopen, denclsd] = frqlag(num, den)	Καθυστέρησης φάσης
[numopen, denopen, denclsd] = frqpd(num, den)	PD
[numopen, denopen, denclsd] = frqpi(num, den)	PI
[numopen, denopen, denclsd] = frqpid(num, den)	PID

Εναλλακτικά, η συνάρτηση

$$[\text{numopen}, \text{denopen}, \text{denclsd}] = \text{frdesign}(\text{num}, \text{den})$$

επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει κάποιο από τα παραπάνω σχέδια ελεγκτή όπου **num** και **den** είναι τα διανύσματα σειράς των πολυωνυμικών συντελεστών της μη αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και παρονομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### 7.5. Ελεγκτής P

Ο **P** ελεγκτής είναι καθαρά ελεγκτής κέρδους. Η σχεδίαση επιτυγχάνεται με την επιλογή του κέρδους **K<sub>p</sub>** (αναλογικό κέρδος) για το μη αντισταθμισμένο σύστημα ώστε να δώσει το απαιτούμενο σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Όταν το κέρδος **K<sub>p</sub>** μεταβάλλεται, το διάγραμμα γωνίας φάσης δεν θα επηρεαστεί. Το μέτρο της καμπύλης στο διάγραμμα Bode μετατοπίζεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω ώστε να αντιστοιχεί στην αύξηση ή στη μείωση του **K<sub>p</sub>**. Ομοίως, η επίδραση της

αλλαγής του  $K_p$  στο διάγραμμα Nyquist είναι η μεγέθυνση ή η μείωσή του. Η μορφή του διαγράμματος Nyquist δεν μπορεί να αλλάξει.

Η συνάρτηση `[numopen,denopen,denclosed] = frdesign(num,den)` εμφανίζει έξι επιλογές για την σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας. Για τον αναλογικό ελεγκτή πρέπει να επιλεγεί, η επιλογή **1** η οποία καλεί την συνάρτηση `[numopen,denopen,denclosed] = frqp(num,den)`. Ο χρήστης εισάγει το επιθυμητό κέρδος  $K_p$ . Οι προδιαγραφές ανοικτού και κλειστού βρόχου στο πεδίο συχνοτήτων πριν και μετά την αντιστάθμιση έχουν βρεθεί. Υπολογίζονται επίσης οι ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και παρονομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### Παράδειγμα 7.7

Λαμβάνουμε το διάγραμμα Bode, τα περιθώρια κέρδους και φάσης για το σύστημα ελέγχου ανατροφοδότησης με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

$$G(s) = \frac{8}{s(s+1)(s+4)} = \frac{8}{s^3 + 5s^2 + 4s}$$

Προσδιορίζουμε τον συντελεστή κέρδους  $K_p$  ενός αναλογικού ελεγκτή έτσι ώστε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης να οφείλεται σε είσοδο ράμπας που θα είναι ίση με **0.25**. Εύρεση της απόκρισης συχνότητας του αντισταθμισμένου συστήματος και των νέων περιθωρίων κέρδους και φάσης.

Η προδιαγραφή σφάλματος μόνιμης κατάστασης απαιτεί:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_u} = 0.25$$

ή

$$K_u = 4$$

όπου η ταχύτητα σταθεράς σφάλματος  $K_u$  δίδεται από την:

$$K_u = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{8K_p}{s(s+1)(s+4)} = 2K_p$$

Ως εκ τούτου, το κέρδος αντιστάθμισης που απαιτείται είναι  $K_u = 4$ .

```
>> num = 8; den = [1 5 4 0]; w = 0.1:0.1:10;
>> [numopen,denopen,dencldsd]=frdesign(num,den);%Design
function.The function [numopen, denopen, dencldsd] =
frdesign(num, den) is used for the frequency response
design of a linear control system. num & den are row vectors
of polynomial coefficients of the uncompensated open-loop
plant transfer function. The controller transfer function
and the frequency domain specifications before and after
compensation are found.The function returns the open-loop &
the closed-loop numerator and denominators of the
compensated system transfer function.
```

```

Compensator type                                Enter
-----
Gain Compensation                               1
Phase-lead                                     2
Phase-lag                                       3
PD Controller                                  4
PI Controller                                  5
PID Controller                                  6
To quit                                         0
Enter your choice -> 1
Uncompensated control system
Gain Margin =      2.5      Gain crossover w =      1.22
Phase Margin =     22.5     Phase crossover w =      2

Enter the desired gain factor Kp -> 2
Gain & Phase Margins with gain compensation, Kp = 2
Gain Margin =      1.25     Gain crossover w =      1.79
Phase Margin =      5.21     Phase crossover w =      2

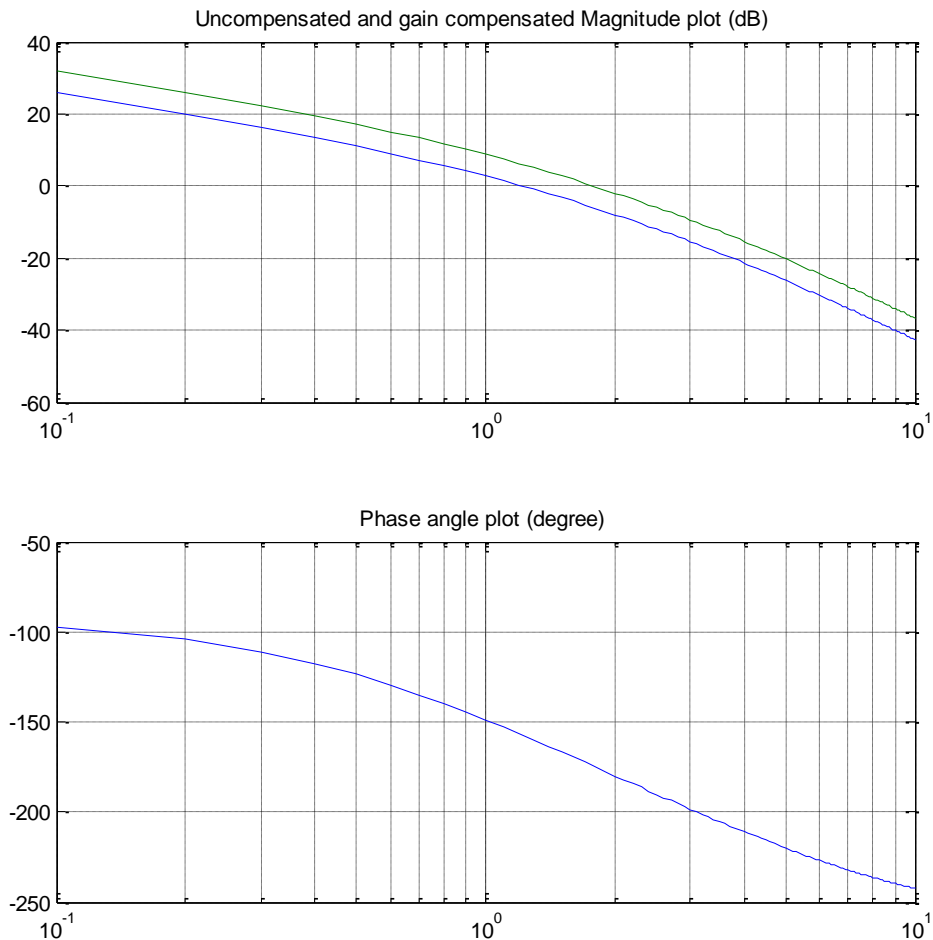
Peak Mag.      =      11.6      wr =      1.8      Bandwidth =
2.75

Compensated open-loop
Transfer function:
      16
-----
s^3 + 5 s^2 + 4 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      16
-----
s^3 + 5 s^2 + 4 s + 16

Roots of the compensated characteristic equation:
-4.8549
-0.0725 + 1.8139i
-0.0725 - 1.8139i
```

Τα αποτελέσματα δίνονται στο Σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.7

Είναι φανερό ότι η αύξηση των τιμών του κέρδους βελτιώνει τη συμπεριφορά στην μόνιμη κατάσταση, αλλά θα μειώσει τα περιθώρια φάσης και κέρδους που προκύπτουν για κακή ευστάθεια. Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να ξανασχεδιαστεί το σύστημα με τη χρήση ενός κατάλληλου ελεγκτή για να μεταβάλλει την απόκριση συχνότητας, έτσι ώστε να πληρούνται οι προδιαγραφές απόδοσης.

### 7.6. Σχεδίαση αντιστάθμισης προήγησης φάσης

Η αντιστάθμιση προήγησης φάσης έχει περίπου την ίδια συμπεριφορά με τον PD ελεγκτή και εφαρμόζεται σε συστήματα ελέγχου τα οποία έχουν ικανοποιητικά χαρακτηριστικά στη μόνιμη κατάσταση αλλά η μεταβατική τους απόκριση δεν είναι ικανοποιητική και απαιτείται βελτίωση. Στην σχέση (7.18) ο αντισταθμιστής είναι ένα υψιπερατό φίλτρο αν  $p_0 > z_0$ . Ένας αντισταθμιστής προήγησης φάσης



επιφέρει θετικές γωνίες φάσης, τείνει να αυξήσει το περιθώριο φάσης και να βελτιώσει τη σχετική ευστάθεια. Επίσης, χρειάζεται να αυξήσουμε τη συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας. Αυτό αυξάνει το εύρος ζώνης και έχει ως αποτέλεσμα μία ταχύτερη παροδική απόκριση.

Εάν  $\omega_0$  και  $\omega_p$  είναι οι γωνιακές συχνότητες του ελεγκτή προήγησης φάσης, τότε η μέγιστη τιμή του ελεγκτή γωνίας φάσης που λαμβάνει χώρα σε συχνότητα  $\omega_m$  δίδεται από το γεωμετρικό μέσο των δύο γωνιών συχνότητας του ελεγκτή. Αυτό είναι:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0 \omega_p} \quad (7.19)$$

Πρέπει να επιλέξουμε τον πόλο και το μηδενικό του ελεγκτή προήγησης φάσης τέτοιο ώστε η μέγιστη γωνίας φάσης να λαμβάνει χώρα σε μία καινούργια συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας χωρίς σημαντική αλλαγή της καμπύλης του μέτρου κοντά σε αυτήν την συχνότητα. Αυτό επιτυγχάνεται τοποθετώντας την γωνιακή συχνότητα του ελεγκτή προήγησης φάσης τέτοια ώστε η  $\phi_m$  έχει τοποθετηθεί σε μία νέα συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας,  $\omega_{gc}$ .

Οι προδιαγραφές σχεδίασης απλά περιλαμβάνουν την προδιαγραφή περιθωρίου φάσης και το απαιτούμενο σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Το κέρδος συνεχούς ρεύματος του αντισταθμιστή είναι:

$$a_0 = G_c(0) = \frac{K_c z_0}{p_0} \quad (7.20)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή μπορεί να γραφτεί όπως φαίνεται παρακάτω:

$$G_c(s) = \frac{K_c(s + z_0)}{(s + p_0)} = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + b_0} \quad (7.21)$$

όπου  $a_1 = K_c/p_0$ ,  $b_1 = 1/p_0$  και  $b_0 = 1$ .

Ο αντισταθμιστής κέρδους συνεχούς ρεύματος  $a_0$  μπορεί να επιλεγεί για να συμβαδίζει στο σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Για παράδειγμα, η σταθερά σφάλματος  $e_{ss}$  για ένα σφάλμα μόνιμης κατάστασης που οφείλεται σε μία είσοδο ράμπας δίνεται από τη σχέση:

$$K_u = \frac{1}{e_{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G H(s) = a_0 \lim_{s \rightarrow 0} s G H(s) \quad (7.22)$$

Έτσι, από την παραπάνω εξίσωση, ο ελεγκτής κέρδους συνεχόμενου ρεύματος  $a_0$  για να ικανοποιήσει το σφάλμα μόνιμης κατάστασης έχει βρεθεί.

Η αντισταθμισμένη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος ελέγχου δίνεται από την:

$$1 + G_c(s)GH(s) = 0 \quad (7.23)$$

Αν **PM** είναι το επιθυμητό περιθώριο φάσης στη νέα συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας  $\omega_{gc}$ , τότε από την σχέση (7.23) θα έχουμε:

$$G_c(j\omega_{gc})GH(j\omega_{gc}) = 1 \angle (-180 + PM) \quad (7.24)$$

Αντικαθιστώντας για  $G_c(j\omega_{gc})$  και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη της παραπάνω έκφρασης, οι παράμετροι του ελεγκτή που βρέθηκαν, [12] είναι οι ακόλουθοι:

$$a_1 = \frac{1 - M \cos \theta}{\omega_{gc} M \sin \theta} \quad (7.25)$$

$$b_1 = \frac{\cos \theta - \alpha_0 M}{\omega_{gc} \sin \theta} \quad (7.26)$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία της συνάρτησης μεταφοράς του ελεγκτή, και υπολογίζεται σε  $j\omega_{gc}$ ,

$$\theta = \angle G_c(j\omega_{gc}) = -180^\circ + PM - \psi \quad (7.27)$$

Το **M** και το  $\psi$  είναι το μέτρο και η γωνία φάσης της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου και υπολογίζονται σε  $j\omega_{gc}$ , δηλαδή,

$$GH(j\omega_{gc}) = M \angle \psi \quad (7.28)$$

Για έναν ελεγκτή προήγησης φάσης, η γωνία φάσης του αντισταθμιστή πρέπει να είναι θετική. Ως εκ τούτου, από τη σχέση (7.27):

$$\psi < -180^\circ + PM \quad (7.29)$$

Επίσης, για έναν αντισταθμιστή προήγησης φάσης ξέρουμε ότι  $a_0 < G_c(j\omega_{gc})$ , έτσι από την σχέση (7.24):

$$a_0 M < 1 \quad (7.30)$$

Για ένα σταθερό ελεγκτή, τα  $a_1$  και  $b_1$  πρέπει να είναι μεγαλύτερα από μηδέν.

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, η συνάρτηση

$$\text{[numopen,denopen,dencldsd]} = \text{frqlead(num,den)}$$

χρησιμοποιείται για την σχεδίαση του ελεγκτή προήγησης φάσης. Τα **num** και **den** είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Ο χρήστης εισάγει το επιθυμητό περιθώριο φάσης και τον ελεγκτή κέρδους συνεχούς ρεύματος,  $G_c(0) = K_c z_0 / p_0$ . Το πρόγραμμα βρίσκει και εμφανίζει το αντισταθμισμένο εύρος συχνοτήτων

μηδενισμού του κέρδους συχνότητας για ένα σταθερό ελεγκτή. Στη συνέχεια, ο χρήστης καθορίζει τη συχνότητα μηδενισμού σε αυτό το εύρος. Βρίσκονται η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή και οι προδιαγραφές στο πεδίο συχνοτήτων πριν και μετά την αντιστάθμιση. Υπολογίζονται επίσης οι ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η συνάρτηση επιστρέφει αριθμητές και παρονομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### Παράδειγμα 7.8

Σχεδίαση ενός αντισταθμιστή προήγησης φάσης για το σύστημα του παραδείγματος 7.7, έτσι ώστε το σύστημα να έχει περιθώριο φάσης  $45^\circ$  και σφάλμα μόνιμης κατάστασης **0.25** λόγω της εισόδου ράμπας. Σχεδιάζουμε την απόκριση συχνότητας πριν και μετά την αντιστάθμιση. Βρίσκουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **timespec(numopen,denclsd)**, και λαμβάνουμε το διάγραμμα της βηματικής απόκρισης.

Η συνάρτηση **[numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den)** με την επιλογή **2** χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση προήγησης φάσης.

Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας είναι  $K_u = 1/0.05 = 20$  και από την σχέση (7.22) ο ελεγκτής κέρδους συνεχούς ρεύματος δίδεται από:  $a_0 = 20/2 = 10$ .

```
>> num = 8;
>> den = [1 5 4 0];
>> [numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den); % Design
function
The function [numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den)
is used for the frequency response design of a linear
control system. num & den are row vectors of polynomial
coefficients of the uncompensated open-loop plant transfer
function. The controller transfer function and the frequency
domain specifications before and after compensation are
found.The function returns the open-loop & the closed-loop
numerator and denominators of the compensated system
transfer function.
```

Compensator type	Enter
-----	-----
Gain Compensation	1
Phase-lead	2
Phase-lag	3
PD Controller	4

```

        PI Controller                    5
        PID Controller                   6
        To quit                           0
Enter your choice -> 2
Enter the compensator DC Gain -> 2
Enter desired Phase Margin -> 45
For a stable controller select a compensated gain crossover
frequency wgc between      2.32 and      4.82
Suggested wgc for max. phase lead is      3.57
Enter wgc -> 3.57
Uncompensated control system
Gain Margin =      2.5      Gain crossover w =      1.22
Phase Margin =     22.5     Phase crossover w =      2

Controller transfer function
Gc(0) = 2,      Gc = 83.535(s + 0.821555)/(s + 34.3143)

Compensated open-loop
Transfer function:
      668.3 s + 549
-----
s^4 + 39.31 s^3 + 175.6 s^2 + 137.3 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      668.3 s + 549
-----
s^4 + 39.31 s^3 + 175.6 s^2 + 805.5 s + 549

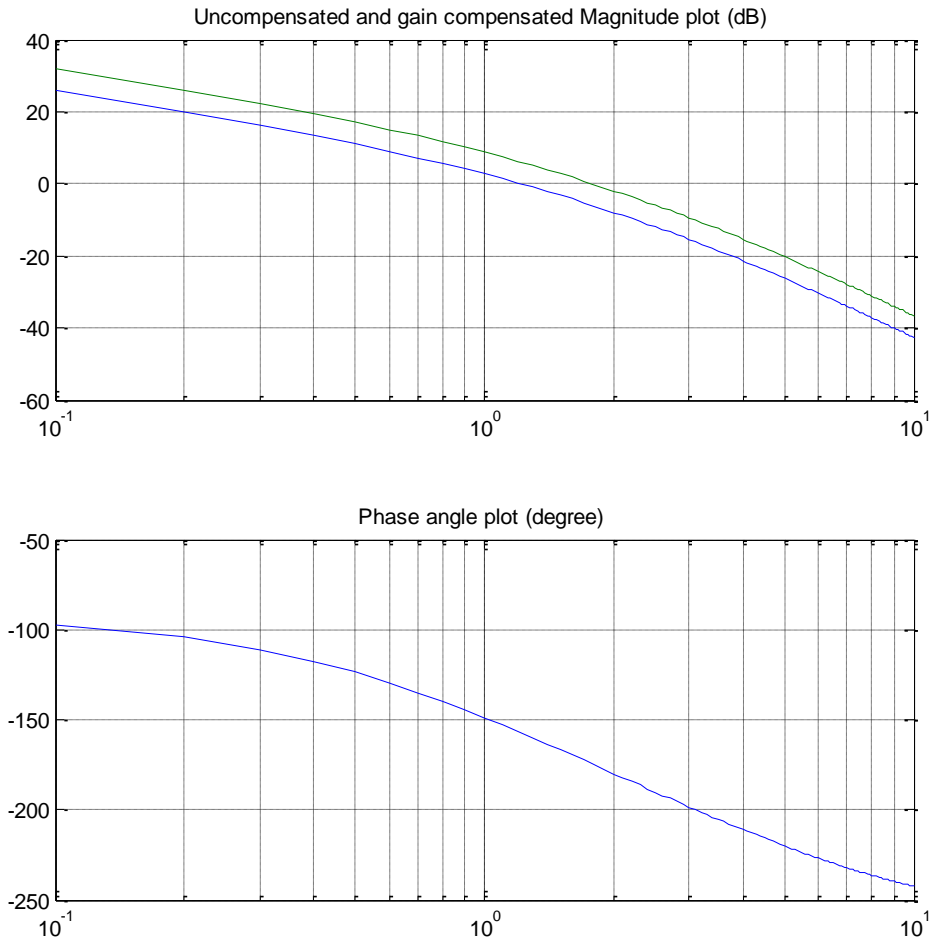
Gain Margin =      8.27      Gain crossover w =      3.57
Phase Margin =      45      Phase crossover w =      12
Peak Mag.   =      1.31      wr =      3.6      Bandwidth =
5.95

Roots of the compensated characteristic equation:
-34.9359
-1.7915 + 4.0680i
-1.7915 - 4.0680i
-0.7954
>> w = .1:.1:10;
>> [mag, phase] = bode(num, den, w);
>> dB = 20*log10(mag);
>> [magp, phasep] = bode(numopen, denopen, w);
>> dBP = 20*log10(magp);
>> subplot(211),semilogx(w, dB, w, dBP),
title('Uncompensated and compensated magnitude plot (dB)')
>> subplot(212),semilogx(w, phase, w, phasep), grid,
title('Uncompensated and compensated phase angle plot
(degree)')
>> t = 0:.05:4;
>> c = step(numopen,denclsd,t);

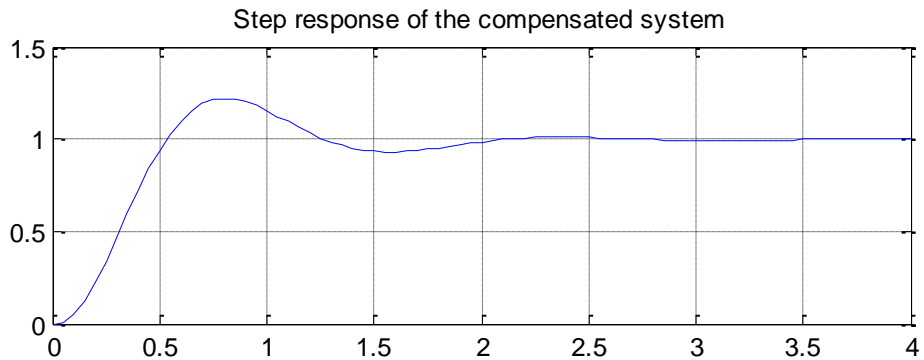
```

```
>> timespec(numopen, denclsd);
Peak time = 0.804629          Percent overshoot = 22.0277
Rise time = 0.352025
Settling time = 1.96128
```

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 7.8.



Σχήμα 7.8: Διάγραμμα Bode του παραδείγματος 7.8.



Σχήμα 7.9: Βηματική απόκριση του αντισταθμισμένου συστήματος του παραδείγματος 7.8.

Από το παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι η χρήση ενός ελεγκτή προήγησης φάσης μπορεί να αυξήσει το περιθώριο φάσης αλλά θα έχει ως αποτέλεσμα μία αύξηση των συχνοτήτων μηδενισμού. Στην απόκριση συχνότητας κλειστού βρόχου, το μέτρο συντονισμού κορυφής μειώνεται ενώ το εύρος ζώνης αυξάνεται. Αυτό αντιστοιχεί στην μείωση του ποσοστού υπέρβασης και του χρόνου ανόδου στην βηματική απόκριση.

Ένα επιπρόσθετο σημείο μπορεί να δημιουργηθεί που αφορά την σχέση μεταξύ του εύρους ζώνης και του χρόνου ανόδου που έχει συζητηθεί στο κεφάλαιο 4, στο τμήμα 4.4. Μία προσεγγιστική σχέση έχει δοθεί από την σχέση (4.18). Αυτή είναι η  $\omega_B t_r \approx \text{constant}$ . Η σύγκριση των μη αντισταθμισμένων και των αντισταθμισμένων τιμών δείχνει ότι αυτό το προϊόν είναι περίπου 2.

Ως τελική παρατήρηση για το σχεδιασμένο αντισταθμιστή, ο λόγος του κέρδους υψηλών συχνοτήτων όταν ( $\omega \rightarrow \infty$ ) με το κέρδος συνεχούς ρεύματος θα είναι  $83.535/2 = 41.76$ . Αυτό μπορεί να παράγει υψηλής συχνότητας προβλήματα θορύβου που μπορεί να μην είναι αποδεκτά για ορισμένα συστήματα. Σε αυτήν την περίπτωση, η αναλογία θα πρέπει να μειωθεί (συνήθως μία αναλογία της τάξεως του 10). Για να γίνει αυτό, επιλέγουμε μία χαμηλότερη συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας  $\omega_{pc}$  και επανασχεδιάζουμε το σύστημα.

### 7.7. Σχεδίαση καθυστέρησης φάσης

Η αντιστάθμιση καθυστέρησης φάσης έχει περίπου την ίδια συμπεριφορά με τον PI ελεγκτή και εφαρμόζεται σε συστήματα ελέγχου τα οποία έχουν ικανοποιητικά χαρακτηριστικά στη μεταβατική απόκριση αλλά η μόνιμη κατάσταση δεν εμφανίζει ικανοποιητικά χαρακτηριστικά και απαιτείται βελτίωση. Στην σχέση (7.18), ο αντισταθμιστής είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο, αν  $p_0 < z_0$ . Η αντιστάθμιση καθυστέρησης φάσης προσθέτει αρνητική γωνία και τείνει να αποσταθεροποιήσει το σύστημα. Το πρόβλημα της σχεδίασης είναι η Καθορισμός των παραμέτρων αντιστάθμισης για να βελτιωθεί το σφάλμα μόνιμης κατάστασης και για να διατηρηθεί ένα επιθυμητό περιθώριο φάσης για μία ικανοποιητική μεταβατική απόκριση. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αντισταθμιστή καθυστέρησης πρέπει να βρίσκονται ουσιαστικά χαμηλότερα από τη νέα συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας. Ως εκ τούτου, μπορούμε να μετακινήσουμε την νέα συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας σε χαμηλότερη συχνότητα,

διατηρώντας παράλληλα την καμπύλη φάσης του διαγράμματος Bode σχετικά αμετάβλητη στη συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας. Το αποτέλεσμα είναι μία αύξηση του κέρδους χαμηλών συχνοτήτων, ενώ το εύρος υψηλών συχνοτήτων είναι εξασθενημένο.

Οι σχέσεις (7.25) και (7.26) χρησιμοποιούνται για την σχεδίαση καθυστέρησης φάσης. Ωστόσο, επειδή η γωνία αντιστάθμισης πρέπει να είναι αρνητική, η σχέση (7.29) γίνεται:

$$\psi > -180^\circ + PM \quad (7.31)$$

Επίσης, για έναν αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης, δεδομένου ότι  $a_0 > G_c(j\omega_{gc})$  για την σχέση (7.24) θα ισχύει:

$$a_0 M > 1 \quad (7.32)$$

Για ένα σταθερό ελεγκτή, τα  $a_1$  και  $b_1$  πρέπει να είναι μεγαλύτερα από το μηδέν.

Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις η συνάρτηση

$$\text{[numopen,denopen,dencisd]} = \text{frqlag(num,den)}$$

έχει αναπτυχθεί για την σχεδίαση του ελεγκτή καθυστέρησης φάσης. Τα **num** και **den** είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Ο χρήστης εισάγει το επιθυμητό περιθώριο φάσης και τον ελεγκτή κέρδους συνεχούς ρεύματος,  $G_c(0) = K_c z_0/p_0$ . Το πρόγραμμα βρίσκει και εμφανίζει ένα εύρος αντισταθμισμένης συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας για έναν σταθερό ελεγκτή. Στη συνέχεια, ο χρήστης καθορίζει τη συχνότητα μηδενισμού σε αυτό το εύρος. Βρίσκονται η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή και οι προδιαγραφές στο πεδίο συχνοτήτων πριν και μετά την αντιστάθμιση. Υπολογίζονται επίσης οι ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η συνάρτηση επιστρέφει αριθμητές και παρονομαστές του ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### Παράδειγμα 7.9

Σχεδίαση ενός αντισταθμιστή καθυστέρησης φάσης για το σύστημα του παραδείγματος 7.7, έτσι ώστε το σύστημα να έχει περιθώριο φάσης  $45^\circ$  και σφάλμα σταθερής κατάστασης **0.05** λόγω μίας εισόδου ράμπας.

Η συνάρτηση **[numopen,denopen,dencisd] = frdesign(num,den)** με την επιλογή **3** χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση καθυστέρησης φάσης.

Η σταθερά σφάλματος ταχύτητας είναι  $K_u = 1/0.05 = 20$  και από την σχέση (7.22) ο ελεγκτής κέρδους συνεχούς ρεύματος είναι:  $a_0 = 20/2 = 10$ .

```
>> num = 8; den = [1 5 4 0];
>> [numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den);
% Design function
The function [numopen, denopen, denclsd] = frdesign(num,
den) is used for the frequency response design of a linear
control system. num & den are row vectors of polynomial
coefficients of the uncompensated open-loop plant transfer
function. The controller transfer function and the frequency
domain specifications before and after compensation are
found.The function returns the open-loop & the closed-loop
numerator and denominators of the compensated system
transfer function.
```

Compensator type	Enter
-----	-----
Gain Compensation	1
Phase-lead	2
Phase-lag	3
PD Controller	4
PI Controller	5
PID Controller	6
To quit	0

```
>> Enter your choice -> 3
>>Enter the compensator DC Gain -> 10
>>Enter desired Phase Margin -> 45
For a stable controller select a compensated gain crossover
frequency wgc between 8.33e-017 and 0.631
>>Enter wgc -> 0.4
Uncompensated control system
Gain Margin = 2.5 Gain crossover w = 1.22
Phase Margin = 22.5 Phase crossover w = 2

Controller transfer function
Gc(0) = 10, Gc = 0.206043(s + 0.128954)/(s +
0.00265701)

Compensated open-loop
Transfer function:
1.648 s + 0.2126
-----
s^4 + 5.003 s^3 + 4.013 s^2 + 0.01063 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
1.648 s + 0.2126
-----
s^4 + 5.003 s^3 + 4.013 s^2 + 1.659 s + 0.2126
```



```

Gain Margin = 10.2      Gain crossover w = 0.4
Phase Margin = 45      Phase crossover w = 1.84

Peak Mag. = 1.38      wr = 0.3      Bandwidth = 0.65

Roots of the compensated characteristic equation:
-4.1240
-0.3370 + 0.3719i
-0.3370 - 0.3719i
-0.2047
>> timespec(numopen, denclsd);
Peak time = 7.08463      Percent overshoot = 32.3439
Rise time = 2.63842
Settling time = 17.8337
    
```

Το πλεονέκτημα της σχεδίασης καθυστέρησης φάσης είναι ότι το σφάλμα μόνιμης κατάστασης μπορεί να μειωθεί σε μία χαμηλή τιμή. Ωστόσο, το μειονέκτημα είναι ότι το εύρος ζώνης μειώνεται και οδηγεί σε ένα μεγαλύτερο χρόνο ανόδου και έτσι σε μία πιο αργή απόκριση.

### 7.8. Σχεδίαση PID

Η σχεδίαση ελεγκτή PID σημαίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων ώστε το σύστημα ελέγχου να λειτουργεί με τις επιθυμητές προδιαγραφές. Το καθήκον του μηχανικού ελέγχου είναι να προσαρμόζει τους τρεις παράγοντες κέρδους για να καταλήξει σε έναν αποδεκτό βαθμό μείωσης του σφάλματος ταυτόχρονα με την πιο αποδεκτή δυναμική απόκριση.

Για ένα επιθυμητό περιθώριο φάσης **PM** το διάγραμμα Nyquist πρέπει να περάσει από το σημείο  $1\angle(-180 + PM)$  στη νέα συχνότητα μηδενισμού του κέρδους συχνότητας. Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή PID δίδεται από την σχέση (7.17). Για  $j\omega_{gc}$  η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή δίδεται από την:

$$G_c(j\omega_{gc}) = K_P + \frac{K_I}{j\omega_{gc}} + K_D j\omega_{gc} \quad (7.33)$$

Οι παράμετροι του ελεγκτή που βρέθηκαν [12] αντικαθιστώντας τη σχέση (7.33) στην σχέση (7.24) και εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι:

$$K_P = \frac{\cos \theta}{M} \quad (7.34)$$

$$K_D = \frac{K_I}{\omega_{gc}^2} + \frac{\sin \theta}{M\omega_{gc}} \quad (7.35)$$

όπου  $\theta$ ,  $\mathbf{M}$  και  $\psi$  δίδονται από τις σχέσεις (7.27) και (7.28).

Για έναν σταθερό ελεγκτή, τα  $\mathbf{K}_p$  και  $\mathbf{K}_D$  πρέπει να είναι θετικά. Έτσι το  $\omega_{gc}$  πρέπει να επιλεγεί τέτοιο ώστε η  $\theta$  στη σχέση (7.27) να είναι μικρότερη από  $90^\circ$ . Οι εξισώσεις (7.34) και (7.35), εφαρμόζονται για τη σχεδίαση ενός ελεγκτή PID. Για PD ή PI ελεγκτές, το κατάλληλο κέρδος ορίζεται στο μηδέν. Με βάση τις παραπάνω εξισώσεις, οι τρεις συναρτήσεις

$$[\text{numopen,denopen,dencld}] = \text{frqpd}(\text{num,den}),$$

$$[\text{numopen,denopen,dencld}] = \text{frqpi}(\text{num,den}),$$

$$[\text{numopen,denopen,dencld}] = \text{frqid}(\text{num,den})$$

έχουν αναπτυχθεί για την σχεδίαση του PID ελεγκτή. Τα **num** και **den** είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής των πολυωνυμικών συντελεστών της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Ο χρήστης εισάγει το επιθυμητό περιθώριο φάσης. Το πρόγραμμα βρίσκει και εμφανίζει ένα εύρος αντισταθμισμένης συχνότητας μηδενισμού του κέρδους συχνότητας, για έναν σταθερό ελεγκτή. Για τον ελεγκτή PID πρέπει επίσης να προσδιορίζεται η σταθερά  $\mathbf{K}_i$ . Βρίσκονται η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή και οι προδιαγραφές στο πεδίο της συχνότητας πριν και μετά την αντιστάθμιση. Υπολογίζονται επίσης οι ρίζες της αντισταθμισμένης χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η συνάρτηση επιστρέφει τους αριθμητές και παρονομαστές ανοικτού και κλειστού βρόχου της αντισταθμισμένης συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

### 7.8.1. Ελεγκτής PD

Ο αναλογικός – διαφορικός ελεγκτής PD επιτρέπει τη λειτουργία του συστήματος ελέγχου με μεγαλύτερες τιμές κέρδους (σε σχέση με τον P έλεγχο), περιορίζει τις ταλαντώσεις του συστήματος και ελαττώνει το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση. Η συνάρτηση μεταφοράς αντισταθμιστή είναι:

$$G_c(s) = K_p + K_D s \quad (7.36)$$

Ο ελεγκτής PD εισάγει ένα επιπλέον μηδενικό στο αρχικό σύστημα στο  $s = -K_p/K_D$  στη συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου. Αυτό βελτιώνει την μεταβατική απόκριση. Από μία διαφορετική οπτική γωνία, ο ελεγκτής PD μπορεί εξίσου να χρησιμοποιηθεί στην βελτίωση του σφάλματος σταθερής κατάστασης, διότι προσδοκά μεγάλα λάθη, και προσπαθεί να τα διορθώσει πριν αυτά συμβούν.

Η συνάρτηση **[numopen,denopen,dencldsd] = frdesign(num,den)** με την επιλογή **4** χρησιμοποιείται για το σχεδίαση του ελεγκτή PD. Η χρήση του αποδεικνύεται με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.10

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου του συστήματος ελέγχου δίδεται από την:

$$G_c(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+4)(s+5)} = \frac{50}{s^4 + 10s^3 + 29s^2 + 20s}$$

Σχεδιάζουμε έναν ελεγκτή PD για το παραπάνω σύστημα για να έχει ένα περιθώριο φάσης 50°. Επίσης, γίνεται εύρεση των προδιαγραφών απόδοσης στο πεδίο του χρόνου.

```
>> num = 50; den = [1 10 29 20 0];
>> [numopen,denopen,dencldsd] = frdesign(num,den);
% Design function
The function [numopen,denopen,dencldsd] = frdesign(num,den)
is used for the frequency response design of a linear
control system. num & den are row vectors of polynomial
coefficients of the uncompensated open-loop plant transfer
function. The controller transfer function and the frequency
domain specifications before and after compensation are
found.The function returns the open-loop & the closed-loop
numerator and denominators of the compensated system
transfer function.

                                Compensator type                                Enter
                                -----                                -----
Gain Compensation                                1
Phase-lead                                       2
Phase-lag                                        3
PD Controller                                    4
PI Controller                                    5
PID Controller                                    6
To quit                                          0

>>Enter your choice -> 4
>>Enter the desired phase margin -> 50
For a stable controller select a compensated gain crossover
frequency wgc between 0.509 and 2.6
>>Enter wgc -> 1.2
Uncompensated control system
Gain Margin = 1.08 Gain crossover w = 1.36
Phase Margin = 2.5 Phase crossover w = 1.41

Controller transfer function
Gc = 0.613155 + 0.4347s
```

```

Compensated open-loop
Transfer function:
      21.74 s + 30.66
-----
s^4 + 10 s^3 + 29 s^2 + 20 s

Compensated closed-loop
Transfer function:
      21.74 s + 30.66
-----
s^4 + 10 s^3 + 29 s^2 + 41.74 s + 30.66

Gain Margin =      6.72      Gain crossover w =      1.2
Phase Margin =      50      Phase crossover w =      4.07

Peak Mag.      =      1.19      wr =      1.1      Bandwidth =
2.04

Roots of the compensated characteristic equation:
-6.3470
-1.9390
-0.8570 + 1.3254i
-0.8570 - 1.3254i
>> timespec(numopen, denclsd);
Peak time = 2.31042          Percent overshoot = 18.1047
Rise time = 0.98018
Settling time = 5.06426
    
```

### 7.8.2. Ελεγκτής PI

Σε έναν ελεγκτή PI, το ολοκλήρωμα του σφάλματος καθώς και το ίδιο το σφάλμα χρησιμοποιείται για τον έλεγχο. Η αντισταθμισμένη συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \quad (7.37)$$

Ο PI ελεγκτής εισάγει ένα επιπλέον μηδενικό στο αρχικό σύστημα στο  $s = -\frac{K_I}{K_p}$  και ένα πόλο στο  $s = 0$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα:

- Να αυξάνει τον τύπο του συστήματος κατά 1 επομένως βελτιώνεται το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση.
- Να χειροτερεύει η ευστάθεια του συστήματος (λόγω του πόλου στο  $s = 0$ ).  
Για ορισμένες τιμές των  $K_p$  και  $K_I$  το σύστημα μπορεί να γίνει ασταθές.

Η συνάρτηση `[numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den)` με την επιλογή 5 χρησιμοποιείται για την σχεδίαση του ελεγκτή PI. Η χρήση του αποδεικνύεται με το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.11

Σχεδίαση ενός ελεγκτή PI για το σύστημα του παραδείγματος 7.10 για ένα αντισταθμισμένο σύστημα με περιθώριο φάσης 50°. Επίσης, γίνεται εύρεση των προδιαγραφών απόδοσης στο πεδίο του χρόνου.

```
>> num = 50; den = [1 10 29 20 0];
>> [numopen,denopen,dencldsd] = frdesign(num,den);
% Design function
The function [numopen,denopen,dencldsd] = frdesign(num,den)
is used for the frequency response design of a linear
control system. num & den are row vectors of polynomial
coefficients of the uncompensated open-loop plant transfer
function. The controller transfer function and the frequency
domain specifications before and after compensation are
found.The function returns the open-loop & the closed-loop
numerator and denominators of the compensated system
transfer function.
```

Compensator type	Enter
-----	-----
Gain Compensation	1
Phase-lead	2
Phase-lag	3
PD Controller	4
PI Controller	5
PID Controller	6
To quit	0

```

Enter your choice -> 5
Enter desired phase margin -> 50
For a stable controller select a compensated gain crossover
frequency wgc between 6.94e-017 and 0.458
Enter wgc -> 0.35
Uncompensated control system
Gain Margin = 1.08 Gain crossover w = 1.36
Phase Margin = 2.5 Phase crossover w = 1.41

Controller transfer function
Gc = 0.146155 + 0.0105983/s

Compensated open-loop
Transfer function:
7.308 s + 0.5299
-----
s^5 + 10 s^4 + 29 s^3 + 20 s^2

Compensated closed-loop
Transfer function:
7.308 s + 0.5299
-----
s^5 + 10 s^4 + 29 s^3 + 20 s^2 + 7.308 s + 0.5299

```

```
Gain Margin = 6.71 Gain crossover w = 0.35
Phase Margin = 50 Phase crossover w = 1.34

Peak Mag. = 1.24 wr = 0.225 Bandwidth =
0.537

Roots of the compensated characteristic equation:
-4.6041 + 0.4247i
-4.6041 - 0.4247i
-0.3493 + 0.3796i
-0.3493 - 0.3796i
-0.0932
>> timespec(numopen, denclsd);
Peak time = 7.9433 Percent overshoot = 24.8443
Rise time = 3.00557
Settling time = 31.4512
```

### 7.8.3. Ελεγκτής PID

Ο ελεγκτής PID χρησιμοποιείται για τη βελτίωση της δυναμικής απόκρισης, καθώς και για τη μείωση ή την εξάλειψη του σφάλματος μόνιμης κατάστασης. Η συνάρτηση **[numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den)** με την επιλογή **6** χρησιμοποιείται για το σχεδίαση του ελεγκτή PID. Η χρήση του καταδεικνύεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 7.12

Σχεδίαση ενός ελεγκτή PID για το σύστημα του παραδείγματος 7.10 για ένα αντισταθμισμένο σύστημα με περιθώριο φάσης **50°**. Επίσης, λαμβάνουμε τις προδιαγραφές απόδοσης στο πεδίο του χρόνου. Επιλογή του **K<sub>i</sub>** να έχει τιμή **0.01**.

```
>> num = 50; den = [1 10 29 20 0];
>> [numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den);
% Design function
The function [numopen,denopen,denclsd] = frdesign(num,den)
is used for the frequency response design of a linear
control system. num & den are row vectors of polynomial
coefficients of the uncompensated open-loop plant transfer
function. The controller transfer function and the frequency
domain specifications before and after compensation are
found.The function returns the open-loop & the closed-loop
numerator and denominators of the compensated system
transfer function.
```

Compensator type	Enter
-----	-----
Gain Compensation	1
Phase-lead	2

```

Phase-lag                                3
PD Controller                             4
PI Controller                              5
PID Controller                             6
To quit                                    0
Enter your choice -> 6
Enter the integrator gain KI -> 0.01
Enter the desired phase margin -> 50
For a stable controller select a compensated gain crossover
frequency wgc between 0.407 and 2.61
Enter wgc -> 1.2
Uncompensated control system
Gain Margin = 1.08 Gain crossover w = 1.36
Phase Margin = 2.5 Phase crossover w = 1.41

Controller transfer function
Gc = 0.613155 + 0.01/s + 0.441645s

Compensated open-loop
Transfer function:
 22.08 s^2 + 30.66 s + 0.5
-----
s^5 + 10 s^4 + 29 s^3 + 20 s^2

Compensated closed-loop
Transfer function:
 22.08 s^2 + 30.66 s + 0.5
-----
s^5 + 10 s^4 + 29 s^3 + 42.08 s^2 + 30.66 s + 0.5

Gain Margin = 6.69 Gain crossover w = 1.2
Phase Margin = 50 Phase crossover w = 4.09

Peak Mag. = 1.19 wr = 1.1 Bandwidth =
2.04

Roots of the compensated characteristic equation:
-6.3632
-1.8653
-0.8774 + 1.3246i
-0.8774 - 1.3246i
-0.0167
>> timespec(numopen, denclsd);
Peak time = 2.28 Percent overshoot = 18.7507
Rise time = 0.96
Settling time = 3.59563

```





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ SIMULINK

Το SIMULINK είναι ένα διαδραστικό περιβάλλον με το οποίο καθίσταται δυνατή η μοντελοποίηση, η ανάλυση και η προσομοίωση για ευρεία ποικιλία δυναμικών συστημάτων. Το SIMULINK παρέχει ένα γραφικό περιβάλλον για τον χρήστη (GUI) που επιτρέπει την κατασκευή δομικών διαγραμμάτων με "drag-and-drop" λειτουργίες. Ένα σύστημα ρυθμίζεται σύμφωνα με την αναπαράσταση του δομικού διαγράμματος από μία βιβλιοθήκη που έχει συγκεκριμένα εξαρτήματα.

Το SIMULINK μαθαίνεται πολύ εύκολα. Η κατασκευή ενός δομικού διαγράμματος είναι αρκετά εύκολη και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης εμφανίζονται γρήγορα. Οι αλγόριθμοι προσομοίωσης και οι παράμετροι μπορούν να αλλάξουν κατά την διάρκεια μίας προσομοίωσης, παρέχοντας έτσι στο χρήστη ένα εργαλείο μάθησης άμεσης πρόσβασης για την προσομοίωση πολλών λειτουργικών προβλημάτων που βρίσκονται στον πραγματικό κόσμο. Μία ιδιαίτερα χρήσιμη λειτουργία του προγράμματος είναι η μελέτη των επιπτώσεων και της συμπεριφοράς των μη γραμμικών συστημάτων και ως εκ τούτου καταλαβαίνουμε ότι είναι ένα ιδανικό εργαλείο έρευνας. Τα βασικά χαρακτηριστικά του SIMULINK είναι:

- Διαδραστικές προσομοιώσεις σε ζωντανή οθόνη.
- Μία ολοκληρωμένη δομική βιβλιοθήκη για τη δημιουργία γραμμικών, μη γραμμικών, διακριτών ή υβριδικών (multi-input) / συστημάτων εξόδου.
- Επτά μέθοδοι ολοκλήρωσης για σταθερό βήμα, μεταβλητό βήμα, και δύσκαμπτα συστήματα.
- Απεριόριστη δομή ιεραρχικού μοντέλου.
- Κλιμακοποιημένες και διανυσματικές συνδέσεις.
- Εγκατάσταση μάσκας για τη δημιουργία προσαρμοσμένων μπλοκ και δομημένων βιβλιοθηκών.

Επίσης το SIMULINK περιλαμβάνει μία ανοικτή αρχιτεκτονική που επιτρέπει στον χρήστη να επεκτείνει το περιβάλλον προσομοίωσης:

- Μπορούμε εύκολα να πραγματοποιήσουμε «what if» αναλύσεις αλλάζοντας τις παραμέτρους του μοντέλου είτε διαδραστικά ή σε batch mode ενώ η προσομοίωσή μας λειτουργεί.
- Δημιουργία προσαρμοσμένων μπλοκ και δομικών βιβλιοθηκών με τις δικές μας εικόνες και διασυνδέσεις από MATLAB, Fortran ή C κώδικα.

- Μπορούμε να αναπτύξουμε κώδικα C από μοντέλα SIMULINK για ενσωματωμένες εφαρμογές και για ταχεία προτυποποίηση συστημάτων ελέγχου.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε ιεραρχικά μοντέλα ομαδοποιώντας τα μπλοκ σε υποσυστήματα. Εκεί δεν υπάρχουν όρια στον αριθμό των μπλοκ ή των συνδέσεων.
- Το SIMULINK παρέχει άμεση πρόσβαση στις δυνατότητες του MATLAB (μαθηματικές, γραφικές και προγραμματιστικές). Μπορούμε να αναλύσουμε τα δεδομένα, να αυτοματοποιήσουμε τις διαδικασίες, και να βελτιστοποιήσουμε τις παραμέτρους απευθείας από το SIMULINK.
- Οι προηγμένες δυνατότητες σχεδίασης και ανάλυσης των εργαλειοθηκών μπορούν να εκτελεστούν μέσα από μία προσομοίωση με τη χρήση του **μηχανισμού μάσκας** στο SIMULINK.
- Η δομική βιβλιοθήκη του SIMULINK μπορεί να επεκταθεί με μπλοκ σετ ειδικού σκοπού. Το **DSP** μπλοκ σετ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη του αλγορίθμου DSP, ενώ το **Fixed-Point** μπλοκ σετ επεκτείνει το SIMULINK για τη μοντελοποίηση και προσομοίωση ψηφιακών συστημάτων ελέγχου και ψηφιακών φίλτρων.

### 8.1. Παράμετροι προσομοίωσης και οδηγός επίλυσης

Μπορούμε να ορίσουμε τις παραμέτρους προσομοίωσης και να επιλέξουμε τον τρόπο επίλυσης, επιλέγοντας το **Parameters** από το Simulation menu. Το SIMULINK εμφανίζει το παράθυρο διαλόγου με τις παραμέτρους προσομοίωσης (Simulation Parameters), το οποίο χρησιμοποιεί τρεις "σελίδες" για την διαχείριση των παραμέτρων προσομοίωσης, τις **Solver**, **Workspace I/O**, και **Diagnostics**.

#### Solver Page

Η σελίδα επίλυσης (Solver page) εμφανίζεται όταν επιλέγουμε την πρώτη παράμετρο από το μενού προσομοίωσης ή όταν επιλέγουμε την καρτέλα επίλυσης (Solver tab). Η σελίδα επίλυσης μας επιτρέπει να:

- Ρυθμίζουμε τους χρόνους έναρξης και λήξης. Μπορούμε να αλλάξουμε τον χρόνο έναρξης και λήξης για την προσομοίωση εισάγοντας νέες τιμές στα πεδία με τον χρόνο έναρξης και τον χρόνο διακοπής. Ο προεπιλεγμένος

χρόνος έναρξης είναι **0.0** δευτερόλεπτα και ο προεπιλεγμένος χρόνος διακοπής είναι **10.0** δευτερόλεπτα.

- Επιλέγουμε το `solver` και καθορίζουμε τις παραμέτρους επίλυσης. Ο προεπιλεγμένος επιλύτης παρέχει αποτελεσματικά και ακριβή αποτελέσματα για τα περισσότερα προβλήματα. Μερικοί επιλύτες μπορεί να είναι πιο αποδοτικοί από τους άλλους στην επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος. Μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε επιλύτες μεταβλητού και σταθερού βήματος. Οι επιλύτες μεταβλητού βήματος μπορούν να τροποποιήσουν το μέγεθος του βήματός τους κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Αυτές είναι οι εξής: **ode45**, **ode23**, **ode113**, **ode15s**, **ode23s** και η **discrete**. Η **ode45** είναι η εξ ορισμού επιλογή. Για επιλύτες μεταβλητού βήματος μπορούμε να θέσουμε τις παραμέτρους μέγιστου και αρχικού μεγέθους βήματος. Η εξ ορισμού επιλογή, υποδεικνύει και προσδιορίζει αυτόματα τις παραμέτρους και τα μεγέθη τους. Οι επιλογές που υπάρχουν για επιλύτες σταθερού βήματος είναι οι **ode5**, **ode4**, **ode3**, **ode2**, **ode1**, και η **discrete**.
- Οι επιλογές εξόδου (Output options) μας επιτρέπουν να ελέγχουμε πόσο μεγάλη έξοδο παράγει η προσομοίωση. Μπορούμε να επιλέξουμε από τρεις επιλογές. Αυτές είναι: **Refine output**, **Produce additional output**, and **Produce specified output only**.

### Workspace I/O page

Η σελίδα Workspace I/O διαχειρίζεται την είσοδο και την έξοδο στο χώρο εργασίας του MATLAB, και επιτρέπει:

- Την φόρτωση εισόδου από τον χώρο εργασίας. Μπορούμε να καθορίσουμε την είσοδο ως εντολή του MATLAB ή ως πίνακα για τα τμήματα εισαγωγής (Import blocks).
- Την αποθήκευση της εξόδου στο χώρο εργασίας. Μπορούμε να ορίσουμε τις μεταβλητές απόδοσης, επιλέγοντας τον χρόνο, την κατάσταση και / ή τον έλεγχο εξόδου επιλέγοντας το πλαίσιο αποθήκευσης στο χώρο εργασίας (Save to workspace area).

### Diagnosics page

Η σελίδα διαγνωστικών μας επιτρέπει να επιλέξουμε το επίπεδο των προειδοποιητικών μηνυμάτων που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια μίας προσομοίωσης.

### 8.2. Παράθυρο διαλόγου προσομοίωσης παραμέτρων

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις ενέργειες που εκτελούνται από τα κουμπιά στο παράθυρο διαλόγου και εμφανίζονται στο κάτω μέρος της κάθε σελίδας.

Πίνακας 8.1: Κουμπιά παραθύρου διαλόγου Simulink

ΚΟΥΜΠΙ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
Apply	Εφαρμόζει τις τρέχουσες τιμές των παραμέτρων και κρατά το παράθυρο διαλόγου ανοιχτό. Κατά τη διάρκεια μίας προσομοίωσης, οι τιμές των παραμέτρων εφαρμόζονται αμέσως.
Revert	Αλλάζει τις τιμές των παραμέτρων, ξανά με τις τιμές που είχαν όταν το παράθυρο διαλόγου άνοιξε για τελευταία φορά και εφαρμόζει τις παραμέτρους.
Close	Εφαρμόζει τις τιμές των παραμέτρων και κλείνει το παράθυρο διαλόγου. Κατά τη διάρκεια μίας προσομοίωσης, οι τιμές των παραμέτρων εφαρμόζονται αμέσως.
Help	Εμφανίζει κείμενο βοήθειας για τη σελίδα του παραθύρου διαλόγου.

Για να σταματήσουμε μία προσομοίωση, επιλέγουμε **διακοπή (Stop)** από το μενού προσομοίωσης (Simulation menu). Η συντόμευση πληκτρολογίου για τη διακοπή της προσομοίωσης είναι **Ctrl-T**. Μπορούμε να αναστείλουμε την εκτέλεση μίας προσομοίωσης επιλέγοντας **παύση(Pause)** από το μενού προσομοίωσης. Όταν επιλέγετε η παύση, το στοιχείο του μενού αλλάζει σε **συνέχεια (Continue)**. Μπορούμε να προχωρήσουμε με αναστολή προσομοίωση επιλέγοντας **συνέχεια (Continue)**.

### 8.3. Δημιουργία δομικού διαγράμματος

Πληκτρολογούμε την εντολή **SIMULINK** στη γραμμή εντολών του MATLAB. Στη συνέχεια εμφανίζεται μία βιβλιοθήκη που περιέχει 7 εικόνες και 5 pull down (scrolling) μενού. Κάθε εικονίδιο περιέχει διάφορα εξαρτήματα σε κάθε τίτλο κατηγορίας. Για να δούμε το περιεχόμενο της κάθε κατηγορίας κάνουμε διπλό κλικ στο εικονίδιό της. Τα εύκολα pull down μενού, μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα δομικό διάγραμμα SIMULINK ή μπορούμε να ανοίξουμε ένα υπάρχων αρχείο

και να κάνουμε οποιαδήποτε τροποποίηση στην εκτέλεση της προσομοίωσης. Βασικά, πρέπει να καθορίσουμε το μοντέλο του συστήματος (χώρος κατάστασης, διακριτές, συναρτήσεις μεταφοράς, μη γραμμικές κλπ), την είσοδο (**source**) στο σύστημα και πού η έξοδος (**sink**) της προσομοίωσης του συστήματος θα ξεκινήσει. Γενικά όταν σχεδιάζουμε ένα μοντέλο, το σχεδιάζουμε πρώτα στο χαρτί, και έπειτα το δημιουργούμε με την χρήση του υπολογιστή. Όταν ξεκινάμε να βάζουμε τα μπλοκ μαζί σε ένα μοντέλο, προσθέτουμε τα μπλοκ στο παράθυρο του μοντέλου πριν προσθέσουμε τις γραμμές που τα συνδέουν. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να μειώσουμε την συχνότητα ανοιγμάτων των δομικών βιβλιοθηκών. Μία εισαγωγή στο SIMULINK παρουσιάζεται με την κατασκευή του διαγράμματος SIMULINK για τα ακόλουθα παραδείγματα.

### Μοντελοποίηση εξισώσεων

Εδώ είναι μερικά παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση της δημιουργίας μοντελοποιημένων εξισώσεων.

#### Παράδειγμα 8.1

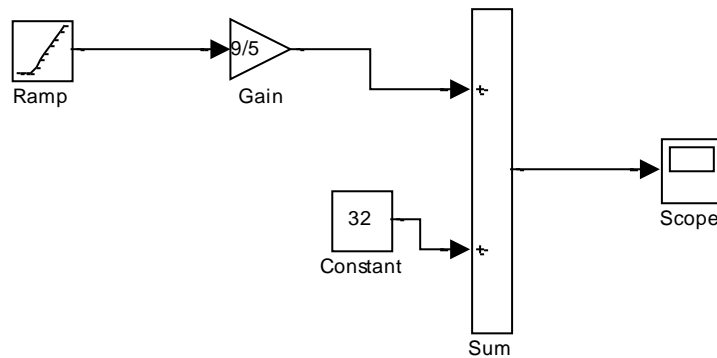
Μοντελοποίηση της εξίσωσης η οποία μετατρέπει την θερμοκρασία Κελσίου σε Φαρενάιτ. Λαμβάνουμε σε μία οθόνη το γράφημα θερμοκρασίας Φαρενάιτ - Κελσίου για εύρος από **0** έως **100° C**.

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$$

Αρχικά, εξετάζουμε τα μπλοκ που απαιτούνται για την κατασκευή του μοντέλου. Αυτά είναι:

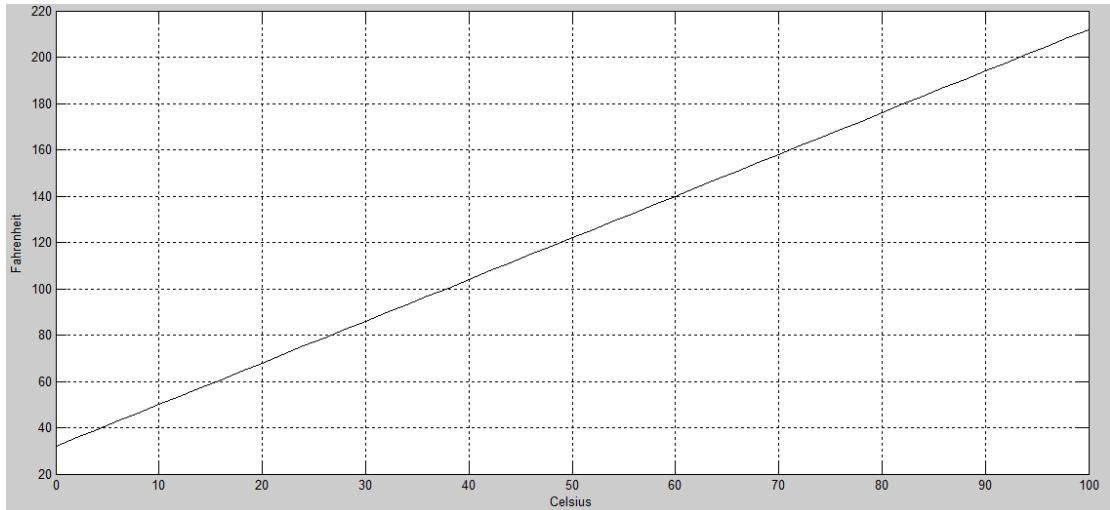
- Ένα μπλοκ **ramp (ράμπτα)**, για την είσοδο του σήματος θερμοκρασίας, από τη βιβλιοθήκη **source**.
- Ένα μπλοκ **constant (σταθερά)**, για τον ορισμό της σταθεράς **32**, από τη βιβλιοθήκη **source**.
- Ένα μπλοκ **gain (κέρδος)**, για τον πολλαπλασιασμό του σήματος εισόδου με **9/5**, από τη βιβλιοθήκη **Linear**.
- Ένα μπλοκ **sum (άθροισμα)**, για την πρόσθεση των δύο ποσοτήτων, από τη βιβλιοθήκη **Linear**.
- Ένα μπλοκ **scope** για να εμφάνιση της εξόδου, από τη βιβλιοθήκη **Sink**.

Για να δημιουργήσουμε ένα δομικό διάγραμμα SIMULINK επιλέγουμε **new** από το **File** μενού. Αυτό παρέχει ένα άτιπλο κενό παράθυρο για την σχεδίαση και προσομοίωση ενός δυναμικού συστήματος. Αντιγράφουμε τα παραπάνω μπλοκ από τις δομικές βιβλιοθήκες σε νέο παράθυρο πατώντας και σέρνοντας με το κουμπί του ποντικιού. Αντιστοιχίζουμε τις τιμές των παραμέτρων στα **Gain** και **Constant** μπλοκ με το άνοιγμα (διπλό κλικ πάνω) σε κάθε μπλοκ και εισάγουμε την κατάλληλη τιμή. Στη συνέχεια, κάνουμε κλικ στο κουμπί **close** για να εφαρμόσει τις τιμές και κλείνουμε το παράθυρο διαλόγου. Το επόμενο βήμα είναι να συνδέσουμε αυτά τα εικονίδια σχεδιάζοντας τις γραμμές που συνδέουν τις εικόνες χρησιμοποιώντας το αριστερό κλικ του ποντικιού (κρατημένο πατημένο το κλικ προς τα κάτω και σύρσιμο του ποντικιού για την σχεδίαση μίας γραμμής). Πρέπει τώρα να έχουμε το δομικό διάγραμμα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.1.



Εικόνα 8.1: Διάγραμμα Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.1

Το μπλοκ ράμπας εισάγει την θερμοκρασία κελσίου. Ανοίγουμε αυτό το μπλοκ, και ρυθμίζουμε την κλίση (Slope) στην τιμή **1**, το Start time στην τιμή **0**, και την αρχική έξοδο (Initial output) στο **0**. Το μπλοκ Gain πολλαπλασιάζει τη θερμοκρασία με τη σταθερά **9/5**. Το μπλοκ Sum προσθέτει την τιμή **32** στο αποτέλεσμα και εξάγει τη θερμοκρασία Φαρενάιτ. Τραβάμε προς τα κάτω το πλαίσιο διαλόγου προσομοίωσης (Simulation) και επιλέγουμε παράμετροι (Parameters). Ρυθμίζουμε τον χρόνο έναρξης (Start time) στο μηδέν και τον χρόνο διακοπής (Stop Time) στο **100**. Τραβάμε προς τα κάτω το μενού File και χρησιμοποιούμε την αποθήκευση (Save) για να αποθηκεύσουμε το μοντέλο στο αρχείο **exam8\_1**. Ξεκινάμε την προσομοίωση. Κάνουμε διπλό κλικ στο πεδίο εφαρμογής (scope), κάνουμε κλικ στο Auto Scale, και εμφανίζεται το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.1.



Σχήμα 8.1: Διάγραμμα θερμοκρασία Φαρενάιτ-Κελσίου του παραδείγματος 8.1

Παράδειγμα 8.2

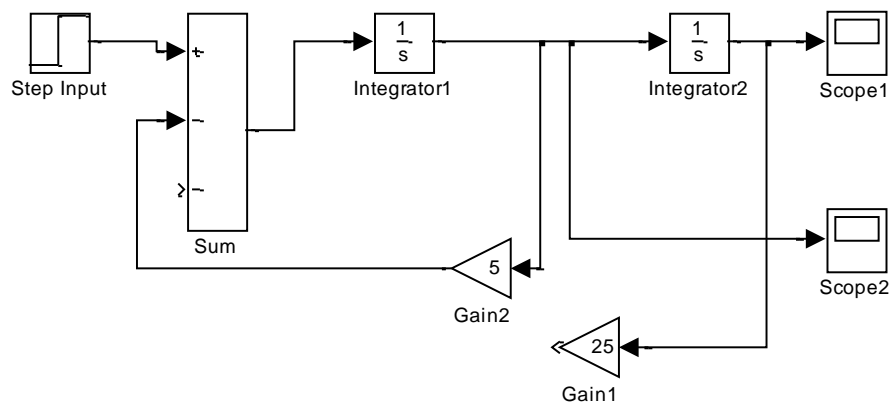
Κατασκευή ενός διαγράμματος προσομοίωσης για την εξίσωση κατάστασης που περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{M} [f(t) - Bx_2 - kx_1]$$

όπου  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $B = 5 \text{ N/m/sec}$ ,  $K = 25 \text{ N/m}$  και  $f(t) = 25u(t)$ .

Το διάγραμμα προσομοίωσης προέρχεται από τις παραπάνω εξισώσεις και παρουσιάζεται στην Εικόνα 8.2.



Εικόνα 8.2: Διάγραμμα Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.2

Για την δημιουργία ενός δομικού διαγράμματος SIMULINK:

1. Επιλέγουμε **new** από το **File** μενού. Αυτό παρέχει ένα άπυλο κενό παράθυρο για την σχεδίαση και προσομοίωση ενός δυναμικού συστήματος.
2. Αντιγράφουμε τα παραπάνω μπλοκ από τις δομικές βιβλιοθήκες σε νέο παράθυρο πατώντας και σέρνοντας με το κλικ του ποντικιού.
3. Ανοίγουμε τη βιβλιοθήκη **Source Library** και σέρνουμε το μπλοκ βηματικής εισόδου (**Step Input block**) για το παράθυρό μας.
4. Κάνουμε διπλό κλικ στην βηματική είσοδο για να ανοίξουμε το παράθυρο διαλόγου.
5. Ρυθμίζουμε το χρόνο του βήματος (**step time**) στο **0**, την αρχική τιμή (**Initial Value**) στο **0**, και την τελική τιμή (**Final Value**) στο **25** για να εκπροσωπή την βηματική είσοδο.
6. Ανοίγουμε την Linear Library και σέρνουμε το μπλοκ Sum προς τα δεξιά του μπλοκ Step Input.
7. Ανοίγουμε το παράθυρο διαλόγου του Sum και εισαγάγουμε + - - κάτω από την λίστα προσήμων (**List of Signs**).
8. Χρησιμοποιώντας το αριστερό κλικ του ποντικιού, κάνουμε κλικ και σέρνουμε από τη θύρα εξόδου του Step Input στη θύρα εισόδου του Sum για τη σύνδεσή τους.
9. Σέρνουμε ένα αντίγραφο του μπλοκ Integrator από τη Linear Library και το συνδέουμε στην έξοδο του μπλοκ Sum.
10. Κάνουμε κλικ στο μπλοκ Integrator μία φορά για να το επισημάνουμε.
11. Χρησιμοποιούμε την εντολή **Edit** από τη γραμμή του μενού για να αντιγράψουμε και να επικολλήσουμε έναν δεύτερο Integrator.
12. Έπειτα σέρνουμε ένα αντίγραφο του Gain μπλοκ από τη Linear Library.
13. Επισημάνουμε το μπλοκ Gain, και από το pull-down μενού επιλογών, κάνοντας κλικ στο **Flip Horizontal**, περιστρέφουμε το Gain μπλοκ κατά **180°**.
14. Κάνουμε διπλό κλικ στο μπλοκ Gain για να ανοίξουμε το παράθυρο διαλόγου και να ρυθμίσουμε το κέρδος στο **0**.
15. Κάνουμε ένα αντίγραφο του ίδιου μπλοκ και ορίζουμε το κέρδος της στο **25**.
16. Συνδέουμε τα δύο μπλοκ όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.2.
17. Τέλος, παίρνουμε δύο γραφήματα Auto-Scale από τη Βιβλιοθήκη Sink, και τα συνδέουμε με την έξοδο του κάθε Integrator.



Πριν από την έναρξη της προσομοίωσης, πρέπει να ρυθμίσουμε τις παραμέτρους της προσομοίωσης.

1. Τραβάμε προς τα κάτω το πλαίσιο διαλόγου προσομοίωσης (**Simulation**) και επιλέγουμε παραμέτρους (**Parameters**).
2. Ρυθμίζουμε την ώρα έναρξης να είναι μηδέν, το Stop Time στο **3**, και για μία πιο ακριβή ολοκλήρωση, θέτουμε ανώτατο βήμα μεγέθους **0.1**.
3. Αφήνουμε τις άλλες παραμέτρους στις προεπιλεγμένες τιμές τους.
4. Πατάμε **OK** για να κλείσουμε το κουτί διαλόγου.

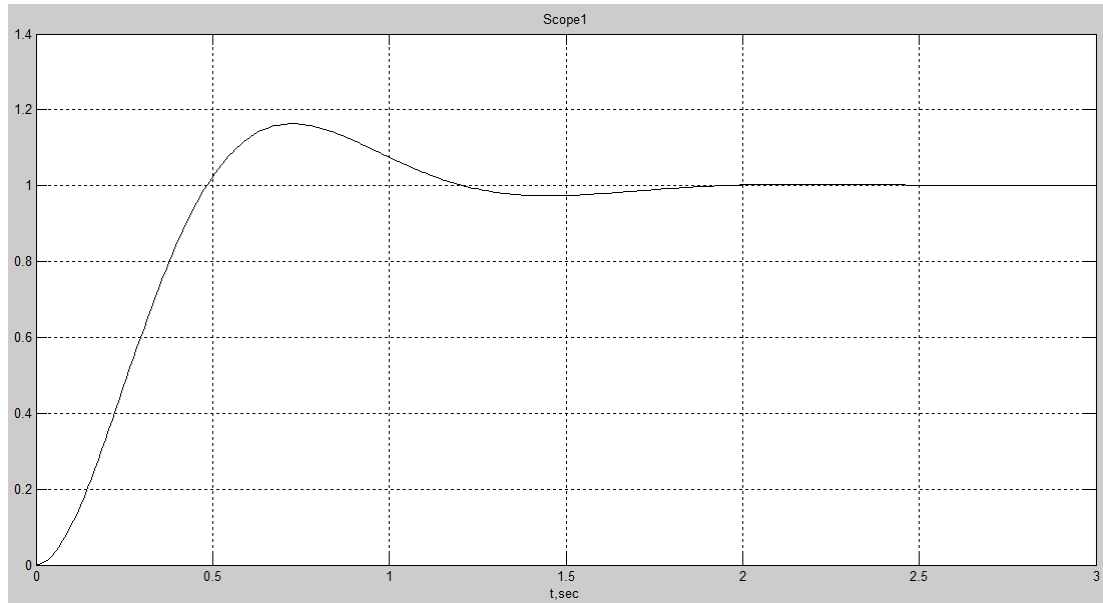
Αν δεν μας αρέσει κάποια πτυχή του διαγράμματος, μπορούμε να την αλλάξουμε με πολλούς τρόπους:

- Να μετακινήσουμε οποιοδήποτε εικονίδιο κάνοντας κλικ στο κέντρο του και το σέρνουμε.
- Να μετακινήσουμε οποιαδήποτε γραμμή κάνοντας κλικ σε μία από τις γωνίες.
- Να αλλάξουμε το μέγεθος και το σχήμα οποιουδήποτε εικονιδίου κάνοντας κλικ και σέρνοντας το από τις γωνίες.
- Να αφαιρέσουμε οποιαδήποτε γραμμή ή εικονίδιο κάνοντας κλικ σε αυτό για να το επιλέξουμε και χρησιμοποιώντας την εντολή **cut** από το μενού επεξεργασίας (**Edit**).

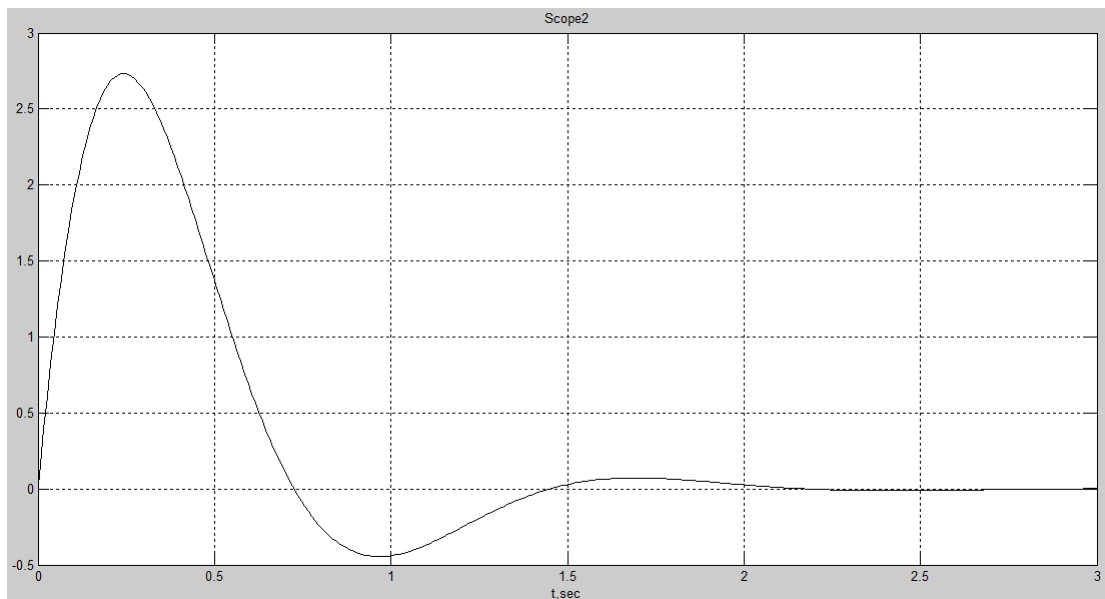
Μετά από όλα αυτά πρέπει τώρα να έχουμε ακριβώς το ίδιο σύστημα όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.2.

Τραβάμε προς τα κάτω το μενού **File** και χρησιμοποιούμε το Αποθήκευση ως (**Save as**) για να αποθηκεύσουμε το μοντέλο κάτω από ένα όνομα αρχείου **exam8\_2**. Ξεκινώντας την προσομοίωση, το SIMULINK θα δημιουργήσει το σχήμα και θα εμφανίσει τις απαντήσεις του συστήματος σε παράθυρα.

Για να δούμε το δεύτερο σχήμα, κάνουμε κλικ και σέρνουμε το πρώτο σε μία νέα θέση. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης παρουσιάζονται στο Σχήμα 8.2 και Σχήμα 8.3.



Σχήμα 8.2: Μετατόπιση απόκρισης του συστήματος του παραδείγματος 8.2.



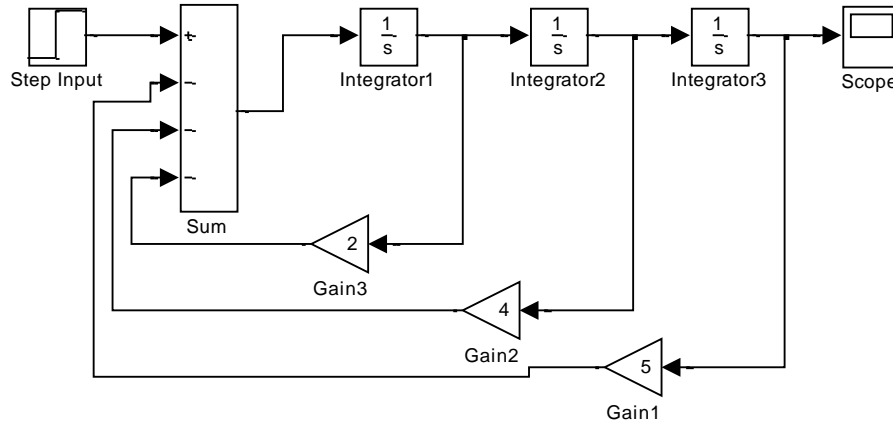
Σχήμα 8.3: Ταχύτητα απόκρισης του συστήματος του παραδείγματος 8.2.

Το SIMULINK μας δίνει τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε και να προσομοιώσουμε πολλά πολύπλοκα συστήματα, όπως συστήματα ελέγχου διαμορφωμένα από δομικό διάγραμμα με συναρτήσεις μεταφοράς συμπεριλαμβανομένης της ιδιότητας της μη γραμμικότητας κ.ά. Επιπλέον, το SIMULINK παρέχει μία σειρά από ενσωματωμένα μοντέλα και υποσυστήματα στο χώρο κατάστασης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα.

Παράδειγμα 8.3

Εξετάζουμε το σύστημα που ορίζεται από:

$$2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 10y = 10u(t)$$



Εικόνα 8.3: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3.

Έχουμε ένα σύστημα τρίτης τάξης, έτσι υπάρχουν τρεις μεταβλητές κατάστασης. Αν επιλέξουμε τις μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

στη συνέχεια παίρνουμε:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -5x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5u(t)$$

Η τελευταία από αυτές τις τρεις εξισώσεις ελήφθη με την επίλυση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης για την υψηλότερη παράγωγο  $\ddot{y}$  αντικαθιστώντας στη συνέχεια  $y = x_1$ ,  $\dot{y} = x_2$ ,  $\ddot{y} = x_3$  στην εξίσωση που προκύπτει. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων, η εξίσωση κατάστασης θα είναι:

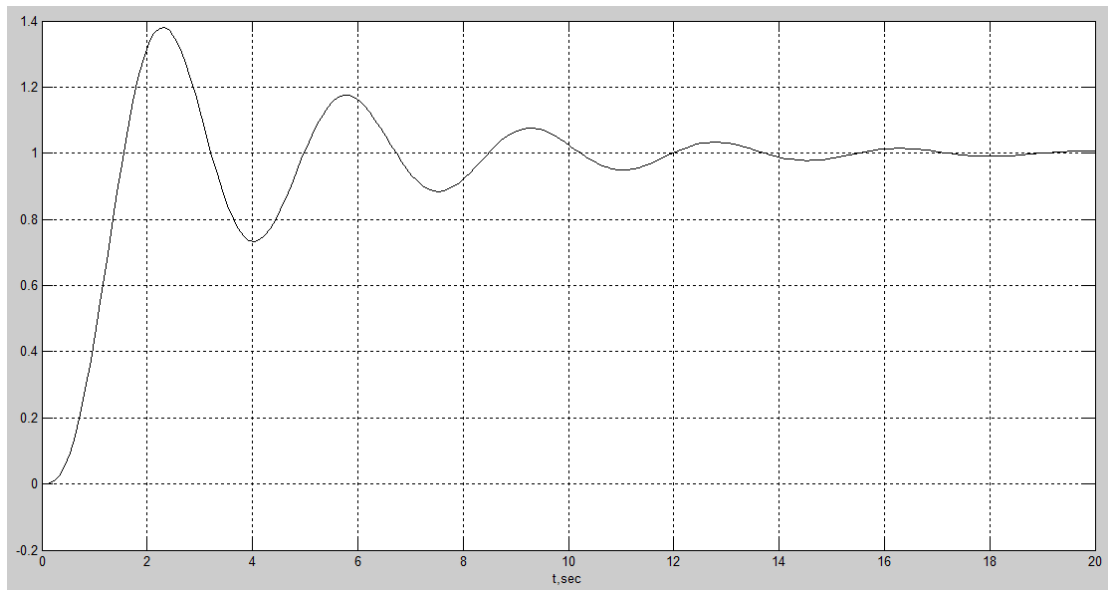
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

και η εξίσωση εξόδου δίνεται από:

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

Το διάγραμμα προσομοίωσης λαμβάνεται από το διαφορικό σύστημα εξισώσεων και δίδεται στην Εικόνα 8.3. Το δομικό διάγραμμα του SIMULINK

δημιουργήθηκε και αποθηκεύτηκε ως **exam8\_3**. Η προσομοίωση της απόκρισης φαίνεται στο Σχήμα 8.4.

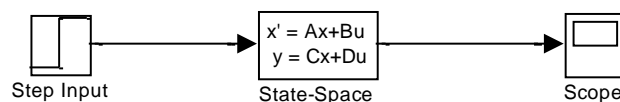


Σχήμα 8.4: Αποτέλεσμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3.

#### Παράδειγμα 8.4

Χρησιμοποιούμε το μοντέλο χώρου κατάστασης (state-space model) για να προσομοιώσουμε τις εξισώσεις κατάστασης και εξόδου που περιγράφονται στο παράδειγμα 8.3.

Το μοντέλο στο χώρο κατάστασης παρέχει ένα παράθυρο διαλόγου, όπου οι πίνακες  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , και  $D$  μπορούν να εισαχθούν στο συμβολισμό πινάκων του MATLAB, ή από τις μεταβλητές που ορίζονται στο χώρο εργασίας (Workspace). Ένα διάγραμμα SIMULINK χρησιμοποιώντας το μοντέλο χώρου κατάστασης κατασκευάζεται όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.4, και αποθηκεύεται ως **exam8\_4**.



Εικόνα 8.4: Μοντέλο χώρου κατάστασης για το σύστημα του παραδείγματος 8.4.

Σημειώνουμε ότι σε αυτό το παράδειγμα, η έξοδος δίνεται από την  $y = x_1$ , και ορίζουμε το  $C$  ως  $C = [1 \ 0 \ 0]$ . Αν είναι επιθυμητό να έχουμε πρόσβαση σε όλες τις καταστάσεις, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον  $C$  ως ταυτοτικό πίνακα, στην περίπτωση αυτή μίας τρίτης τάξης, δηλαδή,  $C = eye(3)$ , και  $D$  ως  $D =$

`zeros(3,1)`. Η έξοδος είναι ένα διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης. Ένα **Demux** μπλοκ μπορεί να προστεθεί για να παραχθούν όλες οι καταστάσεις μεμονωμένα αλλά και οι γραφικές παραστάσεις ξεχωριστά.

#### 8.4. Χρήση του **Workspace block**

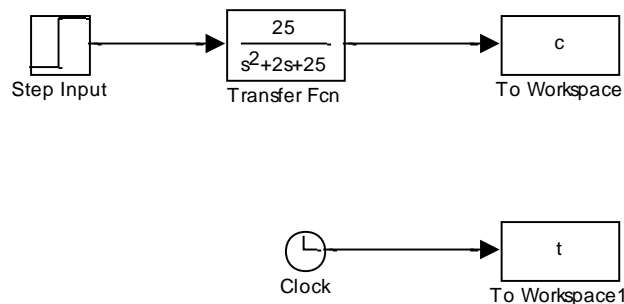
Το **Workspace block** μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιστρέψει τις διαδρομές εξόδου στο χώρο εργασίας (**Workspace**) του **MATLAB**. Το παράδειγμα 8.5 επεξηγεί τη χρήση αυτή.

##### Παράδειγμα 8.5

Λαμβάνουμε την βηματική απόκριση της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς και στέλνουμε το αποτέλεσμα στο **Workspace** του **MATLAB**.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25}$$

όπου  $\varphi(t)$  είναι μοναδιαία βηματική συνάρτηση. Το δομικό διάγραμμα του **SIMULINK** κατασκευάζεται και αποθηκεύεται σε ένα αρχείο με όνομα **exam8\_5** όπως φαίνεται στην Εικόνα 8.5.



Εικόνα 8.5: Μοντέλο Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.5.

Το **Workspace block** μπορεί να αποδεχθεί ένα διάνυσμα σαν είσοδο, και για κάθε στοιχείο εισόδου του οι διαδρομές αποθηκεύονται σαν ένα διάνυσμα στήλης στην προκύπτουσα μεταβλητή στο χώρο εργασίας (**Workspace**). Για να καθορίσουμε τις μεταβλητές ανοίγουμε το **block workspace** και για το όνομα της μεταβλητής πληκτρολογούμε **c**. Το διάνυσμα χρόνου αποθηκεύεται με τη μορφή ενός μπλοκ ρολογιού στο **Workspace**. Γι 'αυτό το μπλοκ το όνομα μεταβλητής είναι το **t**. Τα διανύσματα **c** και **t** επιστρέφονται στο **Workspace** του **MATLAB** κατόπιν προσομοίωσης.

### 8.5. Αναπαράσταση γραμμικού μοντέλου στον χώρο κατάστασης από διάγραμμα SIMULINK

Το SIMULINK παρέχει τις συναρτήσεις **linmod**, και **dlinmod** για την εξαγωγή γραμμικών μοντέλων από δομικό διάγραμμα σε μορφή πινάκων στον χώρο κατάστασης A, B, C, και D. Οι πίνακες στο χώρο κατάστασης περιγράφουν τη γραμμική σχέση εισόδου-εξόδου:

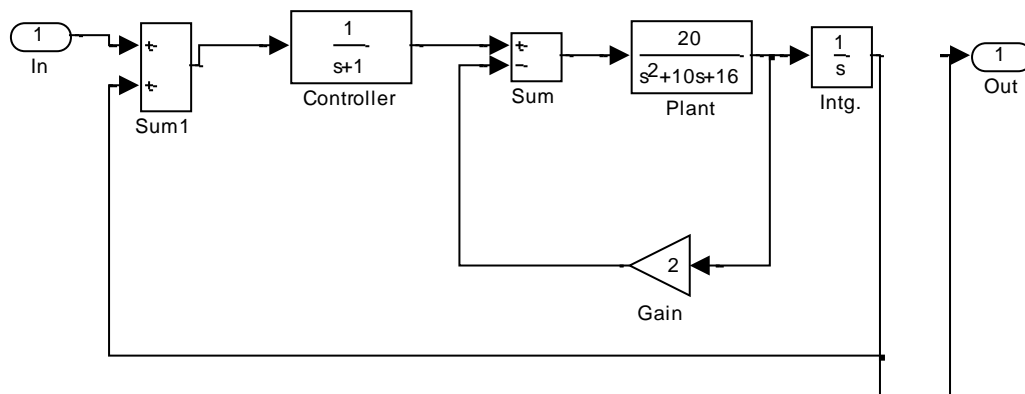
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (8.2)$$

Το ακόλουθο παράδειγμα απεικονίζει τη χρήση της συνάρτησης **linmod**. Η είσοδος και η έξοδος του διαγράμματος SIMULINK πρέπει να ορίζονται χρησιμοποιώντας **Inport** και **Outport** μπλοκ όπως **Source** και **Sink**.

#### Παράδειγμα 8.6

Λαμβάνουμε το μοντέλο χώρου κατάστασης του συστήματος που αντιπροσωπεύεται από το δομικό διάγραμμα παρουσιάζεται στην . Το μοντέλο αποθηκεύεται με όνομα αρχείου **exam8\_6**. Εκτελούμε την προσομοίωση για να εξαγάγουμε το γραμμικό μοντέλο του συστήματος του SIMULINK.



Εικόνα 8.6: Μοντέλο Simulink για το σύστημα του παραδείγματος 8.6.

```

>> [A,B,C,D] = linmod('exam8_6')
A =
    0     0     0    20
   -1    -1     0     0
   -1     1   -10   -56
    0     0     1     0
B =
    0
    1
    1
    0
C =
    1     0     0     0
D =
    0
>> [num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
num =
         0    0.0000    0.0000    20.0000    40.0000
den =
    1.0000    11.0000    66.0000    76.0000    40.0000

```

Προκειμένου να επιτευχθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος από το μοντέλο στο χώρο κατάστασης, εμείς χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση:

$$[\text{num},\text{den}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$$

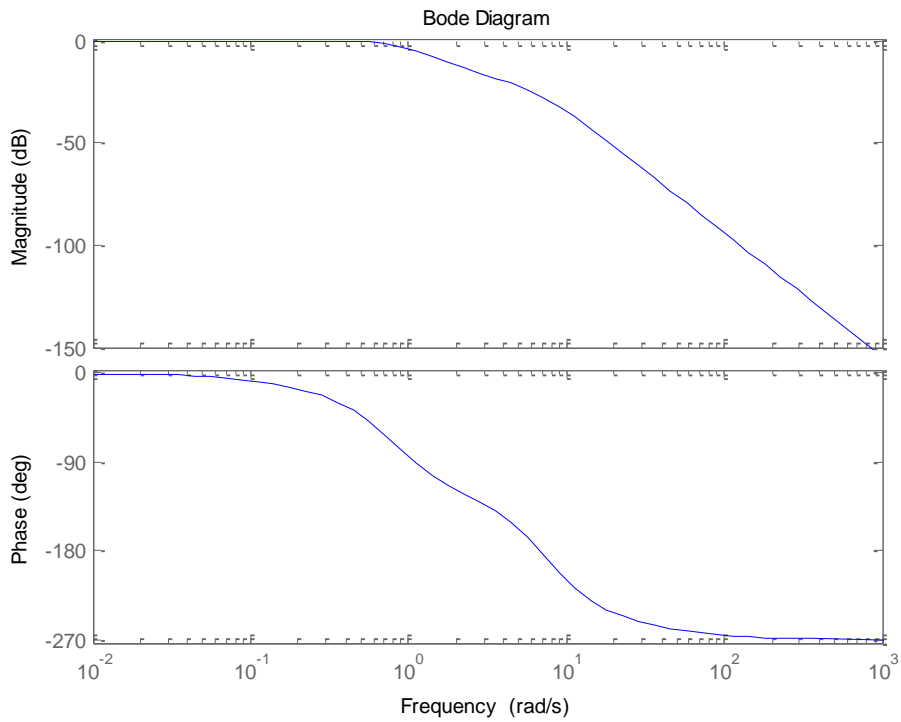
Έτσι, το μοντέλο της συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$T(s) = \frac{20s + 40}{s^4 + 11s^3 + 66s^2 + 76s + 40}$$

Όταν τα δεδομένα είναι υπό τη μορφή χώρου κατάστασης, ή πρέπει να μετατραπεί η συνάρτηση μεταφοράς ενός μοντέλου πρέπει να εφαρμόσουμε συναρτήσεις από το *Control System Toolbox* του MATLAB για περαιτέρω ανάλυση:

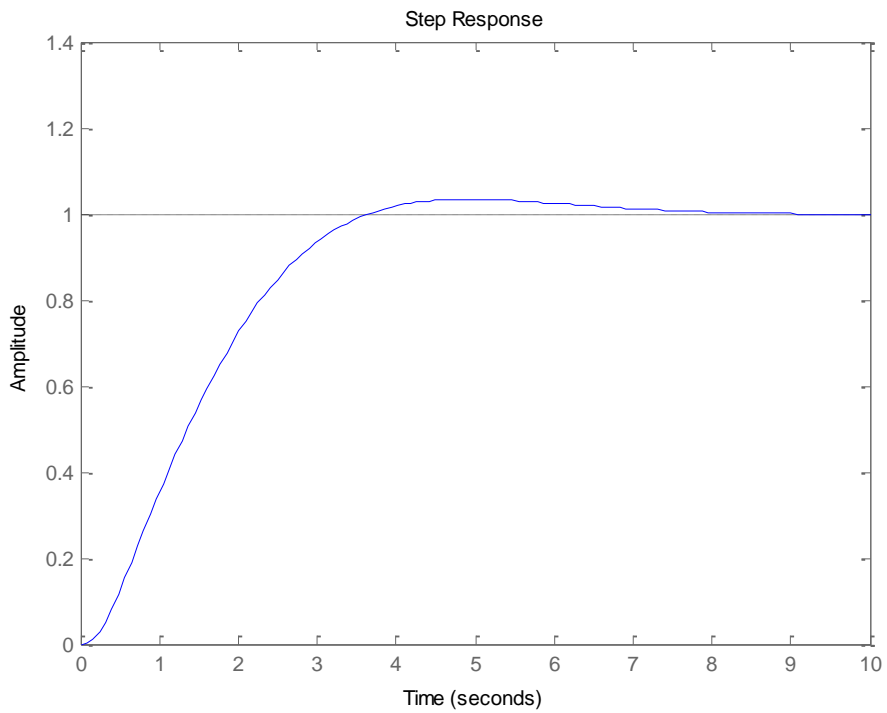
- Διάγραμμα Bode:

***bode(A, B, C, D)*** ή ***bode(num, den)***



- Γραμμικοποιημένος χρόνος απόκρισης:

***step(A, B, C, D)*** ή ***step(num, den)***





*lsim(H, u, t)*

```
>>H=tf(num,den)
```

Transfer function:

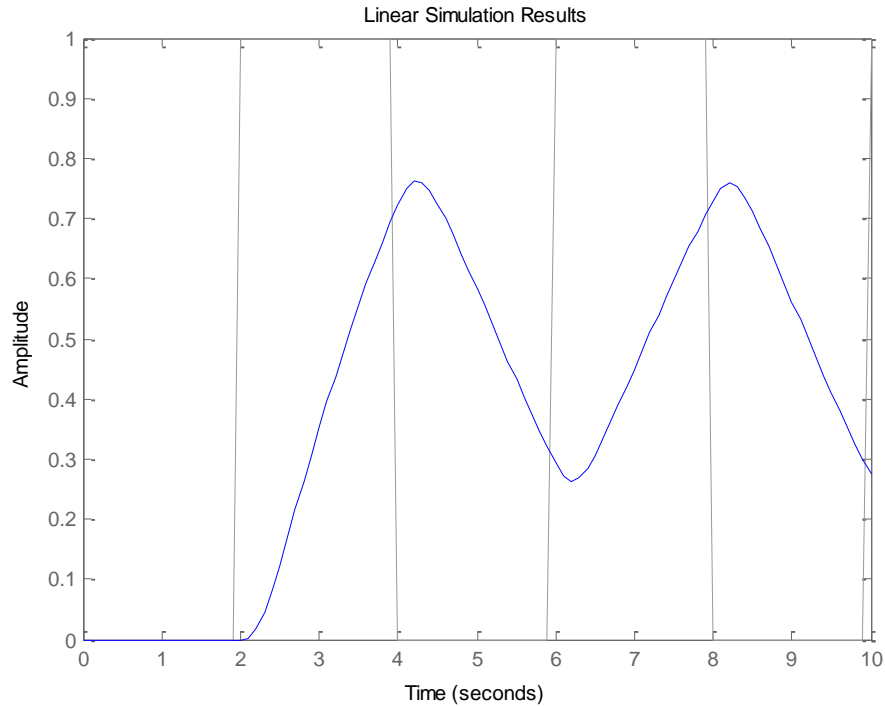
$$2.487e-014 s^3 + 2.7e-013 s^2 + 20 s + 40$$

-----

$$s^4 + 11 s^3 + 66 s^2 + 76 s + 40$$

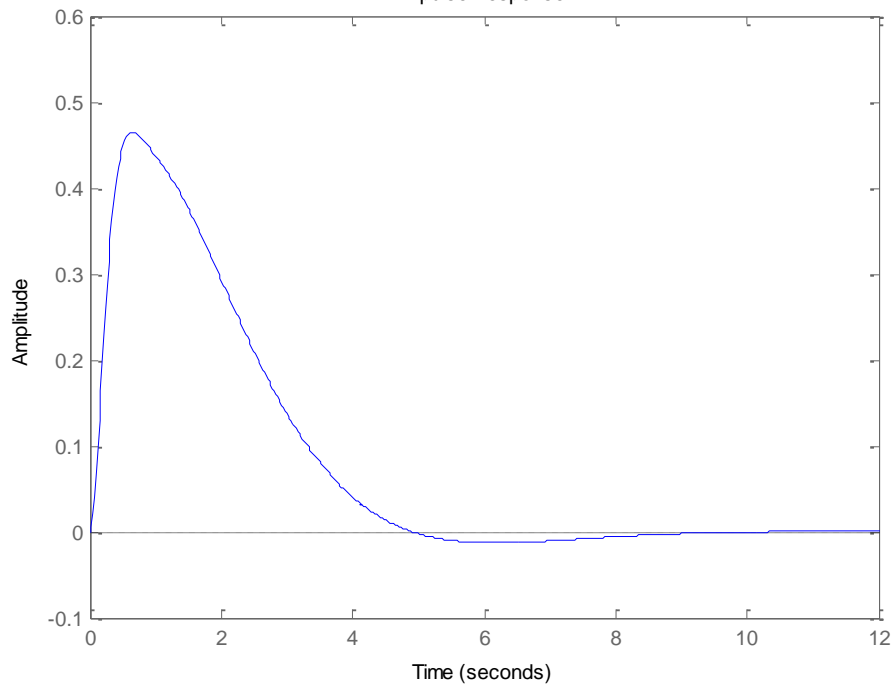
```
>>[u,t] = gensig('square',4,10,0.1);
```

```
>>lsim(H,u,t)
```



*impulse(A, B, C, D)* ή *impulse(num, den)*

Impulse Response



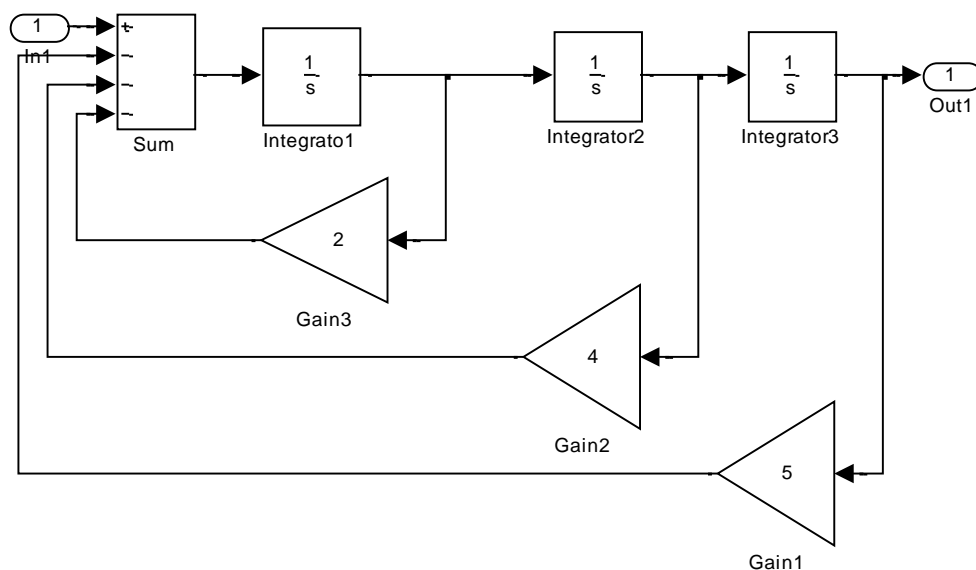
### 8.6. Υποσυστήματα και τεχνική μάσκας

Τα υποσυστήματα του SIMULINK, είναι παρόμοια με τα υποπρογράμματα στις παραδοσιακές γλώσσες προγραμματισμού. Η μάσκα είναι ένα ισχυρό χαρακτηριστικό του SIMULINK που μας επιτρέπει να προσαρμόσουμε το παράθυρο διαλόγου και το εικονίδιο σε ένα μπλοκ ή υποσύστημα. Με τη μάσκα, μπορούμε να απλοποιήσουμε τη χρήση του μοντέλου μας, αντικαθιστώντας πολλά παράθυρα διαλόγου σε ένα υποσύστημα. Όλα αυτά θα τα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

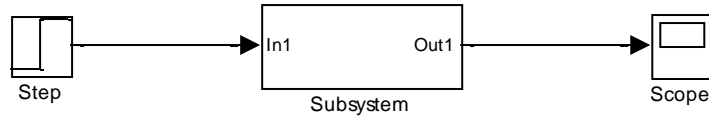
#### Παράδειγμα 8.7

Ενσωματώνουμε ένα τμήμα ενός υπάρχοντος μοντέλου SIMULINK σε ένα υποσύστημα. Εξετάζουμε το μοντέλο SIMULINK του παραδείγματος 8.3 που φαίνεται στην Εικόνα 8.7, και προχωράμε ως εξής:

1. Επιλέγουμε όλα τα μπλοκ και τις γραμμές που πρέπει να περιλαμβάνονται στο υποσύστημα με το κουτί οριοθέτησης όπως φαίνεται.
2. Επιλέγουμε την επεξεργασία (edit) και έπειτα δημιουργία υποσυστήματος (Create Subsystem) από τη γραμμή του μενού στο παράθυρο του μοντέλου. Το SIMULINK θα αντικαταστήσει τα επιλεγμένα μπλοκ με ένα μπλοκ (υποσύστημα) που θα έχει μία θύρα εισόδου για κάθε σήμα που εισέρχεται στο νέο υποσύστημα και μία θύρα εξόδου για κάθε σήμα που εξέρχεται από το νέο υποσύστημα. Το SIMULINK θα ορίσει προεπιλεγμένα ονόματα στις θύρες εισόδου και εξόδου.



Εικόνα 8.7: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3.



Εικόνα 8.8: Διάγραμμα προσομοίωσης για το σύστημα του παραδείγματος 8.3.

- Η αρχικοποίηση (Initialization) μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε και να περιγράψουμε τις παραμέτρους της μάσκας από το παράθυρο διαλόγου. Επίσης μπορούμε να αναφέρουμε τις μεταβλητές που σχετίζονται με τις παραμέτρους, και να ορίσετε εντολές αρχικοποίησης (**initialization commands**).
- Η σελίδα **Icon** μας δίνει τη δυνατότητα να καθορίσουμε το εικονίδιο του μπλοκ.
- Η σελίδα **Documentation** μας επιτρέπει να ορίσουμε τον τύπο της μάσκας, που προσδιορίζει τη περιγραφή του μπλοκ και μας παρέχει το block help.

Σε αυτό το παράδειγμα για το εικονίδιο η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος εισάγεται με την εντολή:

```
dpoly([10],[2 4 8 10])
```

Μία σύντομη περιγραφή του συστήματος και των σχετικών θεμάτων βοήθειας μπορούν να εισαχθούν στην σελίδα Documentation. Το μπλοκ υποσύστημα αποθηκεύεται σε ένα αρχείο με όνομα **exam8\_7\_sub\_mask**.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α' - ΜΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΑΤΛΑΒ

### Κεφάλαιο 1

- mybode

### Κεφάλαιο 2

- Electsys
- mechsyst
- Pendulum

### Κεφάλαιο 3

- Electsys
- Ltstm
- mechsyst
- Ode2phv
- Pendulum
- ss2phv
- Stm

### Κεφάλαιο 4

- Frqspec
- Timespec

### Κεφάλαιο 5

- Errorrf
- Errorzp
- Routh

### Κεφάλαιο 6

- Fbdesign
- Ghs
- Pcomp
- Pdcomp
- Phlag
- Phlead
- Picomp
- Pidcomp
- Pnetfdbk
- Rldesign
- rldesigngui
- Tachfdbk
- Timespec

### Κεφάλαιο 7

- Cnyquist
- Frcntlr
- Frdesign
- Frqlag
- Frqlead
- Frqp
- Frqpd
- Frqpi
- Frqpid
- Frqspec
- Timespec



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Α. Ν. Βελώνη, “Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου, Ανάλυση & Προσομοίωση”, Εκδόσεις Τζιόλα, Αθήνα, 2011.
- [2] Η. Saadat, Computational Aids in Control Systems Using MATLAB, 1998.





