Πτυχιακή εργασία

Τίτλος « Εφαρμογές οικονομικών συναρτήσεων»

ΑΝΩΤΑΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

Ονοματεπωνυμο: Κώτσου Καλλιόπη
Αμ: 7768
Τμημα: Διοίκηση επιχειρήσεων

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαλικιάς Μιλτιάδης

Πρόλογος

Η συνάρτηση είναι μια έννοια που εισήχθη στα μαθηματικά από τον θεμελιωτή του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού τον Leibniz. Η κοινή αποδεκτή έννοια της συνάρτησης είναι ότι αποτελεί μια αντιστοίχηση μεταξύ δύο συνόλων που καλούνται σύνολο ορισμού.

Γενικά μια συνάρτηση είναι ο τρόπος με τον οποίο αντιστοιχίζεται μια μοναδική τιμή της εξαρτημένης ποσότητας σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης ποσότητας. Μια συνάρτηση διακρίνεται σε δύο είδη:

- την αμφιμονοσήμαντη ❼ $f : A \rightarrow B$ λέγεται *ένα προς ένα* (1-1) ή *αμφιμονότιμη* ή *αμφιμονοσήμαντη* όταν αντιστοιχίζει κάθε όρισμα σε αποκλειστικά δική του τιμή, δηλαδή όταν διαφορετικά ορίσματα απεικονίζονται σε διαφορετικές τιμές: αν $a \neq a'$ τότε $f(a) \neq f(a')$
- την επί ❼ $f : A \rightarrow B$ λέγεται *επί* (με την έννοια: «το A απεικονίζεται μέσω της f επί του B, πάνω στο B») όταν δεν υπάρχει στοιχείο στο B που να μην είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου στο A: για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $b = f(a)$

Συνεπώς, η συνάρτηση είναι μια έννοια που βρίσκει έδαφος από τα παλαιά χρόνια. Με την εξέλιξη της επιστήμης των μαθηματικών, οι συναρτήσεις πλέον χρησιμοποιούνται και σε άλλους κλάδους όπως των οικονομικών. Έτσι αναπτύχθηκε και η έννοια των οικονομικών εφαρμογών. Επομένως στη παρούσα εργασία θα γίνει αναφορά των οικονομικών συναρτήσεων και ειδικότερα στις εφαρμογές των.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο Εισαγωγικά στοιχεία

1.1 Ορισμός Οικονομίας

Με την λέξη *οικονομία* (η λέξη προέρχεται από την ελληνική «οικονομία», διαχείριση της οικίας) μπορεί να ορισθεί επίσημα και γενικά ως το σύνολο των συνειδητών και συστηματικών ενεργειών των ανθρώπων, που διαβιούν σε μία κοινωνία και περιλαμβάνει την παραγωγή, διανομή, ανταλλαγή και την κατανάλωση αγαθών και υπηρεσιών.

Η διάφορες *οικονομικές θεωρίες* που υπάρχουν αποσκοπούν στην μελέτη της ανθρώπινης συμπεριφοράς προκειμένου να ικανοποιήσουν τις απεριόριστες τους ανάγκες με περιορισμένα μέσα. Διέπονται από 2 χαρακτηριστικά:

- την Γενικότητα. Οι θεωρίες επιδιώκουν να διατυπώσουν γενικές σχέσεις δηλαδή σχέσεις που να ισχύουν κατά κανόνα.
- και την Αφαίρεση. Επιδιώκει να ερμηνεύσει ορισμένες πλευρές της πραγματικότητας και να αγνοήσει άλλες.

Η *παραγωγική διαδικασία* παίζει καθοριστικό ρόλο στην ικανοποίηση των αναγκών των καταναλωτών. Είναι η διαδικασία κατά την οποία μετασχηματίζονται οι παραγωγικοί συντελεστές (εργασία, γη, κεφάλαιο και κάποιοι θεωρούν ότι είναι και η επιχειρηματικότητα που είναι η ικανότητα του ανθρώπου να μπορεί να συνδυάσει αποτελεσματικά τους παραπάνω συντελεστές). Τα βασικά χαρακτηριστικά της παραγωγικής διαδικασίας είναι:

- Η ευσυνείδητη προσπάθεια για την επίτευξη συγκεκριμένου σκοπού
- Απαιτεί χρόνο
- Καθαρή τεχνολογική σχέση ανάμεσα στις ποσότητες των παραγωγικών συντελεστών και των ποσοτήτων του παραγόμενου προϊόντος.

Το πρόβλημα της οικονομίας είναι ότι υπάρχουν απεριόριστες ανάγκες και περιορισμένοι παραγωγικοί συντελεστές. Το πρόβλημα αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε με 3 τρόπους:

1. Αύξηση των Π.Σ (κυρίως το κεφάλαιο)

   Ένας τρόπος να αυξήσουμε το κεφάλαιο είναι η μείωση καταναλωτικών αγαθών

2. Πλήρης απασχόληση των Π.Σ (κυρίως εργασία)

   Πλήρης απασχόληση του κεφαλαίου εννοούμε όταν τα κεφαλαιουχικά αγαθά που έχουμε στην διάθεσή μας χρησιμοποιούνται πλήρως.

3. Αποδοτική χρησιμοποίηση των Π.Σ

   Με δεδομένη την τεχνολογία η παραγωγή των αγαθών γίνεται με τις ελάχιστες απαιτούμενες ποσότητες των παραγωγικών μέσων.

1.2 Η έννοια της αγοράς

Η *αγορά* είναι ο χώρος συνάντησης ή ο χώρος που πραγματοποιείται η επικοινωνία μεταξύ των αγοραστών και των πωλητών μέσω της οποίας διαμορφώνεται μία τιμή για ένα συγκεκριμένο προϊόν.

Οι μορφές της αγοράς είναι οι εξής:

- Τέλειος ανταγωνισμός
- Μονοπώλιο
- Μονοπωλιακός ανταγωνισμός
- Ολιγοπώλιο

1.3 Ιστορική αναδρομή

Οι πρώτοι που θεωρείται ότι ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και συγκεκριμένα με την μελέτη διαφόρων σχέσεων από τη σύγκριση δύο αντικειμένων είναι οι Βαβυλώνιοι. Οι Βαβυλώνιοι το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούσαν για τους υπολογισμούς τους πίνακες των αντιστρόφων, τετραγώνων, τετραγωνικών ριζών, κύβων, κυβικών ριζών κ.α. Επίσης, οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι κρατούσαν σε πίνακες τους υπολογισμούς τους για τον ήλιο. Τη σελήνη και τους πλανήτες.

Η έννοια της συνάρτησης εντοπίζεται ήδη από τα αρχαία χρόνια. Ειδικότερα πρώτοι οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τους νόμους της ακουστικής ανέπτυξαν έναν πίνακα χορδών. Οι Πυθαγόρειοι προσπάθησαν να ερμηνεύσουν τους απλούς νόμους της μουσικής μελετώντας την αλληλεξάρτηση του μήκους και της έντασης κάθε νότας.

Εν συνεχεία την Αλεξανδρινή εποχή οι αστρονόμοι ανέπτυξαν τη τριγωνομετρία των χορδών χρησιμοποιώντας θεωρήματα γεωμετρίας και κανόνες παρεμβολής. Επιπλέον, δημιούργησαν πίνακες χορδών ισοδύναμους με τους σημερινούς πίνακες ημιτόνου. Αρκετά αργότερα οι αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν τη γεωμετρία και τις καμπύλες. Διέκριναν τρία είδη γεωμετρικών τόπων: επίπεδους (απλές γραμμές και κύκλοι), στερεούς (κωνικές τομές), και γραμμικούς (όλες οι άλλες καμπύλες).

Οι συναρτήσεις εισάγονταν σε σχέση με μαθηματικά και αστρονομικά προβλήματα. Ακόμα βρέθηκαν σε κάποιες περιπτώσεις και τα όρια εξαιτίας δύο απείρως μικρών ποσοτήτων. Υπολόγισαν εμβαδά, όγκους, μήκη τόξων, όγκους και κέντρα βάρους με ολοκληρωτικές μεθόδους. Για το συμβολισμό χρησιμοποιούσαν γράμματα της αλφαβήτου, χωρίς αλγεβρικό τύπο ή αλγόριθμό, χωρίς αναλυτική έκφραση.

Μεταβαίνοντας στην εποχή του μεσαίωνα, εντοπίζεται ότι ο αριθμός των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνταν αυξήθηκε και οι μέθοδοι μελέτης τους βελτιώθηκαν. Αρχικά μελετήθηκαν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και πίνακες αυτών, οι θετικές ρίζες του πολυωνύμου τρίτου βαθμού με χρήση των κωνικών τομών, ενώ σημειώθηκε μεγάλη πρόοδος στην οπτική και την αστρονομία. Η έννοια της συνάρτησης εμφανίστηκε έπειτα από τρεις αιώνες στην Οξφόρδη και στο Παρίσι.

Οι γενικές έννοια εκφράστηκαν με μηχανικές και γεωμετρικές μορφές, αλλά κάθε περίπτωση καθορίστηκες είτε γραφικά είτε προφορικά. Το $14^{ο}$ αιώνα οι συντεταγμένες σχετίζονται με σημεία καμπύλης παρά με αυθαίρετα σημεία του σχεδίου. Αυτή η θεωρία ανήκει στον Oresme, ο οποίος εισήγαγε ένα διαχωρισμό στα είδη γραμμικών ποιοτήτων:

- ⇨ Ομαλή ποιότητα στην οποία η γραμμή της έντασης ήταν παράλληλη στον οριζόντιο άξονα
- ⇨ Ομαλά μεταβαλλόμενη ποιότητα στην οποία για τρία τυχαία σημεία της ο λόγος της οριζόντιας απόστασης μεταξύ $1^{ου}$ και $2^{ου}$ προς αυτήν μεταξύ του $2^{ου}$ και $3^{ου}$ είναι ίσος με το λόγο της κατακόρυφης απόστασης μεταξύ του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ προς αυτήν μεταξύ του $2^{ου}$ και $3^{ου}$. Η γραμμή της έντασης αναπαρίσταται από την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου.
- ⇨ Μη ομαλά μεταβαλλόμενη ποιότητα που περιλαμβάνει όλες τις άλλες περιπτώσεις. Ο Oresme αναφέρει 63 διαφορετικά είδη.

Όσον αφορά τη νεότερη περίοδο, οι συναρτήσεις έγιναν ισοδύναμες με τις αναλυτικές εκφράσεις. Οριστικοποιήθηκε η έννοια της συνάρτησης και συγκεκριμένα : « μια συνάρτηση y της μεταβλητής x, y=f(x), είναι μια σχέση μεταξύ των ζευγαριών των στοιχείων των συνόλων X και Y έτσι ώστε για κάθε στοιχείο $x \in X$ να ορίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in Y$, σύμφωνα με κάποιο καθορισμένο κανόνα».

Κατά τη διάρκεια του $16^{ου}$ και $17^{ου}$ αιώνα γίνονταν περισσότεροι υπολογισμοί , σημειώθηκε πρόοδος στη τριγωνομετρία, ανακαλύφθηκαν οι λογάριθμοι και οι συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν και μεταξύ συνόλων αριθμών και όχι μόνο ποσοτήτων. Επιπλέον, αυξήθηκε η χρήση των συμβόλων για γνωστούς και αγνώστους στις αλγεβρικές εξισώσεις και παραστάσεις. Ο Vietre χρησιμοποιούσε τα κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Αυτό είχε ως συνέπεια λόγω ελλείψεων αυτός ο συμβολισμός να τροποποιηθεί. Άλλοις σημαντικοί είναι οι Descartes, Newton, Leibniz, Euler.

Παρουσιάζεται ανάπτυξη της μηχανικής και ιδιαίτερα ο κάδος της δυναμικής η οποία αναπτύχθηκε με γοργούς ρυθμούς. Οι νόμοι της φύσης εκφράζονται ως συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων. Το κύριο πρόβλημα της επιστήμης ήταν να μελετηθεί η σχέση μεταξύ καμπυλόγραμμης κίνησης και των δυνάμεων που επιδρούσαν σε αυτήν. Αυτό δημιούργησε μια σειρά προβλημάτων στον απειροστικό λογισμό.

Χρειαζόταν, λοιπόν, μια νέα μέθοδος εισαγωγής συναρτήσεων που μέχρι τώρα γινόταν προφορικά, με γράφημα, κινητικά ή πίνακα τιμών.

Το τέλος του 16ου αιώνα εισάγονταν μόνο με τις παλιές μεθόδους. Έτσι και λογαριθμική συνάρτηση. Ο Burgi υπολόγισε τους λογαριθμικούς πίνακες ξεκινώντας από τη σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική πρόοδο των δυνάμεων μιας ποσότητας $q,q^2,q^3,\ldots$.. και στην αριθμητική πρόοδο των εκθέτων τη; 1,23… Ο Neper υπολόγισε στη συνέχεια το νεπέριο λογάριθμό. Οι Fermat και Descartes ανακαλύπτουν τη γεωμετρία των συντεταγμένων εφαρμόζοντας την άλγεβρα στη γεωμετρία. Ο Fermat δήλωσε πως όταν εμφανιστούν δύο άγνωστες ποσότητες σε μια εξίσωση, τότε προκύπτει ο γεωμετρικός τόπος ο οποίος περιγράφει μια ευθεία ή καμπύλη γραμμή. Εν συνεχεία κατάγραψε τις εξισώσεις ευθείας γραμμής και κάποιων καμπύλων 2ου βαθμού. Ο Descartes θέλησε να περιορίσει τη λύση όλων των αλγεβρικών προβλημάτων και εξισώσεων σε τυποποιημένη διαδικασία για ανεύρεση των πραγματικών ριζών τους. Ήταν ο πρώτος που συσχέτισε μια απλή γεωμετρική καμπύλη με μια αλγεβρική εξίσωση μεταξύ των συντεταγμένων των σημείων της. Το 1637 στο έργο του La Geometrie παρουσίασε τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση με x, y, περιέγραψε για πρώτη φορά τη δυνατότητα αναλυτικής αναπαράστασης μιας σχέσης εξάρτησης ανάμεσα σε μεταβλητές ποσότητες έτσι ώστε οι τιμές της μιας να μπορούν να υπολογιστούν από τις αντίστοιχες τιμές της άλλης «αν λοιπόν, πάρουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών για το τμήμα y", τότε θα προκύψει ένα άπειρο πλήθος τιμών για το τμήμα x και επομένως μια απειρία διαφορετικών σημείων, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να σχεδιαστεί η ζητούμενη καμπύλη».

Στα μέσα του 17ου αιώνα η ανακάλυψη της διωνυμικής σειράς από τους Mengoli & Mercator αποτέλεσε ένα εξαιρετικό εργαλείο ώστε οι συναρτήσεις να παρίστανται αναλυτικά από άπειρες σειρές. Οι πρώτες περιγραφές της έννοιας της συνάρτησης συνδέθηκαν με μηχανικές και γεωμετρικές ιδέες. Ο Newton εξέφρασε τις βασικές έννοιες της μαθηματικής ανάλυσης κινηματικά και γεωμετρικά και ερμήνευσε τις εξαρτημένες μεταβλητές ως συνεχείς ποσότητες που έχουν κάποια ταχύτητα της μεταβολής. Θεωρούσε όλες τις γεωμετρικές μεταβλητές συναρτήσεις του χρόνου και έδωσε έμφαση στη συνάρτηση αντί στην εξίσωση.

Ο Leibniz χρησιμοποίησε κι εκείνος την έννοια της συνάρτησης και ανέπτυξε σχετικές ιδέες. Ο Leibniz εισήγαγε τις λέξεις σταθερές, μεταβλητή, συντεταγμένες και παράμετρος. Επιπροσθέτως, σκέφτηκε τις συναρτήσεις ως οποιαδήποτε μέρη ευθειών γραμμών ή σημεία καμπύλων. Τέλος, ταξινόμησε τις καμπύλες και τις συναρτήσεις σε δύο κατηγορίες, στις αλγεβρικές που μπορούν να παρασταθούν από εξίσωση συγκεκριμένου βαθμού και στις υπερβατικές ή μη αλγεβρικές.

1.4 Ποιοι ασχολήθηκαν με τη συνάρτηση

Αρκετοί είναι αυτοί που ασχολήθηκαν με τις συναρτήσεις. Αυτοί όμως που ξεχωρίζουν είναι ο Johann Bernouli, ο Leibniz, Euler, Lagrange.

Ξεκινώντας, λοιπόν, με τον Bernouli, ο οποίος ανακάλυψε πως το ολοκλήρωμα $\int ndz$ αναπτύσσεται σε μια άπειρη σειρά: $nz - \frac{1}{1\cdot 2} z^2 \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 \frac{d^2n}{dz^2} - \ldots$..

Ο Bernouli χρησιμοποίησε την έννοια της συνάρτησης προκειμένου να λύσει ένα ισοπεριμετρικό πρόβλημα που περιελάμβανε καμπύλες, ενώ ο Leibniz εξέφρασε την ικανοποίησή του από αυτόν τον τρόπο χρήσης της έννοιας. Ο Bernouli όρισε ότι συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους είναι μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές. Πρότεινε το ελληνικό γράμμα φ να χρησιμοποιείται ως συμβολισμός για μια συνάρτηση και χωρίς παρενθέσεις δηλαδή φ x. Ο Euler εισήγαγε το f για τη συνάρτηση και τη συμβόλισε με f(x). (Κουτρουμανίδης, 2012)

Ο επόμενος που χρησιμοποίησε τις συναρτήσεις είναι ο Lagrange. Σύμφωνα με τον Lagrangeη ταχύτητα ήταν παράγωγος της συνάρτησης που έδινε την απόσταση στη μονάδα του χρόνου. Ο Lagrange έδωσε τον εξής ορισμός για τη συνάρτηση « συνάρτηση μιας ή περισσότερων μεταβλητών ονομάζεται κάθε αναλυτική έκφραση στην οποία εμφανίζονται με οποιονδήποτε τρόπο αυτές οι ποσότητες είτε μόνες τους είτε μαζί με άλλες, των οποίων οι τιμές θεωρούνται σταθερές, ενώ οι ποσότητες της συνάρτησης, μπορούν να παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές. Έτσι στις συναρτήσεις λαμβάνονται υπόψη μόνο οι ποσότητες που θεωρούνται μεταβλητές και όχι οι σταθερές που συνυπάρχουν».

Στο προσκήνιο εμφανίζεται ο Euler ο οποίος έδωσε κάποιους αρχικούς, οι οποίοι είναι:

- Σταθερά: είναι μια καθορισμένη ποσότητα που έχει πάντα την ίδια τιμή καθώς αλλάζει η μεταβλητή μέσα από ένα σύνολο αριθμών
- Μεταβλητή ποσότητα: είναι μια ακαθόριστη ποσότητα που περιλαμβάνει μέσα της πολλές διαφορετικές τιμές οι οποίες μπορεί να είναι είτε θετικές είτε αρνητικές ή ακέραιες ή κλασματικές, σύμμετρες ή ασύμμετρες.
- Συνάρτηση μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συντίθεται με οποιονδήποτε τρόπο από αυτήν την μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές.

  Ο Euler ξεκίνησε από τις αλγεβρικές συναρτήσεις όπου οι πράξεις με την ανεξάρτητη μεταβλητή είναι μόνο αλγεβρικές και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τις ρητές που έχουν να κάνουν μόνο με τις τέσσερις πράξεις και τις άρρητες που περιλαμβάνουν και ρίζες. Επιπλέον , μελέτησε διάφορες υπερβατικές συναρτήσεις, τις τριγωνομετρικές, τη λογαριθμική, την εκθετική, μεταβλητές με άρρητους εκθέτες και κάποια ολοκληρώματα καθώς και άπειρο αριθμό άλλων συναρτήσεων με ακέραιους υπολογισμούς.

Ακόμα, όρισε την εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση ως $e^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{X}{n}\right)^{n}$ και

$$\log X = \lim_{n\to\infty} n\,\left(X^{1/n}-1\right)$$

Τέλος, διατύπωσε θεωρήματα για την ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης ή συνάρτησης εκφρασμένης παραμετρικά. Ο Euler υποστήριξε ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε άπειρη σειρά αλλά δήλωσε αν κάποιος αμφιβάλλει πως κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί έτσι, τότε η αμφιβολία του αυτή θα απορριφθεί από τις ήδη ανεπτυγμένες συναρτήσεις (Κουτρουμανίδης, 2012).

Κεφάλαιο 2ο Συναρτήσεις

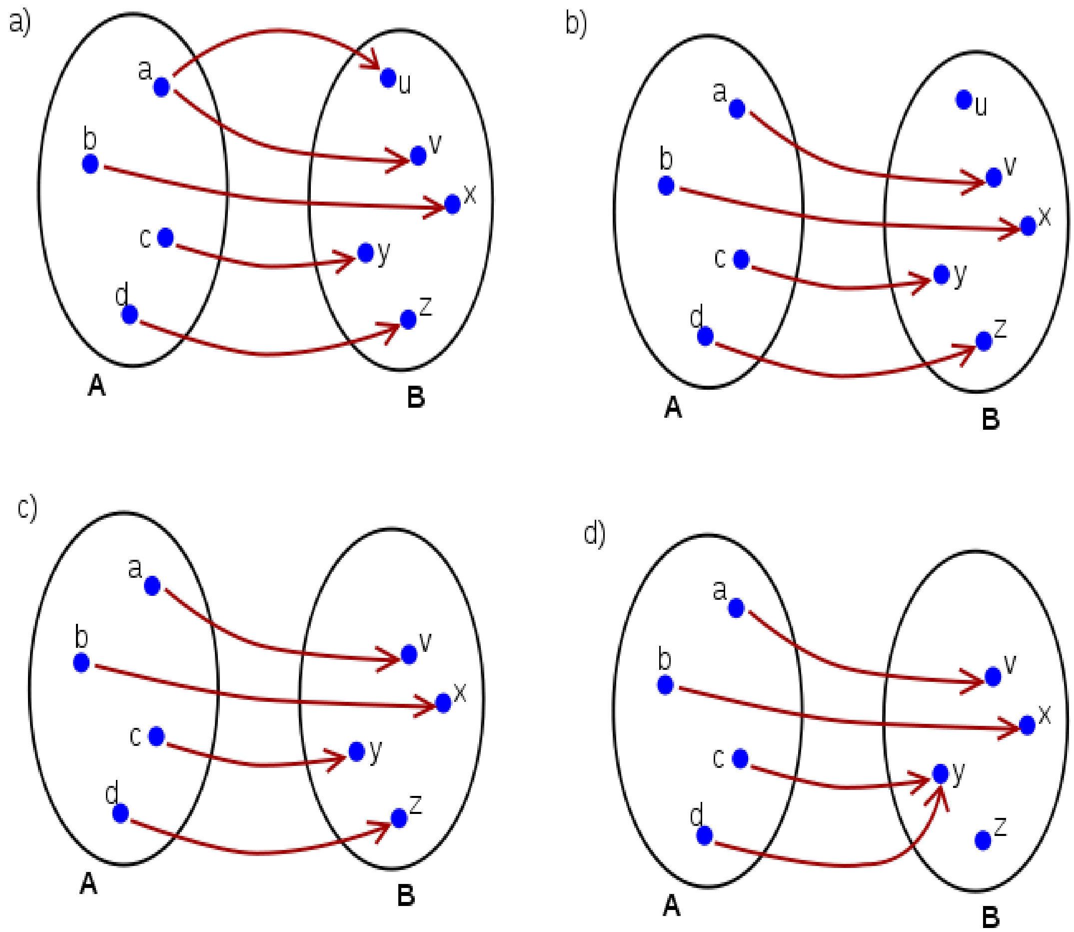
2.1 Συναρτήσεις

Ο γερμανός Μαθηματικός Peter Dirichlet έδωσε τον σύγχρονο ορισμό της συνάρτησης σύμφωνα με τον οποίο αν μια μεταβλητή χ σχετίζεται με ένα κανόνα ή νόμο με μια άλλη μεταβλητή y και συμβολίζεται συνήθως με y= F (x), όπου το χ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και y η εξαρτημένη. Η ανεξάρτητη μεταβλητή χ σημειώνεται κατά μήκος του χ-άξονα και η εξαρτημένη μεταβλητή y σημειώνεται κατά μήκος του y- άξονα. Τα είδη και οι τύποι των συναρτήσεων είναι πολλοί όπως οι τριγωνομετρικές, οι πολυωνυμικές, οι διανυσματικές όπως επίσης και οι μιγαδικές συναρτήσεις με τεράστιες εφαρμογές. Διάφορα προβλήματα οικονομικά, πληθυσμιακά, φυσικής, κοινωνικά και άλλων επιστημονικών κλάδων επιλύονται με την βοήθεια ειδικών συναρτήσεων.

Μία μεταβλητή y θα είναι συνάρτηση μίας άλλης μεταβλητής όταν για κάθε χ (εκ του πεδίου ορισμού του χ) αντιστοιχεί κατά ένα ορισμένο νόμο μία ή και περισσότερες τιμές για το y (μονοσήμαντη ή πολυσήμαντη συνάρτηση).

Ονομάζουμε συνάρτηση μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο ενός συνόλου Β. Γράφουμε $f : A \to B$.

Ιστορικά η έννοια της συνάρτησης εισήχθηκε στα μαθηματικά από το θεμελιωτή του διαφορετικού και ολοκληρωτικού λογισμού Γερμανό μαθηματικό Γκότφριντ Βίλχελμ Λαιμπνιτς το 1694.



Για να ορίσω πλήρως μία συνάρτηση πρέπει να ξέρω

i. τον τύπο της
ii. τον πεδίο ορισμού της

Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης ονομάζω το σύνολο που παίρνει τιμές η μεταβλητή χ.

Για να βρω το πεδίο ορισμού μιας συναρτήσεις κάνω τα εξής:

i. Εάν η συνάρτηση που μας δίνει έχει κλάσμα θα πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι $\neq 0$
ii. Εάν η συνάρτηση που μας δίνει έχει ρίζα θα πρέπει η υπόριζος ποσότητα να είναι ≥ 0
iii. Εάν η συνάρτηση που μας δίνει έχει ln A θα πρέπει αυτό που είναι μέσα στο ln A>0

iv. Εάν η συνάρτηση που μας δίνει δεν έχει τίποτα από τα παραπάνω τότε το πεδίο του ορισμού της είναι όλο το R.

Άσκηση

Να βρείτε τα πεδία ορισμού στις παρακάτω συναρτήσεις

- $F(X) = \frac{\eta\mu X - 1}{X+1}$ Θα πρέπει $X+1 \neq 0$

  $X \neq -1$

- $F(X) = \sqrt{4-2X} + X^2 + 2$ Θα πρέπει $4-2X \geq 0$

  $-2X \geq -4$

  $X \leq 2$

<u>Όριο συνάρτησης στο Χο</u>

$\lim_{X \to X_0} F(X)$ Όριο της F του Χ όταν το Χ τείνει στο Χο

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

- $\lim_{X \to 1} \frac{X^2+1}{X} = \frac{1^2+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$

- $\lim_{X \to 0} \frac{e^X-1}{e^X} = \frac{e^0-1}{e^0} = \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0$

Όταν ένα όριο βγεί $\frac{0}{0}$ τότε έχω απροσδιόριστη μορφή για να το υπολογίσω οπότε κάνω το εξείς:

- παραγοντοποιώ αριθμητή και παρονομαστή
- διαγράφω τα κοινά στοιχεία του αριθμητη και παρονομαστή

π.χ

- $\lim_{X\to 4} \frac{X-4}{X^2-16} = \frac{4-4}{16-16} = \frac{0}{0}$ οπότε

$$\lim_{X\to 4} \frac{X-4}{X^2-16} = \lim_{X\to 4} \frac{X-4}{(X-4)(X+4)} = \lim_{X\to 4} \frac{1}{X+4} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

- $\lim_{X\to 3} \frac{X^2-X-6}{X^2-3X} = \frac{9-3-6}{9-9} = \frac{0}{0}$ οπότε

$$\lim_{X\to 3} \frac{X^2-X-6}{X^2-3X} *= \lim_{X\to 3} \frac{(X+2)(X-3)}{X(X-3)} = \lim_{X\to 3} \frac{X+2}{X} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

$* \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$\frac{6}{2} = 3$ και $\frac{-4}{2} = -2$

<u>Πλευρικά Όρια</u>

Δεν έχει οριστεί κάποιος ακριβής τρόπος με τον οποίο το Χ πλησιάζει το Χο. Σε αρκετές περιπτώσεις όμως το να υπολογίσουμε το όριο είναι απαραίτητο. Θεωρώντας το Χ και το Χο ως σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών, όπου το Χο είναι σταθερό, ενώ το Χ κινούμενο, οι συνηθέστεροι τρόποι να προσεγγίσει το Χ το Χο είναι από αριστερά και από δεξιά. Με αυτούς τους 2 τρόπους μπορεί να υπολογιστεί και το όριο μιας συνάρτησης F (x) στο Χο.

Έτσι, το όριο της F στο Χο, όταν το Χ πλησιάζει από τα δεξιά (δηλαδή Χ>Χο) συμβολίζεται:

$$\lim_{X \to X0^+} F(X)$$

Όταν πλησιάζει από τα αριστερά (δηλαδή X<Xo) συμβολίζεται

$$\lim_{X \to X0^-} F(X)$$

Τα όρια αυτά (όταν υπάρχουν) ονομάζονται πλευρικά όρια. Για να έχουν νόημα τα πλευρικά όρια στο σημείο Xo πρέπει το σημείο αυτό να είναι σημείο συσσώρευσης από αριστερά (για αριστερό πλευρικό όριο) ή από δεξιά (για δεξιό πλευρικό όριο).

Αν ένα σημείο το Xo είναι σημείο συσσώρευσης από δεξιά και από αριστερά (δηλαδή έχουν νόημα και τα δύο πλευρικά όρια τότε: το όριο της F στο Xo υπάρχει και είναι ίσο με L αν και μόνο αν τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα με L:

$$\left(\lim_{X \to X_0} F(X) = L \right) \leftrightarrow \left(\lim_{X \to X0^-} F(X) = \lim_{X \to X0^+} F(X) \right)$$

Άσκηση

F(x)= $\frac{X^2-1}{X+1}$ $X > 1$

$2X + 1$ $X \leq 1$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

1) $\lim_{X \to 2} F(X)$ 2) $\lim_{X \to -1} F(X)$ 3) $\lim_{X \to 1} F(X)$

1) Αφού το 2 είναι μεγαλύτερο του 1 θα πάμε στο πρώτο τύπο και θα αντικαταστήσουμε

- $\lim_{X \to 2} F(X) = \lim_{X \to 2} \frac{X^2-1}{X+1} = \frac{X^2-1}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

2) Αφού το -1 είναι μικρότερο του 1 θα πάμε στο δεύτερο τύπο και θα αντικαταστήσουμε

- $\lim_{X \to -1} F(X) = \lim_{X \to -1} (2X + 1) = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

3) $\lim_{X \to 1} F(X)$

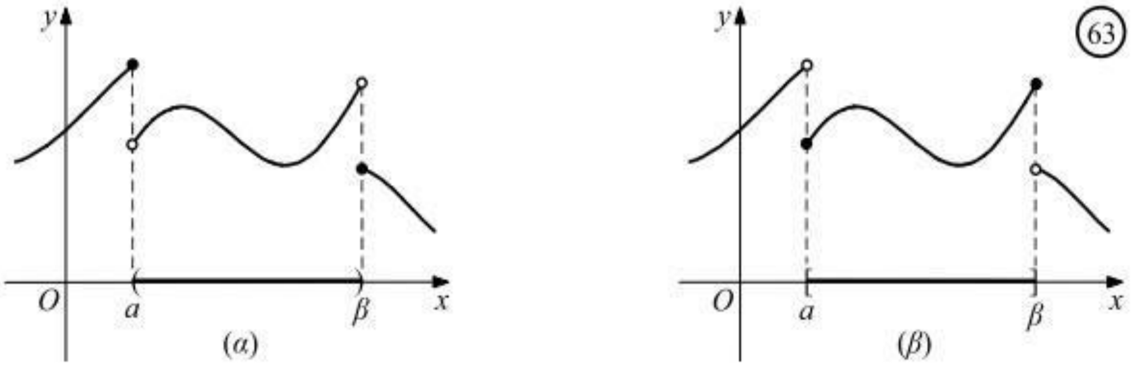
$$\lim_{X \to 1^-} F(X) = \lim_{X \to 1^-} (2X + 1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$\lim_{X \to 1^+} F(X) = \lim_{X \to 1^+} \frac{X^2 - 1}{X + 1} = \lim_{X \to 1^+} \frac{(X + 1)(X - 1)}{X + 1}$$
$$= \lim_{X \to 1^+} (X - 1) = 1 - 1 = 0$$

$\lim_{X \to 1^+} F(X) \neq \lim_{X \to 1^-} F(X)$ Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{X \to 1} F(X)$

2.2 Η έννοια της Συνεχούς Συνάρτησης

Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης δεν είναι τόσο οικεία, όσο η έννοια μιας συνεχούς γραμμής ή καμπύλης. Είναι λογικό να συνδέσουμε τις δύο αυτές έννοιες συνέχειας, αφού οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις συνάρτησης αποτελούνται από ευθείες και καμπύλες. Ωστόσο η έννοια της συνεχούς συνάρτησης είναι πιο πολύπλοκη από αυτή μιας συνεχούς γραμμής. Αν καθώς χαράσσουμε μια γραμμή, σηκώσουμε το μολύβι μας και συνεχίσουμε απόο κάποιο άλλο σημείο, τότε αυτόματα έχουμε μια συνεχή γραμμή.



Το αν είναι ασυνεχής μια αντίστοιχη συνάρτηση εξαρτάται και από την προσεκτική μελέτη του πεδίου ορισμού της. Όπως καταλαβαίνουμε η συνέχεια είναι τοπική ιδιότητα, δηλαδή μελετάται γύρω από κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης επομένως θα πρέπει το σημείο αυτό να ανήκει στο πεδίο ορισμού της F.
Η συνέχεια της F σε ένα σημείο Xo εξασφαλίζεται με τρείς προϋποθέσεις:

i. Το Xo ανήκει στο πεδίο ορισμού της F, δηλαδή υπάρχει το R το F (Xo).

ii. Υπάρχει στο R το $\lim_{X \to X_0} F(X)$ δηλαδή τα δύο πλευρικά όρια της f, όταν το X→Xo υπάρχουν στο R και είναι ίσα.

iii. Ισχύει ότι $\lim_{X \to X_0} F(X) = F\,(Xo)$

Ορισμός (Συνέχεια) συνάρτησης σε σημείο:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, και Xo ανήκει στο A. Θα λέμε ότι η συνάρτηση F:A→R είναι συνεχής στο Xo, αν και μόνο ισχύει ότι:

$$\lim_{X \to X0} F(X) = F\,(X_0)$$

2.3 Παράγωγος

Η παράγωγος (derivative) στην μαθηματική ανάλυση είναι ένα μέτρο του πόσο αλλάζει μια συνάρτηση όταν αλλάζουν οι τιμές της εισόδου της. Η παράγωγος μιας συνάρτησης σε μια επιλεγμένη τιμή εισόδου περιγράφει την καλύτερη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης κοντά σ'αυτή την τιμή εισόδου. Για μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, η παράγωγος σε ένα σημείο ισούται με την κλίση της εφαπτόμενης γραμμής στο γράφημα της συνάρτησης σ'αυτό το σημείο. Σε μεγαλύτερο αριθμό διαστάσεων, η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που λέγεται γραμμικοποίηση (Μαύρη, 2013).

<u>Παράγωγος Συνάρτησης</u>

Η συνάρτηση f : A→ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αν υπάρχει το όριο

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε η συνάρτηση αυτή θα ονομάζεται παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Η διαφορισιμότητα είναι σημειακό χαρακτηριστικό αλλά μπορούμε να δούμε και την παράγωγο ως συνάρτηση.

Η παράγωγος της συνάρτησης y= f (x) ως προς την μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f' με τιμή στο x,

Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το παραπάνω όριο υπάρχει. Οπότε είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Αν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης τότε λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη.

Συμβολισμοί: Σε μία συνάρτηση y= f (x) το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και το y είναι εξαρτημένη (από το x) μεταβλητή.

Όριο παραγωγού

Έστω συνάρτηση F: (a,b) → ℝ και $X_0 \in (a,b)$. Αν υπάρχει το

όριο $\lim_{X \to X0} \frac{F(X)-F(X_0)}{X-X_0}$,

τότε λέμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο σημείο Xo και το όριο λέγεται παράγωγος της F στο σημείο X_0. Γράφουμε:

$$F'(Xo) = \lim_{X \to X0} \frac{F(X)-F(Xo)}{X-Xo} = D\,F(Xo) = \frac{DF}{DX} \Big| X{=}Xo$$

Αν το όριο το πάρουμε για X→ X_0^+ ή για X→ X_0^- τότε λέμε ότι η F έχει παράγωγο από δεξιά ή αριστερά και γράφουμε F΄(X_0^+) ή F΄(X_0^-) αντίστοιχα.

Σημείωση. Στη περίπτωση που το όριο είναι +∞ ή -∞ λέμε ότι η F έχει παράγωγο +∞ ή -∞ αντίστοιχα. Δεν λέμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη.

Έστω συνάρτηση F: (a,b) → ℝ και Xo ∈ (a,b). Αν η F είναι παραγωγίσιμη στο X_0 τότε είναι συνεχής στο X_0 . Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Αν οι συναρτήσεις F, g: (a,b) → ℝ είναι παραγωγίσιμες στο $X_0 \in (a, b)$, τότε:

(i) Η F ± g παραγωγίζεται στο X_0 και ισχύει

(F ± g)΄ (X_0) =F΄ (X_0) ± g΄(X_0).

(ii) Η Fg παραγωγίζεται στο X_0 και ισχύει

(Fg)΄ (X_0) = F (X_0) g΄ (X_0) + F¨ (X_0) g (X_0).

(iii) Αν επιπλέον g (Xo) ≠0 τότε και η $\frac{F}{g}$ παραγωγίζεται στο X_0 και ισχύει

$(\frac{F}{g})'(X_0) = \frac{F'(X_0)g\,(X_0) - F\,(X_0)g'(X_0)}{g^2\,(X_0)}$

(Κανόνας της αλυσίδας) Αν η g: (a,b) → (c,d) είναι παραγωγίσιμη Στο Xo ∈ (a, b) και η F: (c,d) → ℝ είναι παραγωγίσιμη στο g (X_0), τότε και η σύνθεση των συναρτήσεων F και g, h(x) = F(g(x)) είναι παραγωγίσιμη στο X_0 και ισχύει h΄ (X_0) $= F'(g(X_0))$ g΄(X_0)

Έστω συνάρτηση F: (a,b) → ℝ συνεχής, αμφιμονότιμη και παραγωγίσιμη στο σημείο X_0 με παράγωγο $F'(X_0) \neq 0$. Τότε και η αντίστροφη συνάρτηση F^{-1} έχει παράγωγο στο $F^{-1(X_0)}$ και ισχύει

$(F^{-1})'\,(yo) = \frac{1}{F'(X_0)}, \;\; yo = F\,(X_0).$

<u>Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων</u>

1. Αν F (x)= C τότε F'(x)=0

   πχ F(x)=2 F'(x)=0

   $F(x) = \sqrt{3}$ F'(x)=0
2. Αν F (x)= ημχ τότε F '(x)= 1
3. Αν F (x)= ημχ τότε F '(x) = συνχ
4. Αν F (x)= συνχ τότε F '(x)= -ημχ

5. Αν $F(x) = e^x$ τότε $F'(x) = e^x$
6. Αν F(x)= lnx τότε $F'(x) = \frac{1}{x}$

7. Αν $F\,(x) = x^{\nu}$ τότε $F'(x) = \nu x^{\nu-1}$

- [F(x)+g(x)]'= F'(x)+g'(x)
- [cF(x)]'= cF'(x)

$F'(x) = (3x^2)' = 3(x^2)' = 3(2x) = 6x$

$F'(x) = \left(\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{1}{2}\,(\ln x)' = \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

Ασκήσεις

- $F(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^3}{3} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{x} - ln2$

$$F(\mathrm{x}) = (\frac{\mathrm{x}^3}{3} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{x} - \ln 2)' = \frac{1}{3}\ (\mathrm{x}^3)' + \frac{1}{2}\ (\mathrm{x}^2) + (\mathrm{x})'$$
$$- (\ln 2)' = \ \frac{1}{3} 3\ \mathrm{x}^2 + \frac{1}{2} 2\,\mathrm{x} + 1 = \mathrm{x}^2 + \chi + 1$$

- $F(X) = 3e^x - lnx + 2010$

$$F'(X) = (3e^x - lnx + 2010)' = 3(e^x)' - (lnx)' + (2010)'$$
$$= 3e^x - \frac{1}{x} + 0 = 3e^x - \frac{1}{x}$$

- $F(x) = 2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \frac{x^3}{3}$

$$F'(x) = \left(2\eta\mu x - \ \sigma\upsilon\nu x + \frac{x^3}{3}\right)' = (2\eta\mu x)' - (\sigma\upsilon\nu x)' + \left(\frac{x^3}{3}\right)'$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + \frac{1}{3}(x^3)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + \frac{1}{3} 3x^2$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x^2$$

Παράγωγος Σύνθετων Συναρτήσεων

1. $F(x) = e^{x^2-2x+1}$

$F(x) = e^{x^2-2x+1}\,(x^2-2x+1)' = e^{x^2-2x+1}(2x-2)$

2. F(x)=ln (2x-3)

$F'(x) = \frac{1}{2x-3}(2x-3)' = \frac{1}{2x-3}2$

3. F(x) = ημ5 χ

F΄(x) = συν 5 x (5x)΄ = (συν5 x) 5

4. $F\,(x) = (\,3x+1)^2$

F΄(x) = 2 (3x+1) (3x+1)΄ = 2 (3x+1) 3

5. $F\,(x) = \sqrt{\ln x}$

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\,\frac{1}{x}$

6. $F\,(x) = e^{\eta\mu x+1}$

$F'(x) = e^{\eta\mu x+1}\,(\eta\mu x+1)' = e^{\eta\mu x+1}\,\sigma\upsilon\nu\;x$

7. $F\,(x) = ln^2 x$

$F'(x) = 2\ln x\;(\ln x\,)' = 2\ln x\;\frac{1}{x}$

8. F (x) = ln ημx

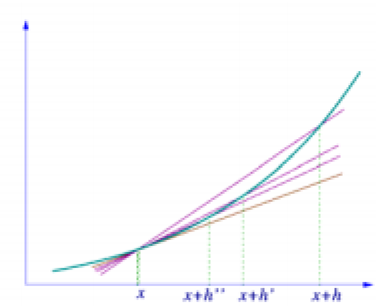
$F'\,(x) = \frac{1}{\eta\mu\;x}(\eta\mu\;x)' = \frac{1}{\eta\mu\;x}\;\sigma\upsilon\nu\;x$

9. $F\,(x) = xe^{2x}$

$F'(x) = (xe^{2x})' = (x)'\,e^{2x} + x\,(e^{2x})' = e^{2x} + xe^{2x}\,(2\chi)' = e^{2x} + 2\,xe^{2x}$

Γεωμετρική και φυσική ερμηνεία της παραγώγου

Έστω : () f A fA → , , ( ) Af A ⊆ \ και η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x. Έστω x+h∈A και P(x,f(x)), Q(x+h,f(x+h)) είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f



Το ευθύγραμμο τμήμα PQ έχει κλίση ίση με:

$$\varepsilon\varphi\left(\theta(h)\right) = \frac{f\,(x+h) - f(x)}{h}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα PQ με τον άξονα x′x. Η εξίσωση της ευθείας γραμμής που ορίζουν τα σημεία P,Q είναι η ακόλουθη:

y – f (x_0) = εφ (θ (h)) (x- x_0)

Η οριακή θέση του ευθυγράμμου τμήματος PQ όταν Q P → κατά μήκος της καμπύλης που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f (x) καλείται εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f (x) στο σημείο x. Όταν όμως Q P → κατά μήκος αυτής της καμπύλης τότε h → 0 , συνεπώς αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της f (x) στο σημείο x με τον άξονα x′x, έχουμε:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\,(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \text{εφ}\left(\theta(h)\right) = \varepsilon\varphi\, \left(\lim_{h \to 0} \theta(h)\right) = \varepsilon\varphi\omega,$$

$$f'\,(x_0) = \varepsilon\varphi\omega.$$

Κατ' επέκταση, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της f (x) στο σημείο x0 γίνεται: y – f $(x_0) = \mathrm{f}'(x_0)\ (x - x_0)$.

2.4 Συνάρτηση Douglas

Η συνάρτηση Douglas ή συνάρτηση παραγωγής είναι μια στατιστική εξίσωση που εκφράζει τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων των παραγωγικών συντελεστών, (εργασία, κεφάλαιο), που χρησιμοποιούνται και της ποσότητας παραγωγής που επιτυγχάνεται εξ αυτών. Η εξίσωση δηλώνει τη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί από κάθε συνδυασμό των παραγωγικών συντελεστών με την προϋπόθεση όμως ότι χρησιμοποιούνται οι αποτελεσματικότερες μέθοδοι παραγωγής (Μαύρη, 2013).

Με τη συνάρτηση παραγωγής είναι δυνατοί οι ακόλουθοι τρεις βασικοί στόχοι:

α) Η μέτρηση της παραγωγικότητας επί ενός συντελεστή ή και η μεταβολή της που μπορεί να προκύψει σε μία αυξομείωση μιας μονάδας του ίδιου συντελεστή. Επακόλουθο αυτού είναι τελικά η ορθή κατανομή του εισοδήματος στους συντελεστές παραγωγής, που αυτός είναι και ο πρωταρχικός στόχος της συνάρτησης.

β) Επίσης κάτω υπό ειδικές συνθήκες είναι δυνατός και ο προσδιορισμός του λεγόμενου "οριακού προϊόντος" στη συμβολή του κάθε συντελεστή με επακόλουθο επίσης την ιδανική κατανομή του εισοδήματος.

γ) Ακόμα με την αυτή συνάρτηση γίνεται ευκολότερος ο προσδιορισμός του λιγότερου δαπανηρού συνδυασμού των συντελεστών στη παραγωγή μιας δεδομένης ποσότητας προϊόντος.

Ο όρος αυτός εντοπίζεται στη μικροοικονομία και στη μακροοικονομία. Σχεδόν όλες οι οικονομικές θεωρίες θεωρούν τη συνάρτηση παραγωγής ως προϋπόθεση, είτε σε επίπεδο παραγωγικότητας χώρας είτε σε επίπεδο επιχειρήσεων. Έτσι υπό την άποψη αυτή η συνάρτηση παραγωγής καθίσταται μία από τις βασικές έννοιες της Οικονομικής Επιστήμης αν και υπάρχουν πολλές ενστάσεις για την ανταπόκριση του όρου σε συνολική παραγωγή ως συνολική συνάρτηση.

Τι προσδιορίζει η συνάρτηση παραγωγής

Η συνάρτηση παραγωγής προσδιορίζει τις δυνατότητες παραγωγής ενός αγαθού ή υπηρεσίας (εκροής) ως συνάρτησης των παραγωγικών συντελεστών (εισροών) δεδομένης της τεχνολογίας

Η χρονική παράμετρος αποτελεί βασική παράμετρο που προσδιορίζει την ικανότητας μιας επιχείρησης να αντιδράσει σε αλλαγές στη ζήτηση εξετάζουμε τη συνάρτηση παραγωγής σε δύο διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες.

- Το βραχυχρόνιο διάστημα είναι το διάστημα κατά το οποίο οι ποσότητες κάποιων εισροών (συνήθως κεφάλαιο) είναι σταθερές ενώ κάποιων άλλων εισροών (συνήθως εργασία) είναι μεταβλητές.
- Μακροχρόνιο διάστημα (long run) είναι το διάστημα κατά το οποίο οι ποσότητες όλων των εισροών είναι μεταβλητές.

Γενική μορφή βραχυχρόνιας συνάρτησης παραγωγής:

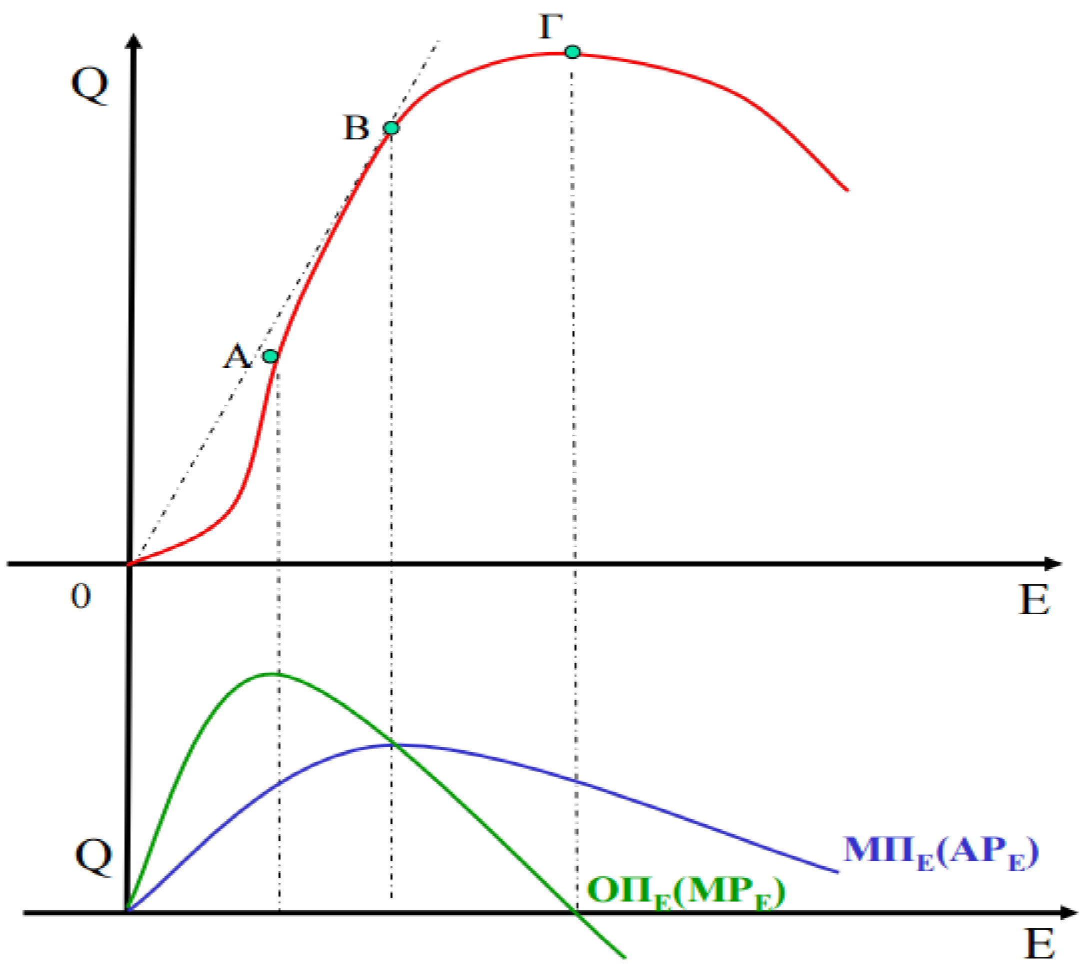
Q = *f* (M1, M2, M3, …………….. Σ1, Σ2) μεταβλητές σταθερές εισροές εισροές Γενικές μορφές παραγωγικής διαδικασίας: 1. συνεχής παραγωγικής διαδικασία (process production) 2. παραγωγή κατά παραγγελία (custom-order production) 3. δύσκαμπτης μαζικής παραγωγής (rigid mass production) 4. ευέλικτης μαζικής παραγωγής (flexible mass production)

<u>Συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas Υποθέσεις:</u>

ένα προϊόν (εκροή) δύο εισροές, εργασία και κεφάλαιο πολλαπλασιαστική συνάρτηση Q = A Kα Eβ όπου: K : κεφάλαιο E (ή L): εργασία α, β: παράμετροι (λόγος ποσοστιαίας μεταβολής Q όταν μεταβάλλεται είτε το K είτε το E μονομερώς) A: εξωγενής παράμετρος (τεχνολογία)

<u>Βραχυχρόνια συνάρτηση παραγωγής</u>

Νόμος της φθίνουσας απόδοσης: Ενώ αρχικά (μεταξύ των σημείων 0 και A) το παραγόμενο προϊόν αυξάνει με αύξων ρυθμό καθώς αυξάνεται η μεταβλητή εισροή, η μεταβολή του συνολικού προϊόντος τείνει να φθίνει μετά από κάποιο επίπεδο αύξησης της μεταβλητής εισροής (μετά το σημείο A). Q Q E E ΜΠΕ(APE) ΟΠΕ(MPE) B Γ A 0 Σημείο A: σημείο καμπής της καμπύλης παραγωγής Σημείο B: σημείο στο οποίο μέσο και οριακό προϊόν εργασίας είναι ίσα Σημείο Γ: οριακό προϊόν εργασίας ίσο με μηδέν



$$M\Pi_E(AP_L) = \frac{Q}{E} = \frac{AK^{\alpha}E^{\beta}}{E} = AK^{\alpha}E^{\beta-1}$$

$$O\Pi_E\ (MP_L) = \frac{\partial Q}{\partial E} = A\beta K^{\alpha}E^{\beta-1}$$

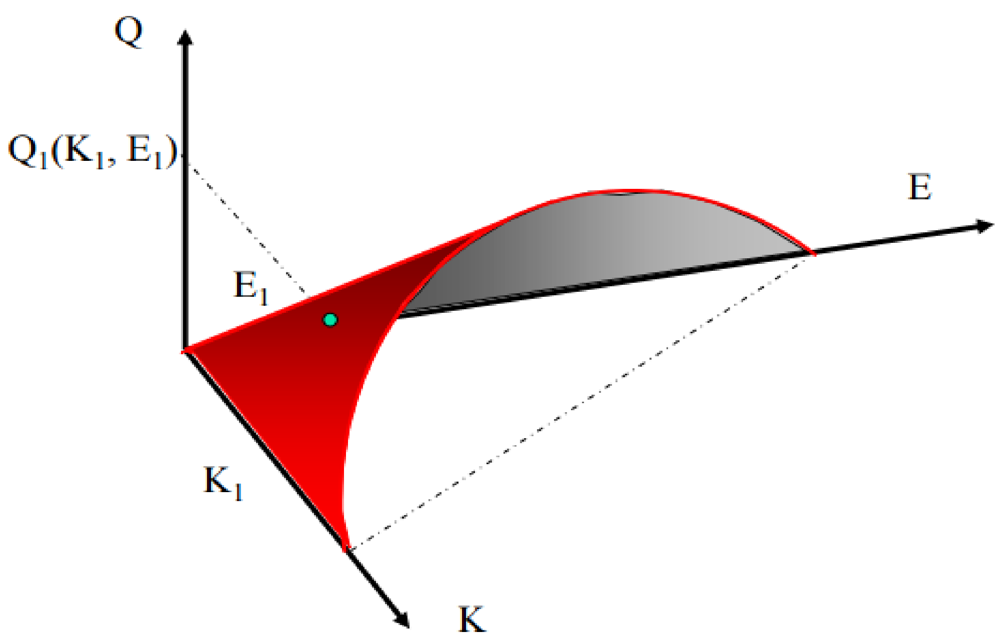
Για $O\Pi_E > M\Pi_E \Rightarrow A\beta K^{\alpha}E^{\beta-1} > AK^{\alpha}E^{\beta-1} \Rightarrow \beta > 1$

Για $O\Pi_E = M\Pi_E \Rightarrow \beta=1$

Για $O\Pi_E < M\Pi_E \Rightarrow \beta<1$

<u>Μακροχρόνια συνάρτηση παραγωγής</u>

Η επιφάνεια παραγωγής δίνει όλα τα δυνατά επίπεδα παραγωγής από τους συνδυασμούς των δύο μεταβλητών εισροών. Το επίπεδο παραγωγής Q1 προκύπτει από τον συνδυασμό E1 και K1 μονάδων εργασίας και κεφαλαίου αντίστοιχα.



Αποδόσεις κλίμακας παραγωγής

1. Σταθερές αποδόσεις κλίμακας (constant returns to scale) έχουμε, όταν μια αύξηση κατά ένα ποσοστό των εισροών αποφέρει αύξηση της εκροής κατά το ίδιο ποσοστό
2. Αύξουσες αποδόσεις κλίμακας (increasing returns to scale) όταν η εκροή αυξάνεται κατά ένα μεγαλύτερο ποσοστό από την ποσοστιαία αύξηση των εισροών
3. Φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας (decreasing returns to scale) όταν η εκροή αυξάνεται κατά ένα μικρότερο ποσοστό από την ποσοστιαία αύξηση των εισροών

<u>Αποδόσεις κλίμακας παραγωγής (Cobb-Douglas)</u>

$$Q = AK^{\alpha}E^{\beta}$$

$$\begin{aligned} A(\mu K)^{\alpha}\,(\mu E)^{\beta} &= A\mu^{\alpha+\beta}K^{\alpha}E^{\beta} \\ &= \mu^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}E^{\beta} \\ &= \mu^{\alpha+\beta}Q \end{aligned}$$

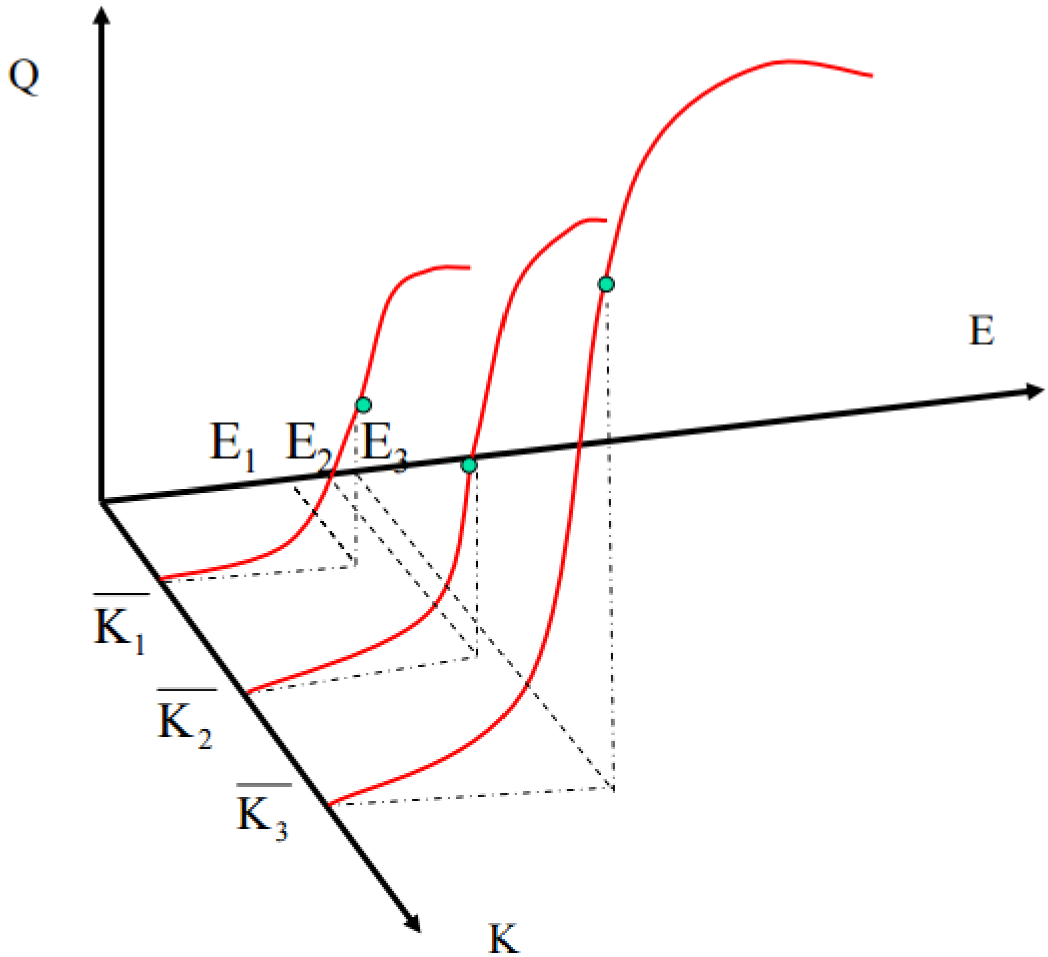
Επομένως

Εάν α+ β > 1 έχουμε αύξουσες αποδόσεις

Εάν α+ β = 1 έχουμε σταθερές αποδόσεις

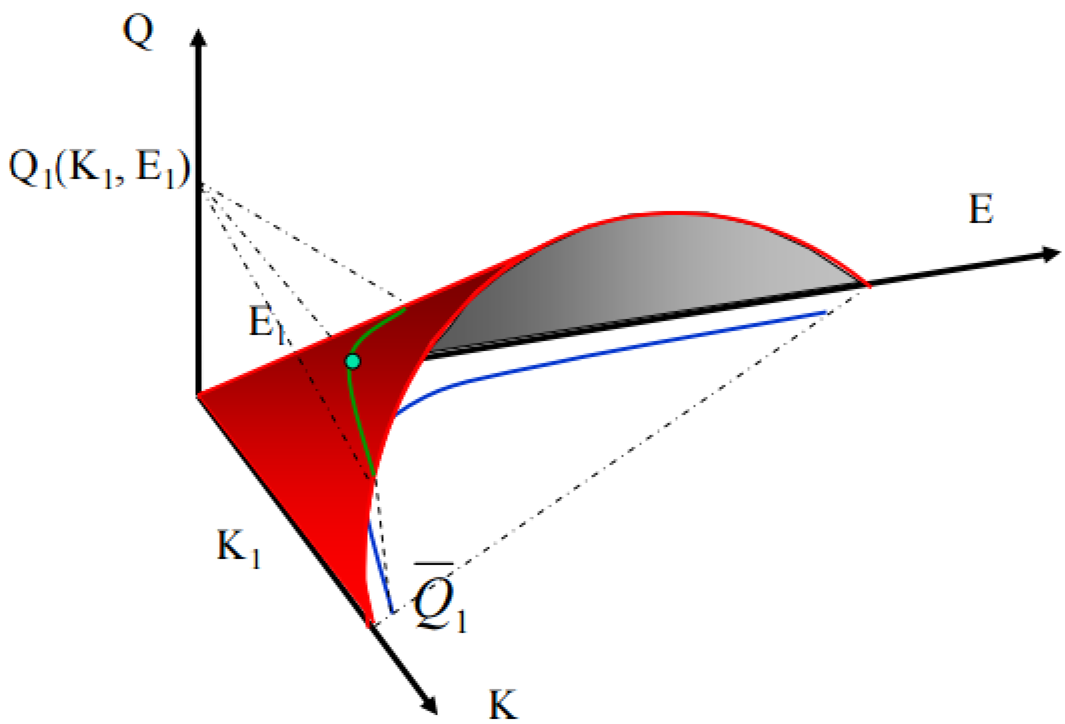
Εάν α+ β < 1 έχουμε φθίνουσες αποδόσεις

Οι βραχυχρόνιες καμπύλες παραγωγής δείχνουν την φθίνουσα απόδοση της εργασίας. Καθώς όμως αυξάνεται το κεφάλαιο κάθε εργαζόμενος γίνεται πιο αποδοτικός. (Το σημείο καμπής των καμπυλών προκύπτει σε μεγαλύτερο επίπεδο εργασίας καθώς αυξάνεται το κεφάλαιο)



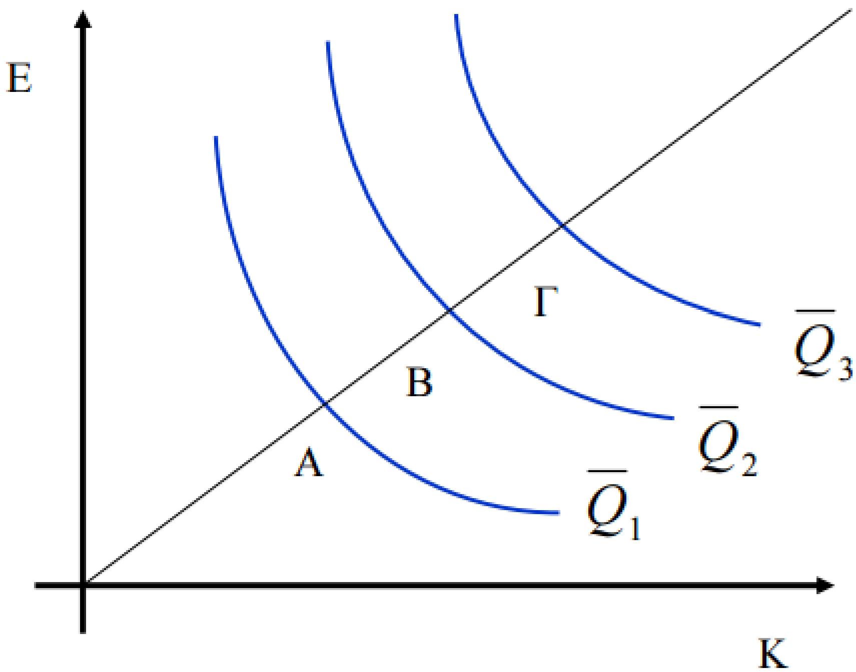
Καμπύλες ίσου προϊόντος

Η ποσότητα προϊόντος Q1 μπορεί να παραχθεί και με άλλους συνδυασμούς εισροών πέρα από τον (K1, E1) που είδαμε προηγουμένως.



Το σύνολο των συνδυασμών εισροών που παράγουν προϊόν ίσο με Q1 μας δίνουν την καμπύλη ίσου προϊόντος Q1

Οι καμπύλες ίσου προϊόντος (καμπύλες ισοπαραγωγής) δείχνουν τους συνδυασμούς των δύο εισροών οι οποίοι παράγουν μια δεδομένη ποσότητα της εκροής.



Κλίση της καμπύλης ίσου προϊόντος (Cobb-Douglas $Q = AK^{\alpha}E^{\beta}$) Η συνολική αλλαγή του Q όταν αλλάζουν τα K και E είναι:

$$d\bar{Q} = \frac{\partial\left(AK^{\alpha}E^{\beta}\right)}{\partial K}\, dK + = \frac{\partial\left(AK^{\alpha}E^{\beta}\right)}{\partial E}\, dE$$

Για να μείνουμε στην ίδια ισοπαραγωγής: $d\bar{Q} = 0$

Επομένως,

$0 = (O\Pi_K)\ Dk + (O\Pi_E)\ dE \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dK} = -\frac{O\Pi_K}{O\Pi_E} = -\frac{A\alpha K^{\alpha-1}E^{\beta}}{A\beta K^{\alpha}E^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{\frac{K^{\alpha}E^{\beta}}{K}}{\frac{K^{\alpha}E^{\beta}}{E}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{E}{K}$$

2.5 Συμβολισμοί της συνάρτησης

Μια συνάρτηση *f* με σύνολο ορισμού το *X* και σύνολο τιμών το *Y* συνήθως συμβολίζεται με f: X → Y ή $X \xrightarrow{f} Y$.

Στο πλαίσιο αυτό, τα στοιχεία του *X* ονομάζονται όρισμα μιας συνάρτησης της *f*. Για κάθε όρισμα *X*, το αντίστοιχο μοναδικό *y* του συνόλου τιμών ονομάζεται η συνάρτηση τιμή στο *X* ή η *εικόνα* του *x* με την *f*. Γράφεται ως *f* (*x*). Λέει ότι η *f* αντιστοιχεί το *y* με το *x* ή στέλνει το *x* στο *y*. Αυτό είναι συντομογραφία από το y= (f) x.

Μια γενική συνάρτηση συχνά συμβολίζεται με το *f*. Ειδικές συναρτήσεις έχουν ονομασίες, για παράδειγμα, η συνάρτηση signum συμβολίζεται με sgn. Λαμβάνοντας υπόψη ένα πραγματικό αριθμό *x*, η εικόνα του στο πλαίσιο της συνάρτησης signum γράφεται ως sgn (*x*). Εδώ, το όρισμα συμβολίζεται με το σύμβολο *x*, αλλά διαφορετικά σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε άλλα πλαίσια. Για παράδειγμα, στη φυσική, η ταχύτητα κάποιου σώματος, αναλόγως του χρόνου, συμβολίζεται με *v* (*t*).

Οι παρενθέσεις γύρω από το όρισμα μπορούν να παραλειφθούν όταν υπάρχει μικρή πιθανότητα σύγχυσης, έτσι: sin*x*; Αυτό είναι γνωστό ως συμβολισμός προθέματος.

Για να καθορίσετε μια συγκεκριμένη λειτουργία, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός (ένα βέλος με μια μπάρα στην ουρά του). Για παράδειγμα, η παραπάνω συνάρτηση διαβάζει

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \to 4\text{-}x.$

Το πρώτο μέρος μπορεί να διαβαστεί ως εξής:

- "*f* είναι μια συνάρτηση από το (το σύνολο των φυσικών αριθμών) στο (το σύνολο των ακεραίων)" ή
- "*f* είναι μια -συνάρτηση τιμών από μια -τιμή μεταβλητών".

Το δεύτερο μέρος μπορεί να διαβαστεί:

- "το *x* αντιστοιχεί στο 4−*x*."

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση αυτή έχει τους φυσικούς αριθμούς ως σύνολο ορισμού και τους ακεραίους ως σύνολο τιμών. Για να κυριολεκτήσουμε, μια συνάρτηση είναι σωστά ορισμένη μόνο όταν το σύνολο ορισμού και το σύνολο τιμών καθορίζονται. Για παράδειγμα, ο τύπος $f(x) = 4 - x$ μόνος του, (χωρίς να προσδιορίζεται το σύνολο τιμών και του ορισμού) δεν είναι μια σωστά ορισμένη συνάρτηση. Επιπλέον, η συνάρτηση

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$x \to 4\text{-}x.$

(με διαφορετικό σύνολο ορισμού) δεν θεωρείται η ίδια συνάρτηση, ακόμη και αν οι τύποι που ορίζουν τα f και g συμφωνούν, και ομοίως με ένα διαφορετικό σύνολο τιμών. Παρόλα αυτά, πολλοί συγγραφείς παραλείπουν τον καθορισμό του συνόλου ορισμού και του συνόλου τιμών, ειδικά αν αυτά είναι σαφή από τα συμφραζόμενα. Έτσι, σε αυτό το παράδειγμα, πολλοί απλά γράφουν $f(x) = 4 - x$. Μερικές φορές, το μέγιστο δυνατό σύνολο ορισμού είναι επίσης κατανοητό έμμεσα: ένας τύπος όπως ο f(x)= $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ μπορεί να σημαίνει ότι το σύνολο ορισμού της f το σύνολο των πραγματικών αριθμών x όπου η τετραγωνική ρίζα ορίζεται (σε αυτή την περίπτωση $x \leq 2$ or $x \geq 3$).

Κεφάλαιο 3ο Οικονομικές συναρτήσεις

3.1 Οικονομικές συναρτήσεις

Η έννοια του κόστους είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια των εσόδων. Έσοδο ονομάζεται το χρηματικό ποσό που αποκτάται από την πώληση ενός προϊόντος. Συνάρτηση εσόδων ονομάζεται η συνάρτηση που συνδέει τις ποσότητες $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ των πωλουμένων αγαθών με το έσοδο που προκύπτει από την πώλησή τους . Το έσοδο συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα R (από το αρχικό της λέξης revenue), και η συνάρτηση εσόδων συμβολίζεται συνήθως με $R= g\ (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n)$.

Είναι φανερό ότι οι σχέσεις (εξισώσεις) $C= f\ (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n)$ και $R= g\ (q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n)$, συνιστούν σχέσεις συμπεριφοράς. Η σχέση P=R-C είναι σχέση ορισμού η οποία ορίζει και την έννοια του κέρδους ως διαφοράς μεταξύ εσόδων και κόστους. Καταλαβαίνουμε βέβαια ότι το μέγεθος P (profit), δηλαδή το κέρδος, είναι συνάρτηση των ίδιων μεταβλητών όπως και το έσοδο (R) και το κόστος (C).

3.1.1 Συνάρτηση Ζήτησης

Στην προσπάθεια τους οι οικονομολόγοι να εξηγήσουν τις διάφορες τιμές των προϊόντων ανέπτυξαν και χρησιμοποίησαν ένα σημαντικό υπόδειγμα του φαινομένου αυτού, το οποίο είναι γνωστό και ως υπόδειγμα προσφορά και ζήτησης. Το υπόδειγμα αυτό στηρίζεται στον θεμελιώδη νόμο της προσφοράς και της ζήτησης ο οποίος μας λέει χονδρικά ότι η τιμή κάθε αγαθού προσδιορίζεται από την εξίσωση της προσφοράς και της ζήτησης του (συνθήκη ισορροπίας).

Όταν λέμε ζήτηση για ένα αγαθό εννοούμε την ποσότητα του αγαθού αυτού την οποία οι αγοραστές ως σύνολο είναι διατεθειμένοι να αγοράσουν, σε μία συγκεκριμένη τιμή αυτού. Συνάρτηση ζήτησης λοιπόν ενός αγαθού είναι ακριβώς η συνάρτηση η οποία συνδέει τις ποσότητες του αγαθού που οι καταναλωτές είναι διαθέσιμοι να αγοράσουν, με τις αντίστοιχες τιμές αυτού. Καμπύλη ζήτησης είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

Η ποσότητα την οποία οι αγοραστές είναι διατεθειμένοι να αγοράσουν δεν συμπίπτει κατ’ ανάγκην με την ποσότητα την οποία τελικά αγοράζουν. Αυτό που τελικά αγοράζουν μπορεί να είναι μικρότερο από αυτό που ήταν διατεθειμένοι να αγοράσουν. Αυτό γίνεται για διάφορους λόγους όπως είναι η ανεπάρκεια του ζητούμενου αγαθού. Ταυτόχρονα όμως η ποσότητα που υπεισέρχεται στη συνάρτηση ζήτησης δεν είναι κατ΄ ανάγκην ίση ούτε με την ποσότητα την οποία οι καταναλωτές θα ήθελαν να αγοράσουν. Η τελευταία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την πρώτη , αφού οι καταναλωτές μπορεί να μην είναι σε θέση να αγοράσουν όλη τη ποσότητα που επιθυμούν. Ο όρος «είναι διατεθειμένοι να αγοράσουν» αναφέρεται στην ποσότητα την οποία οι καταναλωτές είναι και θέλουν και μπορούν να αγοράσουν με βάση τις οικονομικές τους δυνατότητες. Γίνεται θεωρητικά αποδεχτό αφού έχει παρατηρηθεί και εμπειρικά ότι για τα περισσότερα αγαθά ότι αν ανέρχεται τιμή τους μειώνεται η ζήτηση τους. Υπάρχουν ωστόσο και τα αγαθά τα οποία ονομάζονται Giffen στα οποία συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Καθώς δηλαδή αυξάνεται η τιμή τους, αυξάνεται αντίστοιχα και η ζήτηση τους. Αυτό συμβαίνει για μερικά αγαθά σε μερικές αγορές και για ορισμένες περιόδους.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ζήτηση δεν είναι μόνο η τιμή του αγαθού αλλά και άλλοι παράγοντες όπως οι τιμές άλλων, συγγενών προς το υπό θεώρηση αγαθών, το μέσο εισόδημα των καταναλωτών, η διανομή του κ.α.

Η συνάρτηση ζήτησης ενός αγαθού ή υπηρεσίας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

Qd = f (P, Y, Pr, Ta, Ex, Po)

Όπου έχουμε:

Qd = η ζητούμενη ποσότητα

P = η τιμή του αγαθού

Y = το εισόδημα του καταναλωτή

Pr = η τιμή σχετικών αγαθών (συμπληρωματικών, υποκατάστατων)

Ta = τα γούστα του καταναλωτή

Ex = οι προσδοκίες του καταναλωτή

Po = ο πληθυσμός

1. Εάν υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβλητές παραμένουν σταθερές εκτός από την τιμή του εν λόγω αγαθού, η συνάρτηση ζήτησης γίνεται

   Qd = f (P)
2. Εάν υποθέσουμε γραμμική σχέση μεταξύ τιμής και ποσότητας η συνάρτηση ζήτησης μπορεί να γραφτεί όπως

   Qd = α – βP

Όπου α είναι η αυτόνομη κατανάλωση (η ζητούμενη ποσότητα όταν η τιμή είναι μηδέν) και –β είναι η κλίση της καμπύλης ζήτησης.

Η καμπύλης ζήτησης μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή

Qd = 120 – 4P

3.1.2 Συνάρτηση Προσφοράς

Η κάθε επιχείρηση έχει ως στόχο την αναζήτηση της ποσότητας εκείνης της οποίας μεγιστοποιεί τα κέρδη της. Τα κέρδη της είναι αποτέλεσμα δύο μεγεθών, του κόστους παραγωγής και των εσόδων της επιχείρησης. Το κόστος παραγωγής εξαρτάται από την παραγόμενη ποσότητα. Τα έσοδα εξαρτώνται από την τιμή πώλησης του προϊόντος και την ποσότητα που παράγει και προσφέρει στην αγορά

(Συνολικά έσοδα =Τιμή * ποσότητα).

Εάν η τιμή πώλησης του προϊόντος είναι σταθερή και η επιχείρηση μπορεί να πουλά όποια ποσότητα θελήσει να παράγει, τότε το κέρδος της επιχείρησης εξαρτάται από το κόστος και την παραγόμενη ποσότητα. Όσο το κατά μονάδα προϊόντος κόστος μειώνεται, η επιχείρηση αυξάνει την παραγωγή της, ακόμα και με την ίδια τιμή πώλησης, γιατί αυξάνει το κέρδος της. Το αντίθετο συμβαίνει, αν το κατά μονάδα προϊόντος κόστος αυξάνεται. Επομένως, η επιχείρηση θα πρέπει να βρει την ποσότητα για την οποία μεγιστοποιείται το κέρδος της. Αυτό σημαίνει ότι, αν η τιμή του προϊόντος μεταβληθεί, η επιχείρηση μεταβάλλει την παραγόμενη και συνεπώς, την προσφερόμενη ποσότητα.

Η τιμή του αγαθού είναι ο παράγοντας εκείνος που προσδιορίζει την προσφερόμενη ποσότητα, όταν οι υπόλοιποι παράγοντες που επηρεάζουν την προσφορά παραμένουν σταθεροί. Οι υπόλοιποι παράγοντες, εκτός από την τιμή, προσδιορίζουν τη θέση της καμπύλης προσφοράς. Η μεταβολή τους μετατοπίζει ολόκληρη την καμπύλη της προσφοράς.

Οι βασικότεροι προσδιοριστικοί παράγοντες είναι:

1) Οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών. Η μεταβολή της τιμής ενός ή περισσότερων από τους συντελεστές που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή ενός αγαθού συνεπάγεται τη μεταβολή του κόστους παραγωγής του. Αν υπάρχει αύξηση των τιμών των παραγωγικών συντελεστών, αυξάνεται το κόστος του αγαθού για κάθε επίπεδο παραγωγής, άρα με το ίδιο κόστος, παράγουμε λιγότερο προϊόν. Η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται προς τα αριστερά. Το αντίθετο ακριβώς συμβαίνει, όταν μειώνονται οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών για το αγαθό, με αποτέλεσμα να μειώνεται το κόστος παραγωγής. Η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται προς τα δεξιά.

2) Η Τεχνολογία της παραγωγής. Η μεταβολή στην τεχνολογία έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή στη συνάρτηση παραγωγής. Η βελτίωση οδηγεί σε αύξηση του παραγόμενου αγαθού με ίδια ποσότητα παραγωγικών συντελεστών (ενώ η χειροτέρευση στο αντίθετο), αφού με την ίδια ποσότητα παραγωγικών συντελεστών, και εφόσον οι τιμές τους παραμένουν σταθερές, παράγουμε περισσότερο προϊόν. Αποτέλεσμα είναι να έχουμε μετατόπιση της καμπύλης προσφοράς προς τα δεξιά. Το αντίθετο αποτέλεσμα παρουσιάζεται στην καμπύλη προσφοράς, όταν χειροτερεύει η τεχνολογία. Η καμπύλη προσφοράς μετατοπίζεται τότε προς τα αριστερά.

3) Οι καιρικές συνθήκες. Η σημασία του συγκεκριμένου παράγοντα σχετίζεται κυρίως με την παραγωγή και την προσφορά γεωργικών προϊόντων. Η επίδραση αυτή είναι σημαντική για χώρες που παράγουν κυρίως γεωργικά προϊόντα. Οι καλές καιρικές συνθήκες για την παραγωγή των αγαθών αυξάνουν την προσφορά και μετατοπίζουν την καμπύλη προσφοράς προς τα δεξιά, ενώ οι δυσμενείς μειώνουν την προσφορά και μετατοπίζουν την καμπύλη προσφοράς προς τα αριστερά.

4) Ο αριθμός των επιχειρήσεων. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των επιχειρήσεων, είναι λογικό να αυξάνεται η προσφορά, δηλαδή να μετατοπίζεται η καμπύλη προσφοράς προς τα δεξιά. Το αντίθετο συμβαίνει όταν μειώνεται ο αριθμός των επιχειρήσεων, μειώνεται η προσφορά και μετατοπίζεται η καμπύλη προσφοράς προς τα αριστερά (Κουτρουμανίδης, 2012).

Η συνάρτηση προσφοράς ενός αγαθού ή υπηρεσίας μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως

Qs = f (P, N, Pr, T, Ex, Pi)

Όπου έχουμε:

Qs = η προσφερόμενη ποσότητα

N = ο αριθμός των πωλητών

Y = το εισόδημα του καταναλωτή

Pr = η τιμή σχετικών αγαθών (συμπληρωματικών, υποκατάστατων)

T = τεχνολογία

Ex = οι προσδοκίες των παραγωγών

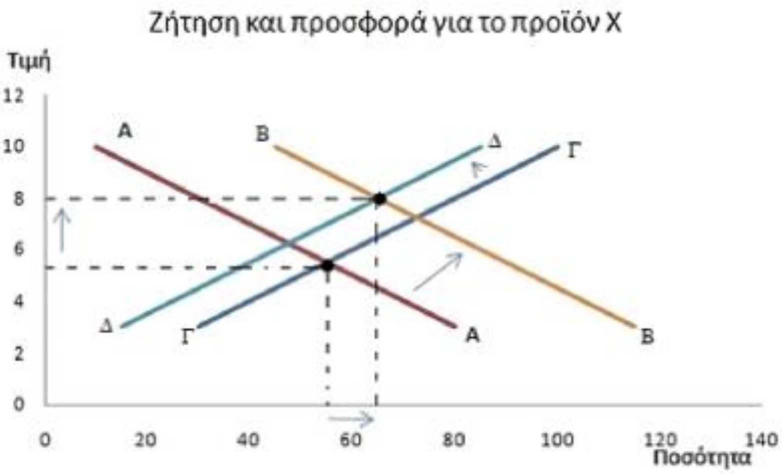
Pi = οι τιμές των συντελεστών παραγωγής

3.2 Σημείο Ισορροπίας

Το σημείο ισορροπίας είναι μια κατάσταση στην οποία η προσφορά ενός αγαθού είναι ακριβώς ίση με τη ζήτησή του.

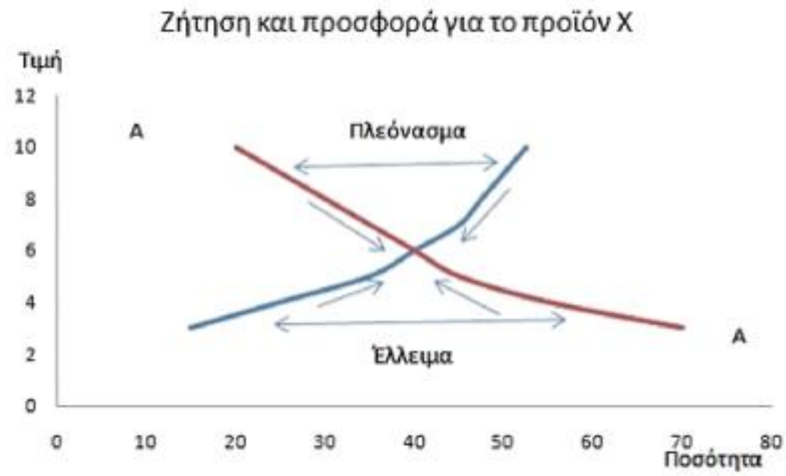
Σε αυτή την κατάσταση η τιμή ενός αγαθού τείνει να παραμένει σταθερή δεδομένου ότι δεν υπάρχει ούτε πλεόνασμα ούτε έλλειψη στην αγορά. Υπάρχει περίπτωση η τιμή να μεταβληθεί από κάποιους εξωγενής παράγοντες όπως μια αλλαγή στους προσδιοριστικούς παράγοντες της προσφοράς (τεχνολογική καινοτομία) ή στους προσδιοριστικούς παράγοντες της ζήτησης (προτιμήσεις καταναλωτών).

Τόσο οι αγοραστές όσο και οι πωλητές θα μείνουν ικανοποιημένοι στην περίπτωση που η ζήτηση είναι ίση με την προσφορά γιατί θα πραγματοποιήσουν τις συναλλαγές που επιθυμούν και έτσι δεν θα υπάρχει τάση αλλαγής της τιμής του προϊόντος (θα υπάρχει ισορροπία στην αγορά)



Στην περίπτωση όμως όπου η τιμή του προϊόντος στην αγορά είναι τέτοια ώστε η ποσότητα που οι αγοραστές επιθυμούν να αγοράσουν είναι μεγαλύτερη από εκείνη που προσφέρουν οι πωλητές στην τιμή αυτή θα υπάρξει έλλειμα στην αγορά και οι αγοραστές δεν θα βρουν τις ποσότητες που επιθυμούν να αγοράσουν. Η ύπαρξη ανικανοποίητων αγοραστών θα δημιουργήσει αυξητικές πιέσεις στην τιμή καθώς αυτοί θα προσφέρουν περισσότερο προκειμένου να αποκτήσουν τις ποσότητες που επιθυμούν.

Σε αντίθετη περίπτωση όπου η τιμή του προϊόντος είναι τέτοια ώστε η ποσότητα που προσφέρουν οι πωλητές είναι μεγαλύτερη από εκείνη που οι αγοραστές επιθυμούν να αποκτήσουν στην τιμή αυτή. Ορισμένοι πωλητές θα μείνουν με ανεπιθύμητα αποθέματα και θα αρχίσουν να μειώνουν την τιμή προκειμένου να τα διαθέσουν. Έτσι θα υπάρξει μειωτική πίεση στην τιμή και θα δημιουργηθεί πλεόνασμα στην αγορά.



Ανώτατη/Κατώτατη Τιμή

Υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις όπου οι τιμές που προσδιορίζονται από το μηχανισμό της προσφοράς και της ζήτησης είναι δυνατό να θεωρηθούν από το κράτος ως υπερβολικά χαμηλές ή υψηλές και για το λόγο αυτό μπορεί να παρέμβει για να τις συγκρατήσει σε ένα επίπεδο που το ίδιο θεωρεί ως επιθυμητό.

Μια τέτοια πρακτική κρατικής παρέμβασης μπορεί να είναι ενδεδειγμένη σε μια ανώμαλη περίοδο, (π.χ. μονοπώλια, πόλεμος, φυσικές καταστροφές), όταν παρατηρείται μείωση της προσφοράς ορισμένων βασικών προϊόντων που έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της τιμής τους σε επίπεδα πολύ υψηλότερα από εκείνα που είναι σε θέση να πληρώσει μεγάλο μέρος των καταναλωτών.

Σε άλλες περιπτώσεις, το κράτος παρεμβαίνει για να διατηρηθούν ορισμένες τιμές προϊόντων ή παραγωγικών συντελεστών σε επίπεδα υψηλότερα από εκείνα που προσδιόριζαν οι δυνάμεις της αγοράς, προκειμένου να προστατευθούν τα εισοδήματα των παραγωγών των εν λόγω προϊόντων ή των κατόχων των συγκεκριμένων παραγωγικών συντελεστών (http://www.euretirio.com/2011/04/simeio-isorropias.html#ixzz31URQOMQP www.euretirio.com).

3.3 Θεωρία της ζήτησης του αγαθού

Η θεωρία της ζήτησης αφορά στην μεταβολή της ποσότητας ενός αγαθού σε οποιαδήποτε μεταβολή της τιμής ενός αγαθού. Υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της μεταβολής του εισοδήματος και της ποσότητας του αγαθού.

Παράδειγμα

Έχουμε τον καφέ και την ζάχαρη που είναι 2 συμπληρωματικά αγαθά.

Όσο αυξάνεται η τιμή της ζάχαρης θα μειώνεται η κατανάλωση της και θα επηρεάσει και την κατανάλωση της ζάχαρης που θα μειωθεί επίσης

Όμως όταν έχουμε το κρασί και την μπύρα που είναι υποκατάστατα αγαθά, όταν αυξάνεται η τιμή του κρασιού μειώνεται η κατανάλωσή του αλλά αυξάνεται η κατανάλωση της μπύρας.

Ελαστικότητα ζήτησης

Είναι η ποσοστιαία μεταβολή στην ποσότητα του αγαθού η οποία προκαλείται από μία ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του αγαθού.

$$e = \frac{\frac{DQ}{Q}}{\frac{DP}{P}} = \frac{DQ}{DP}\ \frac{P}{Q}$$

Όπου

ΔQ: είναι η μεταβολή της ποσότητας του προϊόντος (που την βρίσκουμε αφαιρώντας την αρχική ποσότητα του προϊόντος με την τελική ποσότητα)

ΔP: είναι η μεταβολή της τιμής του προϊόντος (που την βρίσκουμε αφαιρώντας την αρχική τιμή του προϊόντος με την τελική τιμή)

P: είναι η αρχική τιμή του προϊόντος

Q: είναι η αρχική ποσότητα του προϊόντος

Παράδειγμα: Η τιμή ενός αγαθού από 10ευρω αυξήθηκε στα 13 και η ποσότητα είναι 22 και 26 αντίστοιχα. Η μεταβολή ποσότητας: -6 και η μεταβολή τιμής: 3. Εφαρμόζουμε τον τύπο.

E = $-\frac{6}{3}\frac{10}{22} = -0.909$

Η ελαστικότητα της ζήτησης είναι αρνητική λόγω της αρνητικής συσχέτισης της τιμής με την ποσότητα.

Σταυροειδής ελαστικότητα

Είναι η μεταβολή της ποσότητας ενός αγαθού προς τη μεταβολή της τιμής του άλλου αγαθού.

Παράδειγμα: η τιμή του καφέ από 10ευρω μειώθηκε στα 6. Η ποσότητα της ζάχαρης απο 50 αυξήθηκε στα 55 αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε τον τύπο.

$$e = -\frac{5}{4}\frac{10}{50} = -\frac{50}{200} = -0.25$$

Η ελαστικότητα ζητήσεως μεταξύ 2 συμπληρωματικών αγαθών είναι αρνητική ενώ 2 υποκατάστατων είναι θετική.

Εισοδηματική Ελαστικότητα

Είναι ο λόγος της ποσοστιαίας μεταβολής ενός αγαθού προς την ποσοστιαία μεταβολή του εισοδήματος.

$$e = \frac{\frac{DQ}{Q}}{\frac{DY}{Y}} = \frac{DQ}{DY}\frac{Y}{Q}$$

Όπου

ΔQ: είναι η μεταβολή της ποσότητας του προϊόντος (που την βρίσκουμε αφαιρώντας την αρχική ποσότητα του προϊόντος με την τελική ποσότητα)

ΔY: είναι η μεταβολή του εισοδήματος (που την βρίσκουμε αφαιρώντας το αρχικό εισόδημα με το τελικό)

Y: είναι το αρχικό εισόδημα

Q: είναι η αρχική ποσότητα του προϊόντος

ey>1 Όταν το ey είναι μεγαλύτερο της μονάδας το αγαθό είναι πολυτέλειας.

ey<1 Όταν το ey είναι μικρότερο της μονάδας το αγαθό είναι πρώτης ανάγκης.

ey<0 Όταν το ey είναι μικρότερο του μηδενός τότε το αγαθό είναι κατώτερο.

Ey=0 Όταν το ey είναι ίσο με το μηδέν δεν υπάρχει καμία σχέση μεταξύ της μεταβολής της τιμής και του εισοδήματος.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Έστω e= 0,5. Η τιμή ενός αγαθού μεταβάλλεται από 10€ σε 11€ . Ποιά είναι είναι η ποσοστιαία μεταβολή στην προσφερόμενη ποσότητα και ποια είναι η απόλυτη τιμή εάν η αρχική προσφερόμενη ποσότητα είναι 500 μονάδες;

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο της ελαστικότητας της ζήτησης και θα αντικαταστήσουμε τα δεδομένα προκειμένου να βρούμε την προσφερόμενη ποσότητα δηλαδή το Q2.

$e = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q} \rightarrow 0.5 = \frac{Q2 - 500}{10 - 11}\frac{10}{500} \rightarrow 0.5 = (Q2 - 500)\ 0.02 \ \rightarrow 0.5 = 0.02\ Q2 - 10 \rightarrow 0.02\ Q2 = 525$

Για να βρούμε την ποσοστιαία μεταβολή της προσφερόμενης ποσότητας απλά θα αντικαταστήσουμε τα δεδομένα στον τύπο.

$$\Delta Q\% = \frac{Q2 - Q1}{Q1}100 = \frac{525 - 500}{500}100 = \frac{25}{5}100 = 5\%$$

3.4 Κόστος

Προκειμένου μία επιχείρηση να παράγει μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού, πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα κάποιες ποσότητες παραγωγικών συντελεστών όπου ο καθένας έχει κάποιο κόστος. Οι συνολικές αμοιβές αυτών των παραγωγικών συντελεστών συνιστούν το κόστος της παραγωγικής διαδικασίας.

Το οικονομικό κόστος (econimic cost) που είναι ουσιαστικά το κόστος ευκαιρίας της επιχείρησης για την παραγωγή το προϊόντος είναι το σύνολο του εμφανούς και του αφανούς κόστους.

Εξαιτίας των πληθωρικών τάσεων που συνήθως επικρατούν στην οικονομία, οι τιμές των παραγωγικών συντελεστών αυξάνονται με τον καιρό, ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις που οι τιμές κάποιων παραγωγικών συντελεστών μειώνονται.

Υπάρχει περίπτωση τότε να δημιουργηθεί πρόβλημα για το ποιο ακριβώς είναι το κόστος ευκαιρίας των χρησιμοποιούμενων συντελεστών, οπότε γίνεται διάκριση του ιστορικού κόστους (historic cost) και του κόστος αντικατάστασης (replacement cost).

3.4.1 Κόστος αποθεμάτων

Η επιχείρηση στο λογιστικό κόστος περιλαμβάνει το ιστορικό κόστος των αποθεματικών. Όμως για την λήψη των επιχειρηματικών αποφάσεων είναι σωστότερο ως κόστος αποθεματικών να θεωρηθεί το κόστος αντικατάστασης τους, όχι το ιστορικό κόστος, γιατί αν η επιχείρηση θελήσει να αντικαταστήσει θα χρειαστεί να πληρώσει στις τρέχουσες τιμές τους.

3.4.2 Κατηγορίες στοιχείων κόστους

Από την σκοπιά της χρησιμότητας τους για την λήψη αποφάσεων τα κόστη μπορούν αν χωριστούν σε:

σχετικά κόστη (relevant costs), τα οποία είναι που δημιουργούνται ως αποτέλεσμα συγκεκριμένης ενέργειας.

μη σχετικά κόστη (irrelevant costs), τα οποία είναι εκείνα που έχουν δημιουργηθεί στο παρελθόν και δεν σχετίζονται με την εν λόγω ενέργεια.

Το κόστος διακρίνεται σε:

i. Σταθερό κόστος → Ονομάζουμε το κόστος που δεν παρουσιάζει εξομοιώσεις σε οποιαδήποτε μεταβολή της παραγωγής (πχ. Το διαφημιστικό κόστος, φόροι-τέλη και έξοδα συντήρησης)

ii. Μεταβλητό κόστος → Ονομάζουμε το κόστος που μεταβάλλεται ευθέως ανάλογα με τον όγκο της παραγωγής (πχ. Κόστος πρώτης ύλης, κόστος πωληθέντων (αποθέματα αρχής + αγορές περιόδου- αποθέματα τέλους και ένα μέρος του εργατικού κόστους). Στην αρχή της παραγωγικής διαδικασίας η αύξηση του μεταβλητού κόστους έχει ως συνέπεια την διαρκή και μεγαλύτερη αύξηση του προϊόντος.

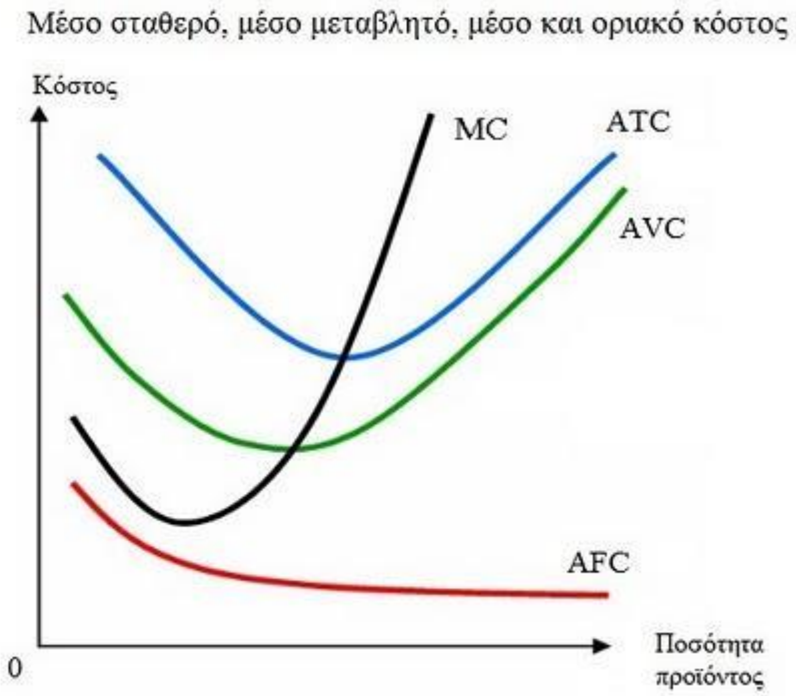
iii. Χρηματικό κόστος → Αφορά τις τιμές των Π.Σ οι οποίες διαμορφώνονται στην αγορά

iv. Κοινωνικό κόστος → Διαμορφώνεται μέσα στην επιχείρηση (οι παραγωγικοί συντελεστές μέσα στην επιχείρηση). Εκφράζει την δυνατότητα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο παραγωγικός συντελεστής εναλλακτικά και το κόστος αυτής της δυνατότητας στην επιχείρηση.

v. Συνολικό κόστος → Το συνολικό κόστος παραγωγής ενός προϊόντος αποτελείται από το άθροισμα του σταθερού και του μεταβλητού κόστους.

vi. Μέσο κόστος → Είναι το άθροισμα του μέσου σταθερού και του μέσου μεταβλητού κόστους και προκύπτει από την πρόσθεση των δύο αυτών μεγεθών ή από τη διαίρεση του συνολικού κόστους με την ποσότητα του προϊόντος.

vii. Οριακό κόστος → Είναι το κόστος μιας επιπλέον μονάδας του προϊόντος και βρίσκεται από τη διαίρεση της μεταβολής του συνολικού κόστους με τη μεταβολή της ποσότητας του προϊόντος.



Στην αρχή της παραγωγικής διαδικασίας κάθε αύξηση του μεταβλητού κόστους έχει ως α ποτέλεσμα τη συνεχώς και μεγαλύτερη αύξηση του προϊόντος.

3.4.3 Νεκρό Σημείο

Νεκρό σημείο (break even point) ονομάζεται το ακριβώς ποσό των πωλήσεων, που μια επιχείρηση καλύπτει το σύνολο των εξόδων της, τα σταθερά και τα μεταβλητά χωρίς να πραγματοποιεί ούτε κέρδος ούτε ζημιά. Ο υπολογισμός του νεκρού σημείου μας δείχνει τον ελάχιστο όγκο παραγωγής που πρέπει να επιτευχθεί, προκειμένου η επιχείρηση να καλύπτει τόσο το σταθερό όσο και το μεταβλητό κόστος της. Δηλαδή ουσιαστικά το νεκρό σημείο μας δείχνει πόσο μπορεί να μειωθούν οι πωλήσεις μιας επιχείρησης χωρίς αυτή να είναι ζημιογόνα.

Το νεκρό σημείο προσδιορίζεται:

ΕΣΟΔΑ TR=P*Q

ΕΞΟΔΑ TC=TFC+TVC

όπου: P= Τιμή

Q= Ποσότητα

TFC= Συνολικό Σταθερό Κόστος

TVC= Συνολικό Μεταβλητό Κόστος

και γνωρίζουμε ότι TVC=VC*Q

όπου: VC= Μεταβλητό Κόστος

Q= Ποσότητα

$$TR = TC$$

$$P \cdot Q = TFC + (VC \cdot Q)$$

$$Q = \frac{TFC}{P - VC}$$

<u>P-VC</u>= Συνεισφορά του προϊόντος . Διαφορά τιμής με μεταβλητό κόστους ανά μονάδα.

Εφαρμογή

Έχουμε μία επιχείρηση η οποία παράγει ένα προϊόν με Q=5500 και P=150 TFC=220000 K=110000. Αν κάνουμε μία επένδυση I=540000 με επιτόκιο i=10% θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα: Q1=7000, TFC1=270000, P1=135 και VC1=-12.

a. Η επένδυση είναι συμφέρουσα ή όχι;
b. Το νεκρό σημείο πριν και μετά την επένδυση

a) Αρχικά θα βρούμε το κέρδος πριν την επένδυση. Γνωρίζουμε ότι το κέρδος το βρίσκουμε αφαιρώντας από τα έξοδα από τα έσοδα

K = ΕΣ - ΕΞ→ 110000 = 150 · 5500 - (220000 + 5500·VC)→VC = 90 Άρα VC1=78

Στην συνέχεια βρίσκουμε τα κέρδη μετά την επένδυση

K=(7000·135)-(270000+7000·78)→K=129000

Τέλος θα βρούμε το ποσοστό απόδοσης προκειμένου να το συγκρίνουμε με το κόστος της επένδυσης για να δούμε αν συμφέρει τελικά ή όχι η επένδυση.

Ποσοστό Απόδοσης $= \frac{19000}{540000} 100 = 3{,}3\ \%$ η απόδοση είναι μικρότερη από το κόστος οπότε δεν είναι συμφέρουσα.

** το 19000 το βρίσκουμε αν αφαιρέσουμε το κέρδος πριν την επένδυση και το κέρδος μετά την επένδυση. 110000-129000=19000

b) το Νεκρό σημείο πριν την επένδυση είναι: $ΝΣ = \frac{220000}{150-90} = 3{,}666$

το Νεκρό σημείο μετά την επένδυση είναι: $ΝΣ = \frac{270000}{135-78} = 4700$

Άσκηση

Η επιχείρηση ΟΛΥΜΠΟΣ ΑΕ λειτουργεί με σταθερά έξοδα 50000 ευρώ και μεταβλητό κόστος ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος 17 ευρώ. Παράγει 3000 τεμάχια και επιτυγχάνει έσοδα 75000 ευρώ. Ζητούνται τα εξής:

a. Ποιό είναι το ελάχιστο όριο παραγγελίας που πρέπει να αναλάβει η επιχείρηση για να φθάσει στο ΝΣ.
b. Ποιός είναι ο αριθμός παραγομένων μονάδων του προϊόντος που η επιχείρηση πρέπει να παράγει για να επιτυγχάνει κέρδη 2000 ευρώ.
c. Θα συνιστούσατε στη Διοίκηση την ανάληψη μιας πρόσθετης παραγγελίας 3000 μονάδων όταν η τιμή πωλήσεως των πρόσθετων μονάδων είναι 10% χαμηλότερη, η τιμή του μεταβλητού κόστους ανά μονάδα προϊόντος των πρόσθετων μονάδων είναι 10% υψηλότερη και τα σταθερά έξοδα παραμένουν αμετάβλητα.
d. Να εξετάσετε εάν το ποσοστό συνεισφοράς του προϊόντος μεταβάλλεται (μετά την ανάληψη της πρόσθετης παραγγελίας) και να ευρεθεί το ποσοστό μεταβολής.

TFC=500000

VC=17

Q=3000

TR=75000

a. $N\Sigma = \frac{TFC}{P-VC} = \frac{50000}{25-17} = 6.250$

* Για να βρούμε την τιμή θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

TR = P · Q→ 75000= 3000· P→P=25

Άρα το ελάχιστο όριο που θα πρέπει να αναλάβει είναι 6250 τεμάχια οπότε πρέπει να αναλάβει άλλα 3250.

b. K=2000 K = TR – TC → 2000= TR – TC

2000=P·Q_2–(TFC+TVC)

2000=25·Q_2-(50000+17·Q_2)

2000=25·$Q_2 - 50000 - 17Q_2$

52000=8Q_2

$Q_2 = 6500$ η ποσότητα που πρέπει να παραχθούν για να υπάρξει κέρδος 2000

c. Q'=3000

P'=-10%

VC=+10%

TFC=50000

$$P' = P - \frac{10}{100}\,P = 25 - \frac{10}{100}\,25 = 25 - \frac{500}{100} = 20$$

$$VC' = VC - \frac{10}{100}VC = 17 - \frac{10}{100}17 = 17 - \frac{500}{100} = 20$$

- Πριν την παραγγελία έχουμε:

K=TR-TC → K= P·Q – (TFC +TVC)

K= 25·3000 – (5000 + 17·3000)

K= 75000 – 101000

K= -26000

- Μετά την παραγγελία έχουμε:

K=TR – TC → K= P·Q + P΄· Q΄ - (50000+17·3000+50000+18.7·3000)

K= 25·3000+20·3000-(50000+51000+50000+56100)

K= 75000+60000- (101000+106100)

K=13500-207100

K= -72100

Δεν συμφέρει την επιχείρηση να αναλάβει την παραγγελία γιατί έχει παραπάνω ζημιά 46100€.

d) Πριν την παραγγελία: $\frac{P-VC}{P}100 = \frac{25-17}{25}100 = 32\%$

$$\frac{P-'VC'}{P'}100 = \frac{20-18{,}7}{20}100 = 6{,}5\%$$

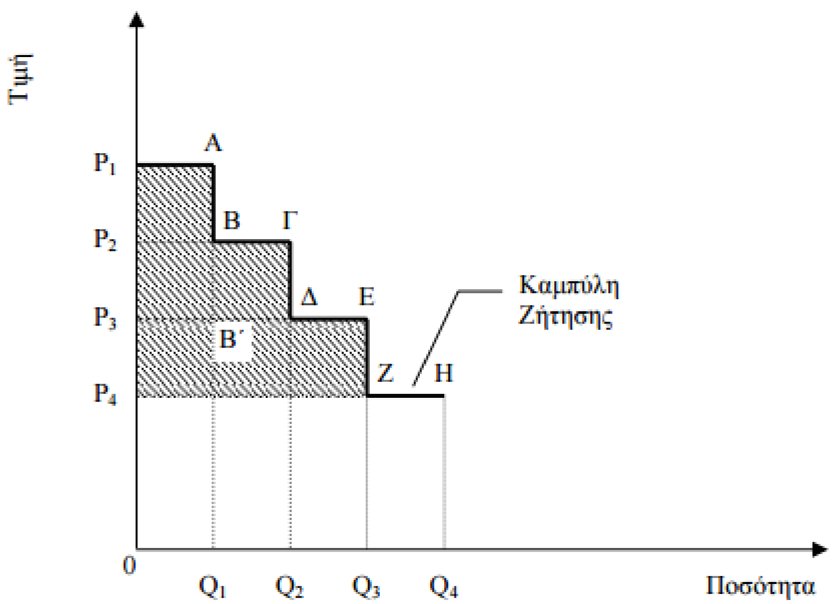
Μετά την παραγγελία:

Ποσοστό μεταβολής $\frac{6{,}5-32}{32}100 = -79{,}68$

3.5 Πλεόνασμα καταναλωτή

Η καμπύλη ζήτησης δείχνει τις ανώτερες τιμές που ο καταναλωτής είναι πρόθυμος να πληρώσει για διαφορετικές ποσότητες ενός αγαθού. Ο καταναλωτής πληρώνει συνήθως την ίδια τιμή ανεξάρτητα από την ποσότητα που αγοράζει.

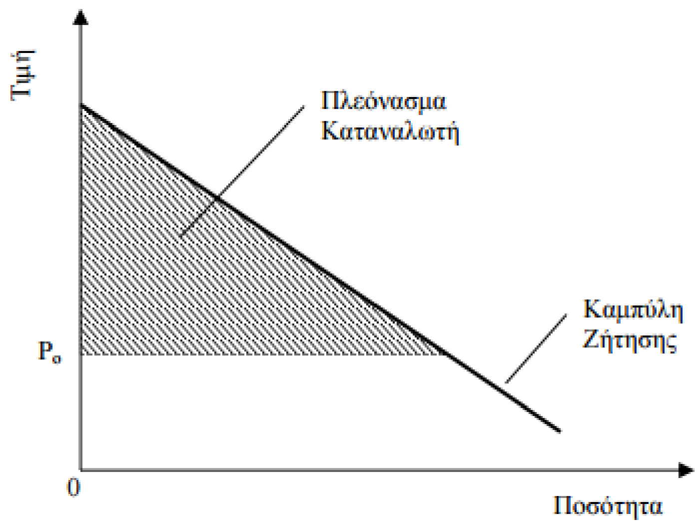
Το πλεόνασμα του καταναλωτή είναι ωφέλεια που προκύπτει από το γεγονός ότι κάποιοι καταναλωτές πληρώνουν για ένα αγαθό λιγότερο από αυτό πού θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν.



Έστω, για παράδειγμα, ότι όταν η τιμή του αγαθού είναι P1, η ζητούμενη ποσότητα είναι Q_1, όπως παρουσιάζεται στο παραπάνω διάγραμμα. Αυτό σημαίνει ότι αυτοί που αγοράζουν την ποσότητα Q_1 πληρώνουν τη μέγιστη αποδεκτή τιμή για να καταναλώσουν το αγαθό. Η συνολική δαπάνη που κάνουν οι καταναλωτές αυτοί είναι $P_1 \times Q_1$ ή το εμβαδόν $0P_1AQ_1$. Αν η τιμή μειωθεί σε P_2, η ζητούμενη ποσότητα αυξάνεται σε Q_2 επειδή και κάποιοι άλλοι καταναλωτές, που είχαν μέγιστη αποδεκτή τιμή P_2, θα αγοράσουν τώρα το αγαθό. Ωστόσο, την τιμή P_2 ανά μονάδα του αγαθού πληρώνουν τόσο οι νέοι καταναλωτές όσο και αυτοί που είχαν μέγιστη αποδεκτή τιμή P_1. Συνεπώς, οι καταναλωτές που πλήρωναν μέχρι τώρα τιμή P_1 για να καταναλώσουν ποσότητα Q1 θα δαπανούν, μετά τη μείωση της τιμής, $P_2 \times Q_1$ ή το εμβαδόν 0P2BQ1 δηλ. θα έχουν όφελος έναντι της προηγούμενης δαπάνης (όταν η τιμή ήταν P_1) το εμβαδόν P_1P_2BA (= $0P_1AQ_1 – 0P_2BQ_1$). Αυτό το όφελος είναι το πλεόνασμα του καταναλωτή στην τιμή P_2 και δίνεται από το εμβαδόν που είναι πάνω από την υπό εξέταση τιμή (P_2) και κάτω από την καμπύλη ζήτησης που είναι η έντονη γραμμή P_1AB.

Αν ληφθεί και μια νέα μείωση της τιμής από P_2 σε P_3. Η ζητούμενη ποσότητα αυξάνει σε Q_3 εφόσον κάποιοι άλλοι καταναλωτές, που είχαν μέγιστη αποδεκτή τιμή P_3, θα ζητούν τώρα το αγαθό. Όμως, όλοι οι καταναλωτές θα πληρώνουν την τιμή P_3 ανά μονάδα, τόσο αυτοί που θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν P_1 όσο και αυτοί που θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν P_2. Επομένως, οι δύο τελευταίες κατηγορίες καταναλωτών θα έχουν όφελος που δίνεται από τη διαφορά της δαπάνης που θα ήταν διατεθειμένοι να καταβάλουν και της δαπάνης που πράγματι καταβάλουν. Σε όρους περιοχών του ανωτέρω διαγράμματος, αυτοί που καταναλώνουν Q_1 πληρώνουν τώρα $P_3 \times Q_1$ ή το εμβαδόν $0P_3B΄Q_1$, δηλ. έχουν όφελος $P_1P_3B΄A$ (=$0P_1AQ_1 – 0P_3B΄Q_1$), ενώ αυτοί που καταναλώνουν την ποσότητα Q_1Q_2 πληρώνουν τώρα $P_3 \times$(Q1Q2) ή το εμβαδόν $Q_1B΄ΔQ_2$ και έχουν όφελος Β΄ΒΓΔ (= $Q_1ΒΓQ_2 – Q_1B΄ΔQ_2$). Επομένως, το συνολικό όφελος στην τιμή P_3 είναι το εμβαδόν $P_1P_3ΔΓΒΑ$ (=$P_1P_3B΄A$ + Β΄ΒΓΔ), δηλ. και σ’ αυτή την περίπτωση το πλεόνασμα του καταναλωτή δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής που είναι πάνω από την τιμή P_3 και κάτω από την καμπύλη ζήτησης που είναι η έντονη γραμμή $P_1ΑΒΓΔ$.

Το ίδιο συμπέρασμα θα ληφθει αν παρθεί μια νέα μείωση της τιμής. Έτσι, σε τιμή P_4, το πλεόνασμα του καταναλωτή θα δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής $P_1P_4ΖΕΔΓΒΑ$. Όταν οι μμεταβολές της τιμής είναι πολύ μικρές, τα σκαλοπάτια της καμπύλης ζήτησης θα είναι πολύ μικρά με αποτέλεσμα η καμπύλη να είναι σχεδόν ομαλή, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου για απλοποίηση έχουμε πάρει μια γραμμική συνάρτηση ζήτησης. Και σ’ αυτή την περίπτωση το πλεόνασμα του καταναλωτή σε κάθε τιμή θα δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την τιμή και την καμπύλη ζήτησης. Έτσι, στην τιμή Po το πλεόνασμα του καταναλωτή θα δίνεται από τη γραμμοσκιασμένη περιοχή του παρακάτω διαγράμματος.



Κεφάλαιο 4ο Εφαρμογές Οικονομικών Συναρτήσεων

Το excel αποτελεί ένα πρόγραμμα χρήσης για τις οικονομικές συναρτήσεις. Γενικότερα το excel περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό συναρτήσεων φύλλου εργασίας, οι οποίες εκτελούν υπολογισμούς με συγκεκριμένη σειρά ή δομή. Οι συναρτήσεις δέχονται τιμές εισόδου οι οποίες ονομάζονται ορίσματα της συνάρτησης και επιστρέφουν το αποτέλεσμα απλών ή πολύπλοκων υπολογισμών.

Στη παρούσα θα γίνει αναφορά στις οικονομικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα:

<u>FV</u>

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την μελλοντική αξία μιας επένδυσης βάσει περιοδικών, σταθερών πληρωμών και σταθερού επιτοκίου.

Σύνταξη

=FV (επιτόκιο; αριθμός περιόδων; δόση αποπληρωμής; παρούσα αξία; τύπος)

Επιτόκιο: Το επιτόκιο δανείου ή κεφαλαίου

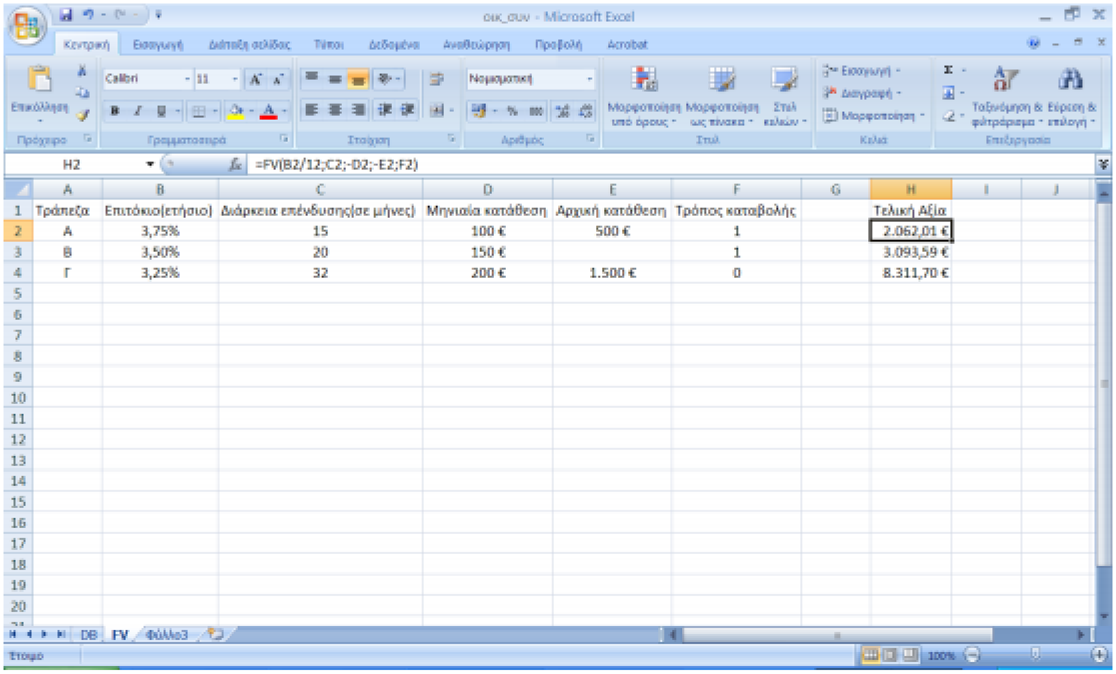
Αριθμός περιόδων: Ο συνολικός αριθμός δόσεων για την αποπληρωμή της επένδυσης.

Δόση αποπληρωμής: Το σταθερό χρηματικό ποσό που καταβάλουμε σε κάθε περίοδο.

Παρούσα αξία: Το χρηματικό ποσό που έχουμε καταβάλει στην αρχή της επένδυσης (εάν υπάρχει τέτοιο ποσό).

Τύπος: Υποδηλώνει εάν οι δόσεις πρέπει να καταβληθούν στην αρχή ή στο τέλος της περιόδου (αρχή = 1 , τέλος = 0).

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ότι έχουμε τις ακόλουθους λογαριασμούς στις τράπεζες Α, Β, Γ με τα στοιχεία συγκεκριμένα στοιχεία. Να βρείτε πόσα χρήματα θα πάρετε με την λήξη της επένδυσης από κάθε τράπεζα. Απάντηση: =FV(B2/12;C2;-D2;-E2;F2), για την τράπεζα Α.



IPMT

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει τον τόκο μιας επένδυσης βάσει περιοδικών, σταθερών πληρωμών και σταθερού επιτοκίου.

Σύνταξη =IPMT (επιτόκιο; περίοδος; αριθμός περιόδων; παρούσα αξία; μελλοντική αξία; τύπος)

Επιτόκιο: Το επιτόκιο δανείου ή κεφαλαίου.

Περίοδος: Το πλήθος των μεμονωμένων περιοδικών δόσεων αποπληρωμής.

Αριθμός περιόδων: Ο συνολικός αριθμός δόσεων για την αποπληρωμή της επένδυσης. Παρούσα αξία: Η αξία της επένδυσης σήμερα.

Μελλοντική αξία: Η αξία της επένδυσης στο τέλος της περιόδου (σε περίπτωση που παραληφθεί λαμβάνεται ως 0).

Τύπος: Υποδηλώνει εάν οι δόσεις πρέπει να καταβληθούν στην αρχή ή στο τέλος της περιόδου (αρχή = 1 , τέλος = 0).

Παράδειγμα Έστω ότι παίρνουμε ένα στεγαστικό δάνειο 100.000€ για 20 χρόνια με επιτόκιο 6,2% πληρώνοντας μια δόση τη φορά. Να υπολογίσετε τον τόκο για τον 15ο μήνα του δανείου μας (υποθέτουμε ότι θα πληρώνουμε στην αρχή κάθε μήνα). **Απάντηση:** =IPMT(6,2%/12;15;12*20;100000;0;1), το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι -498,28 €. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι θα δώσουμε χρήματα.

PMT

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την περιοδική δόση αποπληρωμής ενός δανείου βάσει σταθερών πληρωμών και σταθερού επιτοκίου.

Σύνταξη =PMT (επιτόκιο; αριθμός περιόδων; παρούσα αξία; μελλοντική αξία; τύπος)

Επιτόκιο: Το επιτόκιο δανείου ή κεφαλαίου.

Αριθμός περιόδων: Η χρονική διάρκεια της επένδυσης.

Παρούσα αξία: Η αξία της επένδυσης σήμερα.

Μελλοντική αξία: Η αξία της επένδυσης στο τέλος της περιόδου (σε περίπτωση που παραληφθεί λαμβάνεται ως 0).

Τύπος: Υποδηλώνει εάν οι δόσεις πρέπει να καταβληθούν στην αρχή ή στο τέλος της περιόδου (αρχή = 1 , τέλος = 0).

Παράδειγμα Να βρείτε τη μηνιαία δόση ενός δανείου, ονομαστικής αξίας 100.000€ με 14% επιτόκιο και αποπληρωμή μέσα σε 20 μήνες.

Απάντηση: =PMT(14%/12;20;100000), όπου μας επιστρέφει -5.634,98 €, δηλαδή θα πρέπει να καταβάλουμε 5.634,98€ μηνιαία.

RATE

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει τον συντελεστή απόδοσης (επιτόκιο) για μια επένδυση ή ένα δάνειο.

Σύνταξη =RATE (αριθμός περιόδων; πληρωμή; παρούσα αξία; μελλοντική αξία; τύπος)

Αριθμός περιόδων: Ο συνολικός αριθμός δόσεων για την αποπληρωμή της επένδυσης.

Πληρωμή: Το σταθερό χρηματικό ποσό που καταβάλλεται σε κάθε περίοδο.

Αριθμός περιόδων: Ο συνολικός αριθμός δόσεων για την αποπληρωμή της επένδυσης.

Παρούσα αξία: Η αξία της επένδυσης σήμερα.

Μελλοντική αξία: Με το όρισμα αυτό υπολογίζουμε το επιτόκιο μιας εφάπαξ πληρωμής (σε περίπτωση που παραληφθεί λαμβάνεται ως 10%).

Τύπος: Υποδηλώνει εάν οι δόσεις πρέπει να καταβληθούν στην αρχή ή στο τέλος της περιόδου (αρχή = 1 , τέλος = 0).

Παράδειγμα Έστω ότι παίρνουμε ένα καταναλωτικό δάνειο ύψους 21.000€ για 10 χρόνια με ετήσιο ποσό καταβολής 4.000€. Να βρείτε το ετήσιο επιτόκιο.

Απάντηση: =RATE(10;-4000;21000), που αντιστοιχεί σε 13,83% ετήσιο επιτόκιο.

NPER

Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει τον αριθμό των περιόδων που απαιτούνται για την αποπληρωμή ενός δανείου, με βάση περιοδικές σταθερές πληρωμές και σταθερό επιτόκιο.

Σύνταξη =NPER (επιτόκιο; δόση αποπληρωμής; παρούσα αξία; μελλοντική αξία; τύπος)

Επιτόκιο: Το επιτόκιο δανείου ή κεφαλαίου.

Δόση αποπληρωμής: Το σταθερό χρηματικό ποσό που καταβάλουμε σε κάθε περίοδο.

Αριθμός περιόδων: Ο συνολικός αριθμός δόσεων για την αποπληρωμή της επένδυσης.

Παρούσα αξία: Η αξία της επένδυσης σήμερα.

Μελλοντική αξία: Η αξία της επένδυσης στο τέλος της περιόδου (σε περίπτωση που παραληφθεί λαμβάνεται ως 0).

Τύπος: Υποδηλώνει εάν οι δόσεις πρέπει να καταβληθούν στην αρχή ή στο τέλος της περιόδου (αρχή = 1 , τέλος = 0).

Παράδειγμα Έστω ότι θέλουμε να αγοράσουμε ένα αυτοκίνητο αξίας 35.000€. Το επιτόκιο που ισχύει για την συγκεκριμένη αγοροπωλησία ανέρχεται σε 7,2%. Η δόση που θέλουμε να πληρώνουμε κάθε μήνα είναι 490€. Βρείτε σε πόσους μήνες θα εξοφλήσουμε το αυτοκίνητο.

Απάντηση: =NPER(7,2%/12;-490;35000), όπου μας δίνει αποτέλεσμα 94, όσοι δηλαδή και οι μήνες που θα χρειαστούν για να ξεχρεώσουμε το αμάξι.

NPV

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την καθαρή παρούσα αξία μιας επένδυσης.

Σύνταξη =NPV (επιτόκιο; εισροή1; εισροή2; …)

Επιτόκιο: Το προεξοφλητικό επιτόκιο δανείου ή κεφαλαίου.

Εισροή1, εισροή2, … : Είναι τα εισοδήματα και οι πληρωμές. Για τα εισοδήματα δίνουμε θετικές τιμές ενώ για τις πληρωμές αρνητικές.

Παράδειγμα Έστω ότι μια επένδυση έχει ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο 14% και αρχικό κόστος επένδυσης 50.000. Το κέρδος από την επένδυση υπολογίζουμε να είναι 15.000€ για το πρώτο έτος, 22.000€ για το δεύτερο, 23.000€ για το τρίτο και 25.000€ για το τέταρτο. Να βρείτε αν συμφέρει η επένδυση.

Απάντηση: =NPV(14%;-50000;15000;22000;23000;25000), το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι 9.133,80€. Άρα η επένδυση είναι συμφέρουσα.

DB

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την απόσβεση ενός περιουσιακού στοιχείου για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, με τη μέθοδο του σταθερά φθίνοντος υπολοίπου. Σύνταξη =DB (κόστος; υπολειμματική αξία; ζωή; περίοδος; μήνας)

Κόστος: Υποδηλώνει το αρχικό κόστος του περιουσιακού στοιχείου.

Υπολειμματική αξία: Η αξία του περιουσιακού στοιχείου στο τέλος της απόσβεσης.

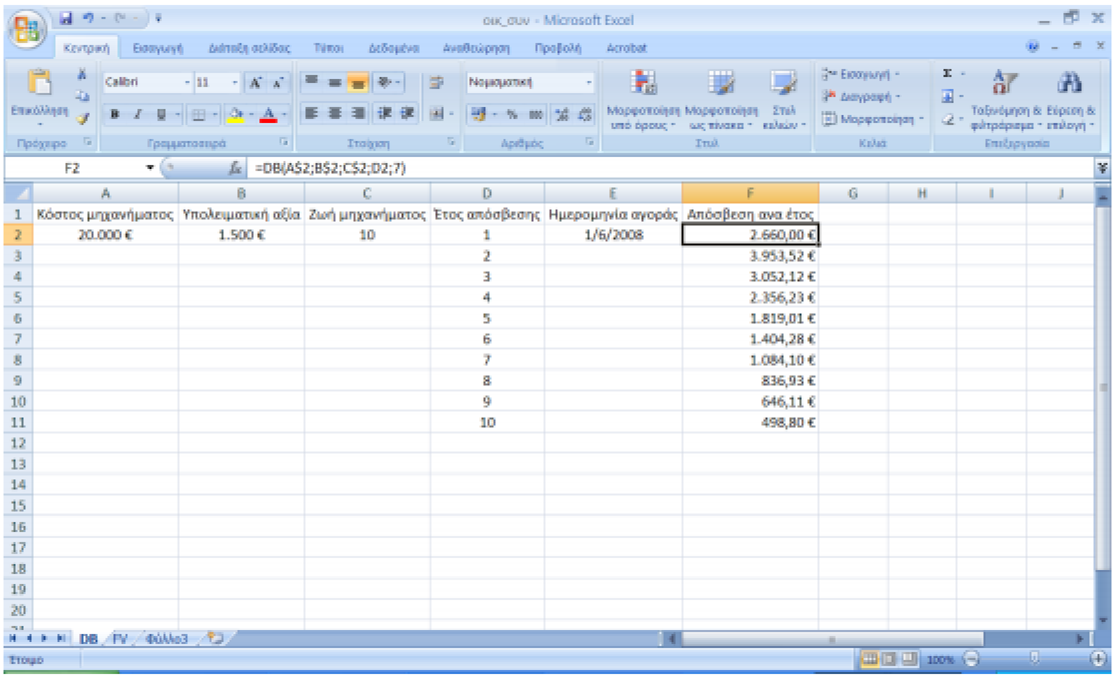
Ζωή: Ο χρόνος απόσβεσης του περιουσιακού στοιχείου.

Περίοδος: Η χρονική περίοδος κατά την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσβεση.

Μήνας: Ο αριθμός των μηνών για το πρώτο έτος της απόσβεσης (Σε περίπτωση που παραλειφθεί, λογίζεται ως 12).

Παράδειγμα Την 1η Ιουνίου 2008 μια επιχείρηση αγόρασε ένα μηχάνημα αξίας 20.000€. Η διάρκεια ζωής του μηχανήματος υπολογίζεται σε 10 έτη. Μετά την απόσβεση η αξία του μηχανήματος θα ανέρχεται στα 1.500€. Να βρείτε την απόσβεση του μηχανήματος για κάθε έτος ζωής του.

<u>Απάντηση:</u> =DB(20000;1500;10;1;7) για το πρώτο έτος. =DB(20000;1500;10;2;7) για το δεύτερο έτος. ... … … =DB(20000;1500;10;10;7) για το δέκατο έτος.



	A	B	C	D	E	F
1	Κόστος μηχανήματος	Υπολειματική αξία	Ζωή μηχανήματος	Έτος απόσβεσης	Ημερομηνία αγοράς	Απόσβεση ανα έτος
2	20.000 €	1.500 €	10	1	1/6/2008	2.660,00 €
3				2		3.953,52 €
4				3		3.052,12 €
5				4		2.356,23 €
6				5		1.819,01 €
7				6		1.404,28 €
8				7		1.084,10 €
9				8		836,93 €
10				9		646,11 €
11				10		498,80 €

Συμπεράσματα

Πραγματοποιήθηκε μια αναφορά σχετικά με τις οικονομικές συναρτήσεις. Η έννοια της συνάρτησης, όπως αναφέρθηκε, παρουσιάστηκε αρκετά χρόνια πίσω. Η συνάρτηση ορίστηκε ως μια αντιστοίχιση μεταξύ δύο συνόλων που καλούνται σύνολο ορισμού και σύνολο τιμών κατά την οποία κάθε ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του πεδίου τιμών.

Οι οικονομικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις οι οποίες είναι χρήσιμες σε εφαρμογές όπως είναι το excel. Οι επιχειρήσεις στηρίζονται σε οικονομικά στοιχεία για να μπορέσουν να επεξεργάζονται όχι μόνο τα ήδη υπάρχοντα έσοδα κι έξοδα αλλά και τα μελλοντικά. Έτσι κάθε επιχείρηση ασχολείται με οικονομικές συναρτήσεις που πάντα έχουν να κάνουν με τα οικονομικά της στοιχεία. Οι τράπεζες, επίσης, χρησιμοποιούν οικονομικές συναρτήσεις όπως σε περίπτωση κάποιου δανείου.

Συνεπώς, οι οικονομικές εφαρμογές θεωρούνται πλέον κατάλληλο εργαλείο στη διοίκηση και στην οικονομία μιας επιχείρησης. Συνεπώς μέσα από την έρευνα αποδεικνύεται όχι μόνο η χρησιμότητα αλλά και η αναγκαιότητα των οικονομικών συναρτήσεων στις οικονομικές σχέσεις μιας επιχείρησης. Μόνο μέσω της ορθής χρήσης των συναρτήσεων και τη σωστή διοίκηση μπορεί μια επιχείρηση να επιβιώσει και να αναπτυχθεί οικονομικά καθώς και να διατηρήσει υγιείς οικονομικές σχέσεις με εσωτερικούς και εξωτερικούς φορείς. Οι οικονομικές συναρτήσεις ερμηνεύουν σχέσεις και καταστάσεις και μόνο μέσω της ορθής κατανόησης αλλά και πρόβλεψης μπορούν να βγουν ορθά και συμπαγή συμπεράσματα στα οποία πάνω μπορούν να στηριχθούν οι κινήσεις μιας επιχείρησης.

Εκτός από την χρησιμότητα τους για τις επιχειρήσεις μια ασφαλής και ορθή γενίκευση θα ήταν ότι οι οικονομικές συναρτήσεις είναι αρωγοί και σωτήριες για όσους τις χρησιμοποιούν μέσω τις απλής εφαρμογής τους στα λογιστικά φύλλα του excel. Στην εποχή της αβεβαιότητας, της οικονομικής κρίσης, και των οικονομικών δυσκολιών η χρήση των οικονομικών συναρτήσεων είναι απαραίτητη στη σωστή οργάνωση και διαχείριση των οικονομικών του κάθε φυσικού προσώπου.

Βιβλιογραφία

Μαύρη Μαρία, 2013, Οικονομικά Μαθηματικά, Εκδόσεις: Προπομπός, Αθήνα

Κουτρουμανίδης Θ., Ζαφειρίου Ε., 2012, Ποσοτική Οικονομική Ανάλυση, Εκδόσεις : Ζήτη, Θεσσαλονίκη

Ξεππαδέας Αναστάσιος, Γιαννίκος Ιωάννης, 2007, Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

Michael Hoy, John Livernois, Chris McKenna, Thanasis Stengos, Ray Rees, 2013,Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

Kakwani C.N, 2016, Applications of Lorenz Curves in Economic Alalysis, The Econometric Society, pp.719-728

Wim Meeusen and Julien van Den Broeck, 2016, Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error, Wiley for the Economics Department of the University of Pennsylvania and Institute of Social and Economic Research, Osaka University pp. 435-444,

Βαρβάκης Κ, 2003, Κοστολόγηση και Κοστολογική Οργάνωση, Εκδόσεις: Παπαζήση, Αθήνα

Ιστοσελίδες:
http://2012books.lardbucket.org/books/theory-and-applications-of-economics/

http://www.euretirio.com/2011/04/simeio-isorropias.html#ixzz31URQOMQP
www.euretirio.com