Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ.

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Τ.Ε.

Διπλωματική εργασία

ΘΕΩΡΙΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΛΑΒΕΡ-ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΑΝΙ

Επιβλέπων καθηγητής: Σταύρος Φατούρος

Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ.

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Τ.Ε.

Διπλωματική εργασία

ΘΕΩΡΙΑ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΨΕΥΔΟΦΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΛΑΒΕΡ-ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΑΝΙ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εκπόνηση της πτυχιακής εργασίας αποτελεί αναμφισβήτητα μια πρόκληση πνευματική αλλά και συναισθηματική για τον φοιτητή. Αυτό συμβαίνει διότι οι δυσκολίες που αναπόφευκτα ανακαλύπτονται κατά τη συγγραφή της, τον αναγκάζουν να διευρύνει τη σκέψη του και να ξεφύγει από τα στεγανά της μελέτης ενός συγκεκριμένου αντικειμένου. Όμως η δημιουργική διαδικασία δεν είναι μοναχική υπόθεση, όπως κάθε εγχείρημα, έτσι και η παρούσα πτυχιακή εργασία, για να ολοκληρωθεί και να είναι αντάξια του κόπου που καταβλήθηκε, στηρίχθηκε από ανθρώπους τους οποίους ευχαριστώ από καρδίας.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της πτυχιακής μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σταύρο Φατούρο, ο οποίος στήριξε εμπράκτως της προσπάθεια μου καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Η αρμονική συνεργασία μας και η καθοδήγηση που μου προσέφερε, στάθηκαν καταλυτικοί παράγοντες στην ομαλή εξέλιξη της διαδικασίας αυτής. Επίσης ευχαριστώ τον κ. Περικλή Παπαδόπουλο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμ. Ηλεκτρονικών Μηχανικών, ο οποίος με την συμβολή του αυτή η εργασία έκανε το «επόμενο βήμα».

Τέλος, να ευχαριστίσω την οικογένεια μου, που πάντα με εμψυχώνουν, υποστηρίζουν τις επιλογές μου, και με στηρίζουν στο ταξίδι της ζωής.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή γίνεται μια προσπάθεια μελέτης και εύρεσης των ιδιοτιμών ενός γραμμηκοποιημένου συστήματος με την τεχνική εύρεσης του ψευδοφάσματος. Σε θεωριτικό επίπεδο παραθέτουμε τους ορισμούς και τα θεωρήματα για τις ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και τα ψευδοφάσματα, κατά κανόνα με τις αποδείξεις τους, εργαλεία απαραίτητα για την πλήρη κατανόηση του αντικειμένου. Σε πρακτικό επίπεδο, επιλέγουμε τετραγωνικούς πίνακες για να σχεδιάσουμε τα ψευδοφάσματα τους γύρω από τις ιδιοτιμές που μας ενδιαφέρουν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο pseinout που εκτιμά το φάσμα, και για αρκέτα ε τα όρια του ε- ψευδοφάσματος ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα.

Στο πρώτο και δεύτερο κεφάλαιο δινόνται βασικοί ορισμοί για τις ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και γραμμικά συστήματα έτσι ώστε ο αναγνώστης να κατανοήσει τα κεφάλαια που ακολουθούν.

Στο τρίτο και τέταρο κεφάλαιο αναλύουμε τα συστήματα αυτόματου ελέγχου και τις εφαρμογές των ιδιοτιμών σε συστήματα πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων σε συνάρτηση των μεταβατικών πινάκων κατάστασης.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο εφαρμόζουμε το ψευδοφάσμα σε συγκεκριμένες ιδιοτιμές για να εξετάσουμε την συμπεριφορά τους και βγάζουμε κάποια συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1ο Ιδιοτιμές – ιδιοδιανύσματα

1.1 Γενική εισαγωγή και ορισμοί

Ένα ιδιοδιάνυσμα ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα υ που,όταν πολλαπλασιαστεί με τον A, ισούται με το αρχικό διάνυσμα,πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό λ,έτσι ώστε:

$$A\lambda = \lambda u$$

Όπου ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A που αντιστοιχεί στο $\Re$.

Τα ιδιοδιανύσματα τα συναντάμε :

1. Αναλυτική γεωμετρία
2. Γραμμική άλγεβρα
3. Κβαντική μηχανική

Αν και όλα είναι εξίσου σημαντικά και ενδιαφέροντα εμείς θα τα αναλύσουμε στο κομμάτι της γραμμικής άλγεβρας.

Στην αφηρημένη γραμμική άλγεβρα,οι έννοιες αυτές συνήθως επεκτείνονται σε πιο γενικές καταστάσεις,όπου οι παράγοντες που χρησιμοποιούνται σε πραγματική κλίμακα,αντικαθίστανται από σώματα κάθε διάστασης (όπως οι αλγεβρικοί ή μιγαδικοί αριθμοί),οι καρτεσιανές συντεταγμένες R που αντικαθίστανται από τυχαίους διανυσματικούς χώρους (συνεχών συναρτήσεων,πολυωνύμων ή τριγωνομετρικών σειρών) .Επίσης,ο πολλαπλασιασμός πινάκων που αντικαθίσταται από κάθε γραμμικό τελεστή που απεικονίζει διανύσματα σε διανύσματα (παράγωγος από το διαφορικό λογισμό) . Σε όλες τις προαναφερόμενες περιπτώσεις, το «διάνυσμα» σε «ιδιοδιάνυσμα» μπορεί να αντικατασταθεί από έναν πιο ακριβή όρο,όπως ιδιοσυνάρτηση, ιδιομορφή ή και ιδιοπροσωπία.

Επομένως,για παράδειγμα, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του παράγωγου φορέα «΄»,με ιδιοτιμή $\lambda = \ln a$,αφού η παράγωγος της είναι η $f'(x) = (\ln a)a^x = \lambda f(x)$.

Πιο συγκεκριμένα, στις ιδιοτιμές και στα ιδιοδιανύσματα:

- Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{nxn}$. Το διάνυσμα $\underline{x} \in \mathbf{R}^{n}$ με $\underline{x} \neq \underline{0}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A αν $\exists \lambda \in \mathbf{R}$ τ.ω. $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$. Ο αριθμός λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A .

Παρατήρηση: $A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow A\underline{x} - \lambda \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\underline{x} = \underline{0}$, και από τον παραπάνω ορισμό θέλουμε $\underline{x} \neq \underline{0}$, άρα : {ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A } αν { το σύστημα $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\underline{x} = \underline{0}$ έχει μη-μηδενικές λύσεις (άπειρες λύσεις)}. Επομένως,ο λ είναι μια ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$,δηλαδή αν $N(\mathrm{A} - \lambda I_n) \neq \{\underline{0}\}$

- Ο μηδενόχωρος $\mathrm{N}\left(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n\right)$ λέγεται ιδιόχωρος του A ως προς την ιδιοτιμή λ και συμβολίζεται $V_\lambda(\mathrm{A})$.Δηλαδή:

$$V_\lambda(\mathrm{A}) = \mathrm{N}(\mathrm{A} - \lambda I_n)$$

- Σημείωση:Ο ιδιόχωρος $V_\lambda(\mathrm{A})$ περιέχει το $\underline{0}$ μαζί με όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ .
- Γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ : $\dim V_\lambda(\mathrm{A}) = \dim N(A - \lambda I_n) = n - r(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$
- Ο υπολογισμός της ορίζουσας $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ δίνει ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ, το οποίο ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ,και η επίλυση της δίνει τις ιδιοτιμές του A .

Παρατήρηση : Η τιμή του $\mathrm{X}_\mathrm{A}(0)$ είναι ίση με την ορίζουσα του A. Δηλαδή $\mathrm{X}_\mathrm{A}(0) = \det A$

1.2 Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Από τον ορισμό για να είναι ένα διάνυσμα $\upsilon \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα θα πρέπει να πληρείται η σχέση :

$$A\upsilon = \lambda\upsilon \qquad (1)$$

ή ισοδύναμα

$$A\upsilon - \lambda\upsilon = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{A} - \lambda I)\upsilon = 0 \Leftrightarrow |\mathrm{A} - \lambda I| = 0 \qquad (2)$$

Η συνάρτηση $|\mathrm{A} - \lambda I|$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα.

(Αν ο $A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος τότε εύκολα συνεπάγεται ότι $\underline{\upsilon} = \underline{0}$)

Ας τα δούμε όλα αυτά που είπαμε λίγο πιο πρακτικά με μια φόρμα άσκησης και ύστερα με παραδείγματα.

Έστω ο διαγώνιος πίνακας $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ με $\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης (2)

$$|D - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)(\alpha_{33} - \lambda) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 = \alpha_{11} \\ \lambda_2 = \alpha_{22} \\ \lambda_3 = \alpha_{33} \end{array}\right\}$$

Για την πρώτη ιδιοτιμή λύνουμε την εξίσωση $D\underline{\upsilon} = \lambda_1 \underline{\upsilon}$ για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυμσα.

$$D\underline{\upsilon} = \lambda_1 \underline{\upsilon} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}y_1 \\ a_{33}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{11}y_1 \\ a_{11}z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\upsilon_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ομοίως βρίσκουμε :

$$\underline{\upsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\upsilon_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή δεν είναι μοναδικά αλλά οικογένειες διανυσμάτων. Συνήθως επιλέγουμε έναν εκπρόσωπο οικογένειας. Π.χ. λέγεται συχνά ότι το $\underline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην 1η ιδιοτιμή, εννοώντας όλη την οικογένεια $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι στους διαγώνιους πίνακες οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου. Το ίδιο συμβαίνει και στους τριγωνικούς πίνακες. Ο υπολογισμός ιδιοτιμών στους υπόλοιπους πίνακες ακολουθεί την ίδια διαδικασία.

1.3 Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{nxn}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ τότε ισχύει:

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = tr(\mathrm{A})$ άθροισμα ιδιοτιμών είναι ίσο με το άθροισμα στοιχείων της κύριας διαγωνίου
2) $\lambda_1 * \lambda_2 * ... * \lambda_n = \det A$ το γίνομενο ιδιοτιμών είναι ίσο με την $\det \mathrm{A}$
3) $\det A = 0$ αν και μόνο αν τουλάχιστον μία ιδιοτιμή είναι ίση με το 0
4) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου ή ενός τριγωνικού (άνω ή κάτω) είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου. Δηλαδή :

   Παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ έχει $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$

   Παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ έχει $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5$

5) Οι $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές και του A^T
6) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$ είναι ιδιοτιμές του A^{-1}

   και $V_{1/\lambda_i}(A^{-1}) = V_{\lambda_i}(A)$ με $\forall \lambda_i$

   (δηλαδή,αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i , θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\frac{1}{\lambda_i}$)

7) Ο A^k με $k \in \mathbb{N}$ έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$ και

   $V_{\lambda_i^k}(A^k) \equiv V_{\lambda_i}(A)$ με $\forall \lambda_i$

   (δηλαδή,αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i, θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του A^k που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i^k)

8) Έστω $a \in \mathbf{R}$ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.Τότε οι $a\lambda_1, a\lambda_2, ..., a\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα αA.Επιπλέον:
   $V_{a\lambda_i}(aA) \equiv V_{\lambda_i}(A)$ Με $\forall \lambda_i$ εφόσον $\alpha \neq 0$
   (δηλαδή αν $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i ,θα είναι και ιδιοδιάνυσμα του αA που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\alpha\lambda_i$)

9) Για δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j με $\lambda_i \neq \lambda_j$ ισχύει ότι: $V_{\lambda_i}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{V}_{\lambda j}(\mathrm{A}) = \{\underline{0}\}$

   Συμπέρασμα : Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ($\lambda_i \neq \lambda_j$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

1.4 Παραδείγματα

Για να είμαστε σε θέση να λύσουμε εύκολα τις επόμενες ασκήσεις θα πρέπει να έχουμε κατά νού την θεωρία που αναφέραμε στα κεφάλαια 1.1 και 1.2, τις ιδιότητες στο κεφάλαιο 1.3 και τέσσερα βασικά βήματα που ακολουθούν.

- Υπολογισμός του πίνακα $\left[A-\lambda I_n\right]$,ο οποίος προκύπτει από τον A με την αφαίρεση της παραμέτρου λ από την κύρια διαγώνιο.(βήμα 1ο)
- Υπολογισμός της $\det(A-\lambda I_n)$.(βήμα 2ο)
- Επίλυση της εξίσωσης $\det(\mathrm{A}-\lambda I_n)=0$.Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του A. (βήμα 3ο)
- Για κάθε ιδιοτιμή,βρίσκουμε μια βάση του ιδιόχωρου $V_\lambda(\mathrm{A})=\mathrm{N}(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n)$, λύνοντας το ομογενές σύστημα $(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n)\underline{x}=\underline{0}$ (βήμα 4ο).

Παράδειγμα 1ο:

Έστω πίνακας μετασχηματισμού $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, και διάνυσμα $\underline{u}=\begin{bmatrix}4\\ -4\end{bmatrix}$.

Είναι ένα ιδιοδιάνυσμα με ιδοτιμή 2 διότι $A\underline{u}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -4\end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix}3*4+1*(-4)\\ 1*4+3*(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -8\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}4\\ -4\end{bmatrix}$$

δηλαδή πολλαπλάσιο του αρχικού διανύσματος υ.

Αντίθετα, το διάνυσμα $\underline{u}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ δεν είναι ένα ιδιοδιάνυσμα διότι

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 0+1\cdot 1\\ 1\cdot 0+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$$

Και αυτό το διάνυσμα δεν είναι πολλαπλάσιο του αρχικού διανύσματος υ .

Παράδειγμα 2ο (αναλυτικά) :

Έστω πίνακας $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

$$A-\lambda I_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$X_A(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}_2)=(1-\lambda)(3-\lambda)-8=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}_2) <=> \lambda^2-4\lambda-5=0\ ,\left(\sqrt{b^2-4ac},\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$\left\{\begin{matrix}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=5\end{matrix}\right\}$ ιδιοτιμές του A

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, έχουμε:

$$(\mathrm{A}-\lambda_1\,\mathrm{I}_2)\vec{x}=\vec{0} <=> \begin{bmatrix}1-\lambda_1 & 2\\ 4 & 3-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} <=>$$

$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, αν αφαιρέσουμε με το (-2) θα έχουμε

$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U_1$, άρα $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

Με βασική μεταβλητή : x

Ελεύθερη μεταβλητή : y

1η εξίσωση : $2x+2y=0 => x=-y$

Άρα, ο ιδιοχώρος $V_{-1}(\mathrm{A})$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}$

Δηλαδή $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}, y\in\mathbf{R}$ και {μια βάση του }=$V_{-1}(\mathrm{A})=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ με οποιοδήποτε πραγμτικό αριθμό $y \neq 0$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$, έχουμε :

$$(\mathrm{A} - \lambda_2 I_2)\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} <=> \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$ (με απλοποίηση)

Άρα : $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Με βασική μεταβλητή : x

Ελεύθερη μεταβλητή : y

1η εξίσωση : $-4x + 2y = 0 => x = \frac{1}{2}y$

Άρα,ο ιδιόχωρος $V_5(\mathrm{A})$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \end{bmatrix}$

Δηλαδή $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \Re$ και {μια βάση του $V_5(\mathrm{A})$ }= $\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$

Παράδειγμα 3ο:

Έστω πίνακας $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$. Ας βρούμε πρώτα τις ιδιοτιμές

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I})=0 <=> \begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 6\\ 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{bmatrix}=0 \quad <=> \lambda=1 \text{ (διπλή) ή } \lambda=3$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda=1$,σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}2y+6z&=0\\ 4z&=0\\ 3z&=0\end{aligned}$$

Το σύστημα έχει μια μόνο ανεξάρτητη λύση. Μια τέτοια λύση είναι η $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ που αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του A, ενώ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος, δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$V(1)=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x \mid x\in\mathbf{R}\}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda=3$, σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}-2x+2y+6z&=0\\ -2y+4z&=0\end{aligned} \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{aligned}x&=5z\\ y&=2z\end{aligned}$$

Το σύστημα έχει μια μόνο ανεξάρτητη λύση. Μια τέτοιτα λύση είναι η $\left(x,y,z\right)=5\left(,2,1\right)$ που αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του A, ενώ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος, δηλαδή το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$V(3)=\{\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\mathrm{x} \mid \mathrm{x}\in\mathbf{R}\}$$

Κεφάλαιο 2ο Γραμμικά Συστήματα

2.1 Ορισμοί

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων ή ανισώσεων ή αλλιώς γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο από γραμμικές εξισώσεις ή ανισώσεις με τους ίδιους αγνώστους, τους οποίους προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ώστε να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις ή ανισώσεις του συνόλου.

Γραμμικό σύστημα είναι ένα σύνολο $m \le n$ γραμμικών εξισώσεων της μορφής $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + \mathrm{a}_n\, x_n = b$. Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι η

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

Η λύση (ή το σύνολο λύσεων) των παραπάνω εξισώσεων είναι το σύνολο εκείνων των τιμών s_i των x_i ,που καθιστούν κάθε μία από τις m γραμμικές εξισώσεις που εμπεριέχονται, ταυτότητα.

Συστήματα που έχουν $m > n$ θα λέμε ότι έχουν λύση (είναι συμβατά) αν και μόνο αν η λύση που προκύπτει από τις n οποιεσδήποτε εξισώσεις, πληροί και τις υπόλοιπες $m - n$ εξισώσεις.

Γραμμικά συστήματα μιας εξίσωσης της μορφής:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b \qquad (1)$$

Καλείται γραμμική εξίσωση n μεταβλήτων $x_i, 1 \le i \le n$, με σταθερό όρο $b \in F$ και συντελεστές $a_i \in F$, όπου το F θα είναι το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Τα στοιχεία του F καλούνται και μονόμετρα μεγέθη. Η λύση της (1) είναι το σύνολο εκείνων των τιμών s_i των x_i, που καθιστούν την εξίσωση (1) ταυτότητα.

2.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων υπάρχουν αρκετές διαφορετικές μέθοδοι. Εδώ θα περιγράψουμε τις πιο ευρέως χρησιμοποιούμενες. Για να περιγράψουμε τους τρόπους επίλυσης γραμμικών συστημάτων και τις συνθήκες ύπαρξης λύσης θα θεωρήσουμε το πιο γενικό σύστημα $2 \ x \ 2$,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

που σε μορφή πινάκων παίρνει τη μορφή

$$(\alpha)\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

1. **Απλή αντικατάσταση**

Είναι η απλούστερη σε ιδέα από τις μεθόδους. Πρώτο βήμα είναι η επίλυση κάποιας από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και η αντικατάσταση του αγνώστου αυτού στις άλλες εξισώσεις.

$$x_1 = b\left(_1 - a_{12}x_2\right) / a_{11} \ ,$$

$$a_{21}\left(b_1 - a_{12}x_2\right) / a_{11} + a_{22}x_2 = b_2$$

Η δεύτερη από τις παραπάνω εξισώσεις δίνει το x_2, το οποίο αντικαθίσταται στην πρώτη εξίσωση για τον υπολογισμό του x_1.

2. **Μέθοδος ευθείας αντιστροφής**

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον πολλαπλασιασμό και των δύο μελών της εξίσωσης $(\alpha)\underline{x} = \underline{b}$ με τον αντίστροφο του πίνακα (a) ,τον $(a)^{-1}$.

Για να μπορεί να γίνει αυτό θα πρέπει ο (a) να είναι αντιστρέψιμος, ή , ισοδύναμα, η ορίζουσα του να είναι διαφορετική από μηδέν $\left(\det(a) \neq 0\right)$.

Τότε έχουμε :

$$(\alpha)\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow (a)^{-1}(a)\underline{x} = (a)^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underline{x} = (a)^{-1}\underline{b}$$

Αν το διάνυσμα $\underline{b}$ είναι μηδέν τότε η μόνη λύση του συστήματος είναι η μηδενική. Αν η ορίζουσα του (a) είναι μηδέν, το σύστημα είτε δεν έχει λύση ή έχει άπειρες λύσεις. Λόγω της εμπλοκής πολλών πράξεων στη διαδικασία εύρεσης του αντιστρόφου, η μέθοδος ευθείας αντιστροφής δεν προσφέρεται για την επίλυση μεγάλων συστημάτων. Τα βασικά της πλεονεκτήματα είναι ότι προσφέρεται για την περίπτωση όπου χρειάζεται η επίλυση πολλών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα (a) αλλά διαφορετικο δεξιό διάνυσμα $\underline{b}$.

3. **Απαλοιφή Gauss**

Η διαδικασία της επίλυσης συστηματών με απαλοιφή Gauss συνίσταται στην πρόσθεση σε κάθε γραμμή κατάλληλων πολλαπλάσιων μιας άλλης γραμμής, ώστε το σύστημα να οδηγηθεί σε απλούστερο ισοδύναμο σύστημα. Αυτό συνήθως από την πρώτη γραμμή, την οποία πολλαπλασιάζουμε κατάλληλα και την προσθέτουμε στις επόμενες, ώστε να μηδενιστεί ο συντελεστής του πρώτου αγνώστου. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη γραμμή κ.ο.κ.

Παράδειγμα :

$$\begin{aligned} x-2y+z&=4\\ y-2z&=-2\\ 8y-3z&=-29 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή επί (-1) και την προσθέτουμε στην 2η και επί (-2) και την προσθέτουμε στην 3η .

Μετά πολλαπλασιάζουμε τη 2η γραμμή επί (-8) και την προσθέτουμε στην 3η. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x-2y+z&=4\\ y-2z&=-2\\ 13z&=-13 \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα καθώς

$$z=-1, y-2(-1)=-2 \Rightarrow y=-4$$

$$x-2(-4)+(-1)=4 \Rightarrow \mathrm{x}=-3$$

2.3 Πίνακες Μεταφοράς

Η θεωρία πινάκων στη διάδοση οπτικών ακτινών είναι μια αλγεβρική παραξονική τεχνική που χρησιμοποιείται στον σχεδιασμό οπτικών συστημάτων. Στην ουσία βασίζεται στην περιγραφή των ακτίνων ως διανύσματα που αλγεβρικά εκφράζονται ως πίνακες (2 γραμμές, 1 στήλη). Έτσι ο μετασχηματισμός μιας ακτίνας από την είσοδο ενός συστήματος μπορεί να περιγραφεί ως ο πολλαπλασιασμός του πίνακα (2 γραμμές, 1 στήλη) της ακτίνας στην είσοδο με ένα πίνακα (2 γραμμές,2 στήλες) που περιγράφει το οπτικό σύστημα.

Οι τυπικοί πίνακες μεταφοράς χωρίζονται στις εξής κατηγορίες :

- Πίνακας μετατόπισης
- Πίνακας διάθλασης
- Πίνακς ανάκλασης

Αυτές οι κατηγορίες δεν μας ενδιαφέρουν τόσο στο κομμάτι της πτυχιακής εργασίας θα εστιάσουμε περισσότερο στον ορισμό του πίνακα μεταφοράς.

Ορισμός :

Αν μια ακτίνα Y_i εισέλθει σε ένα οπτικό σύστημα εξέρχεται από αυτό έχοντας είτε ύψος $y_i + 1$ ή και κλίση $\theta_i + 1$ και περιγράφεται από ένα νέο διάνυσμα ακτίνας Y_{i+1} :

$$Y_{i+1} = \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ n_{i+1}\theta_{i+1} \end{pmatrix},$$

Όπου n_{i+1} είναι ο δείκτης διάθλασης στην έξοδο.

Η ακτίνα Y_{i+1} στην έξοδο του οπτικού συστήματος συνδέεται με την ακτίνα στην είσοδο Y_i μέσω ενός πίνακα $M(2\,\mathrm{x}\,2)$ που ονομάζεται πίνακας μεταφοράς οπτικού συστήματος μέσω σχέσης :

$$Y_{i+1} = M \cdot Y_i$$

Σε αναλυτική μορφή η παραπάνω σχέση γράφεαι :

$$\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ n_{i+1}\theta_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_i \\ n_i\theta_i \end{pmatrix}$$

Αν η ακτίνα διαδοθεί από N διαδοχικά οπτικά συστήματα που το κάθε ένα περιγράφεται από ένα πίνακα μεταφοράς M_i η ακτίνα στην έξοδο του ενός θα αποτελεί είσοδο για το επόμενο και έτσι η τελική ακτίνα στην έξοδο θα δίνεται από την σχέση :

$$Y_{N+1} = \left(M_N ... M_1\right) \cdot Y_1 = M_{tot} \cdot Y_1$$

Όπου M_{tot} ο συνολικός πίνακας μεταφοράς του σύνθετου οπτικού συστήματος : $M_{tot} = M_N ... M_1$

Κεφάλαιο 3 ΣΑΕ και Μεταβατικοί πίνακες κατάστασης

3.1 Ορισμός καταστάσεων και χώρου κατάστασης

Οι εξισώσεις κατάστασης είναι μια περιγραφή στο πεδίο του χρόνου η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια μεγάλη γκάμα συστημάτων όπως γραμμικά, μη γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα ή μη, με ή χωρίς συνθηκές.

Κατάσταση ονομάζουμε ένα σύνολο εσωτερικών μεταβλητών του συστήματος, η παρακολούθηση των οποίων στον χρόνο μας περιγράφει το σύστημα. Χώρος κατάστασης ονομάζεται ο Ευκλείδιος χώρος ο οποίος δημιουργείται από τις μεταβλητές κατάστασης.

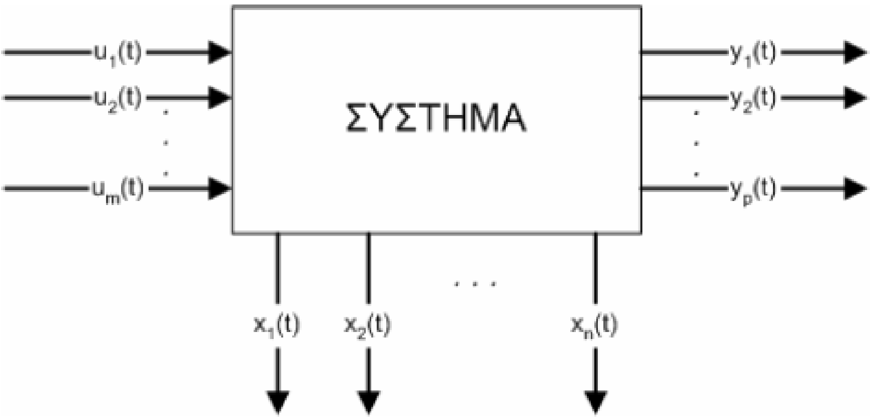
Ορισμός:

Οι μεταβλητές κατάστασης $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ενός συστήματος ορίζονται ως ένας (ελάχιστος) αριθμός μεταβλητών τέτοιων ώστε αν γνωρίζουμε τις τιμές τους για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0, τη συνάρτηση εισόδου που εφαρμόζεται στο σύστημα για $t \geq t_0$,και το μαθηματικό νόμο που συνδέει την είσοδο, τις μεταβλητές κατάστασης και το σύστημα, να καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq t_0$.

Για την περιγραφή ενός συστήματος μπορούν να επιλεγούν διάφορα σύνολα μεταβλητών κατάστασης, φτάνει να έχουν πλήθος n (όσο η τάξη του συστήματος) και να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σε ηλεκτρικά και ηλεκτρονικά κυκλώματα οι μεταβλητές κατάστασης είναι συνήθως γραμμικές συναρτήσεις των (a) φορτίων των πυκνωτών, (b) ρευμάτων στα πηνία. Τα στοιχεία αυτά μπορουν να έχουν συνθήκες οι οποίες επηρεάζουν τον προσδιορισμό της εξόδου του συστήματος.

3.1 Περιγραφή Σ.Α.Ε στο χώρο κατάστασης

Έστω το σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων του σχήματος. Μπορούμε να εκφράσουμε τις m εισόδους, p εξόδους και n μεταβλητές κατάστασης ως διανύσματα :



Εικόνα 3.1

Εικόνα 3.1 : Σύστημα πολλαπλών εισόδων-πολλαπλών εξόδων.

$$u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις κατάστασης ενός συστήματος είναι ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που συνδέει το διάνυσμα εισόδου $u(t)$ με το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ και έχει τη μορφή:

$$x(t)=f[x(t),\mathrm{u}(t)]$$

Όπου f είναι μια στήλη με n στοιχεία. Η συνάρτηση f είναι γενικά μια πεπλεγμένη μη γραμμική συνάρτηση των $x(t)$και $u(t)$.

Το διάνυσμα εξόδου $y(t)$ συνδέεται με τα διανύσματα εισόδου $u(t)$ και κατάστασης $x(t)$ με την εξίσωση εξόδου : $y(t)=g[x(t),\mathrm{u}(t)]$

3.2 Εξισώσεις κατάστασης και λύσεις

Αν ένα γραμμικό μη χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα σύνηθων διαφορικών εξισώσεων, τότε οι εξισώσεις κατάστασης παίρνουν την ειδική μορφή:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Ο πίνακας A έχει διαστάσεις $n \times n$ και ονομάζεται πίνακας του συστήματος, ο πίνακας B έχει διαστάσεις $n \times m$ και ονομάζεται πίνακας εισόδου, ο πίνακας C έχει διαστάσεις $p \times n$ και ονομάζεται πίνακας εξόδου, ο πίνακας D έχει διαστάσεις $p \times m$ και ονομάζεται απευθείας πίνακας.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Λύσεις εξισώσεων κατάστασης: Η λύση των εξισώσεων κατάστασης στοχεύει στον προσδιορισμό του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ για κάθε χρονική στιγμή $t \geq t_0$ (συνήθως το t_0 λαμβάνεται ίσο με μηδέν).

$x(t) = Ax(t) + Bu(t)$ με αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$

Περιλαμβάνει την εύρεση της λύσης της ομογενούς εξίσωσης: $x(t) = Ax(t)$ $x(t_0) = x_0$ η οποία ονομάζεται ελεύθερη απόκριση του συστήματος, καθώς και την εύρεση της απόκρισης του συστήματος στη διέγερση $u(t)$ η οποία ονομάζεται διεγερμένη απόκριση.

Για την ελεύθερη απόκριση μετασχηματίζουμε κατά Laplace

$$x(t) = Ax(t) \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) \Rightarrow \; x(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \cdot x_0$$

3.3 Μεταβατικός πίνακας κατάστασης

Ο πίνακας $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ ονομάζεται μεταβατικός πίνακας κατάστασης διότι μας προσδιορίζει τη μετάβαση του διανύσματος κατάστασης $x(t)$ από την αρχική κατάσταση (I είναι ο πίνακας με μοναδικά μη μηδενικά στοιχεία αυτά της κύριας διαγώνιου)

$x(0)=x_0$ σε οποιαδήποτε τελική κατάσταση $x(t)$.

Ο πίνακας $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ μπορεί να προσδιοριστεί από το ανάπτυγμα Taylor :

$$\Phi(t)=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\frac{1}{3!}A^3t^3+\ldots$$

για αυτό συμβολίζεται με $\Phi(t)=e^{At}$.

Ιδιότητες μεταβατικού πίνακα κατάστασης:

- $\Phi(0)=I$
- $\Phi^{-1}(t)=\Phi(-t)$
- $(\Phi(t))^k=\Phi(kt)$
- $\Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0) \quad \forall t_0,t_1,t_2$

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό του μεταβατικού πίνακα κατάστασης:

Μέθοδος 1η:

Απευθείας υπολογισμός από τη σχέση $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

Η μέθοδο αυτή είναι δύσκολη όταν ο πίνακας A έχει διαστάσεις μεγαλύτερες από 3×3 εξαιτίας της δυσκολίας αντιστροφής του πίνακα : $(sI-A)$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης για το σύστημα

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

Με

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Και να υπολογίσετε το διάνυσμα κατάστασης

Αρχικά σχηματίζουμε τον πίνακα : $(sI - A)$

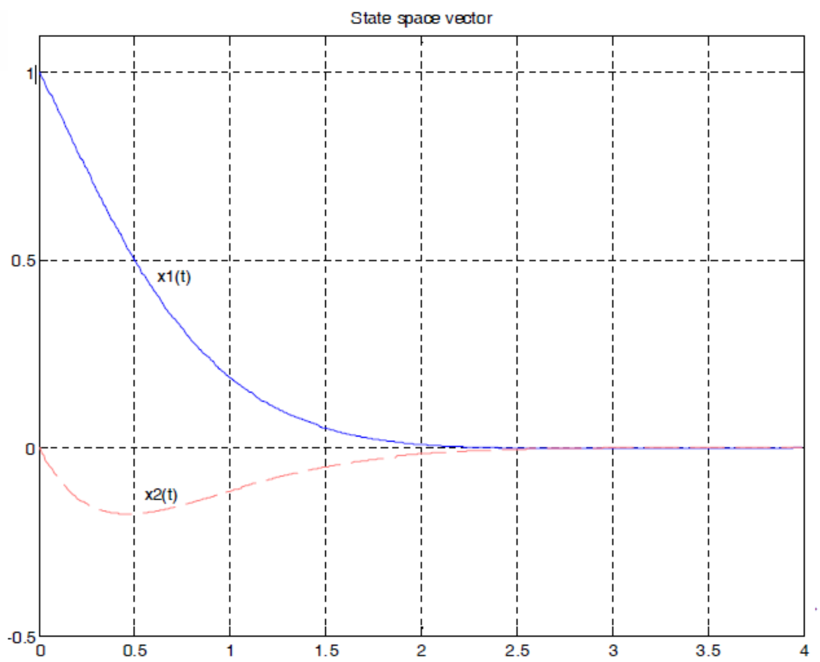
$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$, οπότε ο μεταβατικός πίνακας κατάστασης θα είναι:

$$\Phi(t) = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}(\cos t + \sin t) & 2e^{-2t}\sin t \\ -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}$$

Και το διάνυσμα κατάστασης ισούται με :

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t}(\cos t + \sin t) & 2e^{-2t}\sin t \\ -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t}(\cos t + \sin t) \\ -e^{-2t}\sin t \end{bmatrix}$$



Εικόνα 3.3.1

Εικόνα 3.3.1 Έξοδος διανύσματος κατάστασης.

Η χρονική μορφή του διανύσματος κατάστασης φαίνεται στο σχήμα. Είναι φανερό πως η ελεύθερη απόκριση του συστήματος στις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες προοδευτικά μηδενίζεται. Για τον υπολογισμό του μεταβατικού πίνακα κατάστασης στη Matlab χρειάζεται η χρήση του symbolic math toolbox

Εντολές:

Syms t (για τον ορισμό της t ως συμβολική μεταβλήτη)

Phi=expm(A*t); (όπου ο A έχει οριστεί σύμφωνα με τις τιμές που δόθηκαν στην εκφώνηση του παραδείγματος σαν πίνακας)

Μέθοδος 2η:

Υπολογισμός από τη σχέση $\Phi(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$ με τη βοίθεια του αλγορίθμου του Leverrier ο οποιός χρησιμοποιείται για την αντιστροφή του πίνακα: $(sI-A)$

$$\Phi(t)=L^{-1}\{\Phi(s)\} \quad \text{όπου: } \Phi(s)\frac{s^{n-1}F_1+s^{n-2}F_2+...+sF_{n-1}+F_n}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_{n-1}s+a_n}$$

Και οι πίνακας F_i και οι συντελεστές a_i υπολογίζονται επαναληπτικά από τις σχέσεις:

$$F_1=I \quad a_1=-ίχνος AF_1$$

$$F_2=AF_1+a_1I \quad a_2=-\frac{1}{2}\,ίχνος\left(AF_2\right)$$

$$F_n=AF_{n-1}+a_{n-1}I \quad a_n=-\frac{1}{2}ίχνος\left(AF_n\right)$$

Ο αλγόριθμος Leverrier αναπτύχθηκε για ευκολία υπολογισμού του αντίστροφου του πίνακα $(sI-A)$ μέσω υπολογιστή.

Μέθοδος 3η:

Η τελευταία μέθοδος για τον υπολογισμό του μεταβατικού πίνακα κατάστασης βασίζεται στη σχέση:

$$\Phi(t) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + ...$$

και είναι καθαρά προγραμματιστική. Επειδή η παραπάνω σειρά έχει άπειρους όρους ο υπολογισμός του μεταβατικόυ πίνακα κατάστασης είναι προσεγγιστικός:

$$\hat{\Phi}(t) = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + ... + \frac{1}{k!}A^kt^k$$

Η γενική λύση των εξισώσεων κατάστασης

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Στοχεύει στον υπολγισμό και τη διεγερμένη απόκριση η οποία βασίζεται και αυτή στον μεταβατικό πίνακα κατάστασης και δίνεται από το συνελικτικό ολοκλήρωμα:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) \cdot x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\mathrm{t} - \tau)\,\mathrm{Bu}(\tau)\,dt$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω συνελικτικού ολοκληρώματος είναι δύσκολος για τις περισσότερες μορφές εισόδου (εξαίρεση αποτελούν η κρουστική και η βηματική συνάρτηση).

Ο απλούστερος τρόπος για την εύρεση του διανύσματος κατάστασης είναι η χρήση του μετασχηματισμού Laplace:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}\left(x(0) + BU(S)\right)$$

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το διάνυσμα κατάστασης για το σύστημα:

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύση:

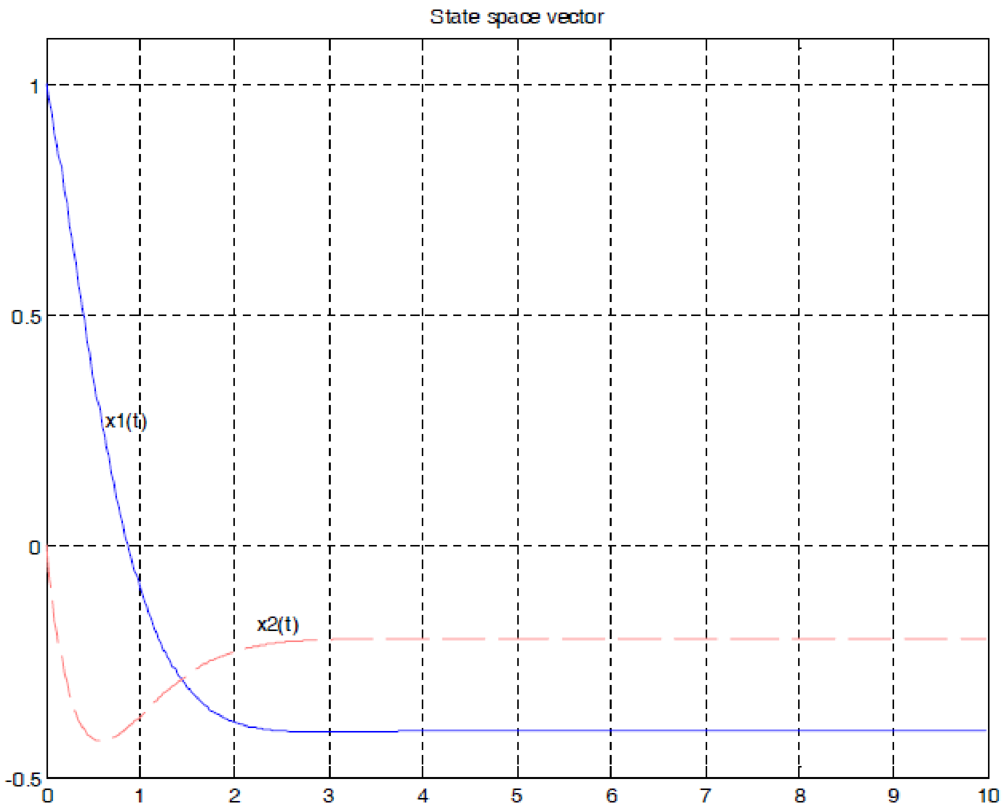
$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$X(s)=\Phi(s)\cdot\left(x(0)+BU(s)\right)=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}\right)$$

$$=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1/s \end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+4s+5}\begin{bmatrix} s+3-2/s \\ -1-(s+1)/s \end{bmatrix}$$

Οπότε τελικά:

$$x(t)=\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}e^{-2t}\left(7\cos t+9\sin t\right) \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5}e^{-2t}\left(\cos t+8\sin t\right) \end{bmatrix}$$



Εικόνα 3.3.2

Εικόνα 3.3.2 Έξοδος διανύσματος κατάστασης.

Κεφάλαιο 4ο Εφαρμογή των ιδιοτιμών στον προσδιορισμό των πόλων ενός MIMO-συστήματος

4.1 Εισαγωγή

Ένα σύστημα πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξοδών, γνωστό και ως σύστημα MIMO (multiple input-multiple output), περιγράφεται από τη σύναρτηση μεταφόρας γνωστή και ως $H(s)$ οπώς αναλύσαμε στο κεφάλαιο 3.1.

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει ρητή μορφή και προδιορίζει τα μηδενικά και τους πόλους του συστήματος οι οποίοι είναι οι ρίζες στον Αριθμητή και τον Παρονομαστή αντίστοιχα.

Στα μαθηματικά, επεξεργασία σήματος και θεωρία ελέγχου, ένας πόλος-μηδενικό είναι μια γραφική αναπαράσταση μιας ορθολογικής συναρτήσεως μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο το οποίο βοηθά να μεταφέρουν ορισμένες ιδιότητες του συστήματος.

Ένα διάγραμμα με πόλους-μηδενικά δείχνει τη θέση στο μιγαδικό επίπεδο των πόλων και μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς ενός δυναμικού συστήματος, όπως έναν ελεγκτή, φίλτρο, ή το κανάλι επικοινωνιας. Κατά συνθήκη, οι πόλοι του συστήματος συμβολίζονται με ένα X στο διάγρμμα, ενώ τα μηδενικά υποδεικνύονται από ένα κύκλο η O.

Εμάς αυτό που μας ενδιαφέρει, και θα εξετάσουμε είναι οι πόλοι στα συστήματα πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων.

4.2 MIMO πόλοι

Γνωρίζοντας τι είναι πόλος και τα σύστηματα πολλαπλών εισόδων και πολλαπλών εξόδων (MIMO systems) αυτό που μπόρουμε να πούμε για τον συσχετισμό των πόλων με την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι ότι :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Πρέπει να είναι ανάμεσα στις ιδιοτιμές του A , διότι ο παρονομαστής στην $H(s)$ είναι όλα τα $a(s) = \det(sI - A)$, εκτός των τιμών ανάμεσα στην $a(s)$ και την $C(adj[sI - A])B$.

Στην ουσία, οι πόλοι της $H(s)$ πρέπει να συμπεριλαμβάνονται μεταξύ των παρατηρίσιμων και προσβάσιμων ιδιοτιμών του A, καθώς το παρατηρίσιμο και προσβάσιμο μέρος της υλοποιήσης συνησφέρει στην σύναρτηση μεταφοράς. Πιο συγκεκριμένα αυτό που θα δείξουμε είναι ότι οι πόλοι της $H(s)$ είναι ακριβώς ίσοι, τόσο στο χώρο και στην πολλαπλότητα, με τις ιδιοτιμές του A.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ελάχιστης υλοποιήσης της $H(s)$, την οποία μπορούμε να την αναφέρουμε σαν πολυώνυμο πόλου, είναι ίση με το ελάχιστο κοίνο πολλαπλάσιο του παρονομαστή όλων των πιθανών ελάσσων (από όλα τα μεγέθη) στη $H(s)$.

Παράδειγμα 1ο :

Έστω πίνακας $2x2$ $H_1(s)=\begin{bmatrix} 1/s+3 & 1 \\ 0 & 1/s+3 \end{bmatrix}$

Η μοναδική πολική συχνότητα του παραπάνω πίνακα είναι στο -3. Η μεγαλύτερη πολλαπλότητα αυτού του πόλου στον ελάσσων πίνακα 1×1 είναι το 1, και η μεγαλύτερη στον ελάσσων 2×2 είναι το 2. Για αυτό το λόγο η πολλαπλότητα του πόλου στο -3 είναι το 1 και $2-1=1$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ελάχιστης υλοποίησης της $H_1(s)$ είναι $(s+3)^2$.

Παράδειγμα 2ο :

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την συνάρτηση μεταφοράς

$$H_s(2)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

Η πολική συχνότητα είναι πάλι στο -3. Η μεγαλύτερη υλοποιήση αυτού του πόλου (δηλαδή το -3) στον ελάσσων 1×1 είναι το 1, και στον 2×2 δευτερεύων εξαλείφεται. Για αυτό ο πόλος στο -3 έχει υλοποίηση μόνο το 1 , και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ελάχιστης υλοποίησης της $H_s(s)$ είναι απλά το $(S+3)$.

(Σε αυτό το σημείο να τονίσουμε ότι τα δύο προαναφέρομενα παραδείγματα,όπως και το επόμενο που ακολουθεί, μπορούν να επαληθεφτούν με την μέθοδο του Gilbert)

Παράδειγμα 3ο :

$$H_3(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)(s+3)^2} & \frac{1}{(s-1)^2(s+3)} \end{bmatrix}$$

Ο συγκεκριμένος πίνακας μεταφόρας έχει πόλο στο 1 με πολλαπλότητα 2, και έναν πόλο στο -3 ξανά με πολλαπλότητα 2 . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ελάχιστης υλοποίησης της $H_3(s)$ είναι $(s-1)^2(s+3)^2$

Κεφάλαιο 5ο Εισαγωγή στο ψευδοφάσμα

5.1 Γενική εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε το ψευδοφάσμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, $\sigma_{\varepsilon}(A)$, για δεδομένο $\varepsilon > 0$. Θα δούμε πως το σύνολο αυτό «διαστέλλεται» καθώς η παράμετρος ε αυξάνει, αλλα και τις ιδιότητες του σε σχέση με τις ιδιότητες του A. Σημειώνουμε ότι το ψευδοφάσμα ορίζεται μόνο για νόρμες πινάκων που επάγονται από νόρμες διανυσμάτων.

Έστω ένας πίνακας A $\nu\times\nu$, και το $\Lambda(A)$ δηλώνει το φάσμα του δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του, ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$. Τα ψευδοφάσματα το A είναι εγκιβωτισμένα υποσύνολα του $\mathbb{C}$ που επεκτείνονται για να συμπληρώσουν το επίπεδο καθώς $\varepsilon \to \infty$.

Για ένα δεδομένο $\varepsilon > 0$, το ψευδοφάσμα ενός $\nu\times\nu$ μιγαδικού πίνακα A είναι το σύνολο όλων των ιδιοτιμών όλων των πινάκων που απέχουν από τον A απόσταση (κατά νόρμα) μικρότερη ή ίση του ε .

Ορισμός : Για κάθε $\varepsilon \geq 0$, το ε-ψευδοφάσμα $\Lambda_{\varepsilon}(A)$ του A είναι το σύνολο των αριθμών $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν οποιαδήποτε από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

- $\left\|(zI - A)^{-1}\right\| \geq \varepsilon^{-1}$
- $\sigma_{\min}(zI - A) \leq \varepsilon$
- $\|(A - zI)u\| \leq \varepsilon$ για κάποιο διάνυσμα u με $\|u\| = 1$
- z είναι μια ιδιοτιμή του $A + E$ για κάποιον πίνακα E με $\|E\| \leq \varepsilon$

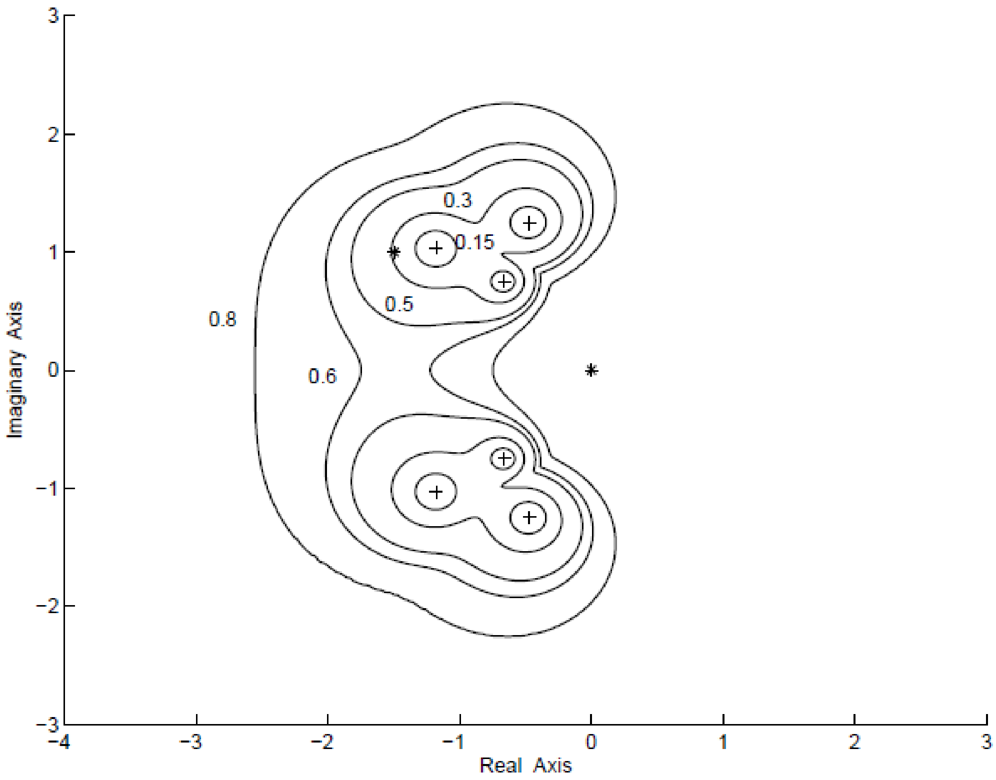
5.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο : Τα όρια του ε-ψευδοφάσματος ενός πολυωνιμικού πίνακα

$$H(\lambda)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix}1.75&0&0\\0&7.5&0\\0&0&5\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}3.5&1&0\\1&8&1\\0&1&4\end{bmatrix},$$

Για $\varepsilon = 0.15,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.8$ και $w=\{1,1,1\}$ όπου ε = epsilon και w = σείρα των αντίστοιχων υψών. Οι ιδιοτιμές της $H(\lambda)$, $-0.4710\pm i1.2448$, $-1.1794\pm i1.0335$, $-0.6621\pm i0.7491$, φένονται στο σχήμα με το σύμβολο του σταυρού «$+$». Οι περιοχές που είναι μαρκαρισμένες με αστερίσκο δεν ανήκουν στο $\sigma_{0.8,\mathrm{w}}(H)$. Για την απόσταση $dist\left(0,\sigma_{0.8,w}(H)\right)$, παίρνουμε ως δεδομένο ότι $r_1=1.3080$.

Στην συνέχεια παίρνουμε το σημείο $\lambda_0=-1.5+i$ (και αυτό μαρκαρισμενό με αστερίσκο), το οποιό είναι εσωτερικό σημείο της $\sigma_{0.8,\mathrm{w}}(H)$ και πληρεί $|\lambda_0|=1.8028$. Για την απόσταση $dist\left(-1.5+\mathrm{i},\vartheta\sigma_{0.8,w}(H)\right)$, παρατηρούμε ότι $r_2=r=1.1110$.



Εικόνα 5.01

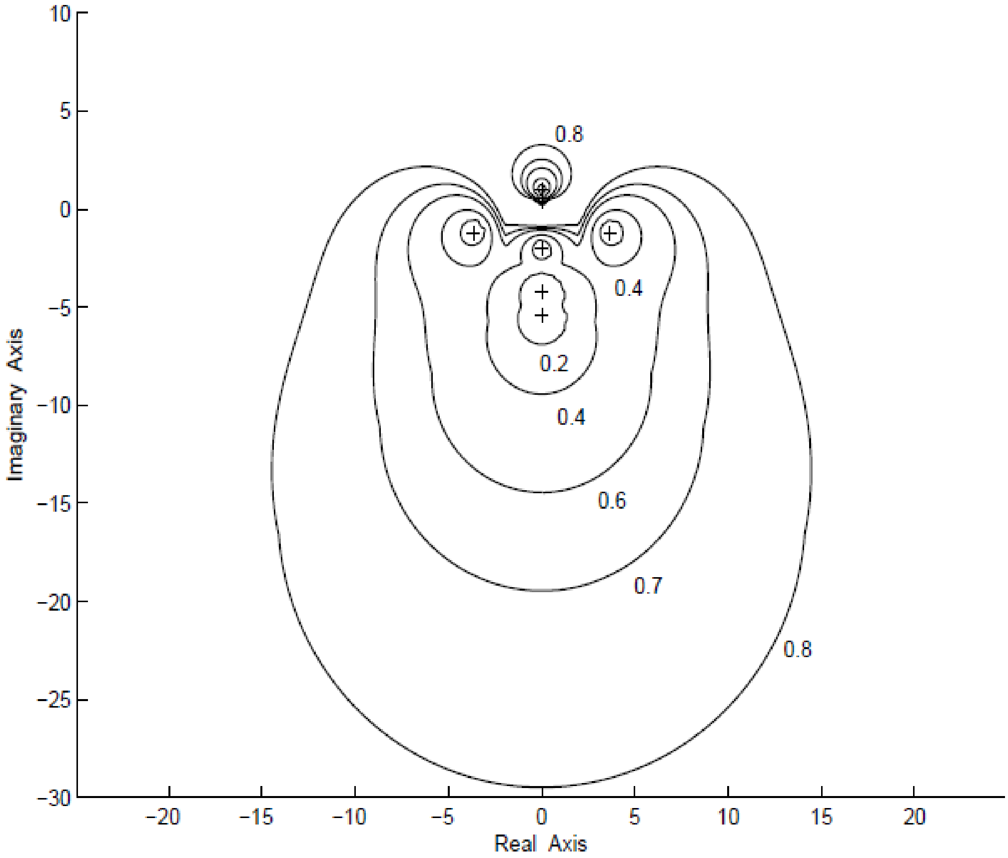
Εικόνα 5.01 : Το ψευδοφάσμα $\sigma_{\varepsilon,w}(H)$ με $\varepsilon = 0.15,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.8$.

Παράδειγμα 2ο : Ένας πολυωνιμικός πίνακας 20×20

$$P(\lambda) = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0$$

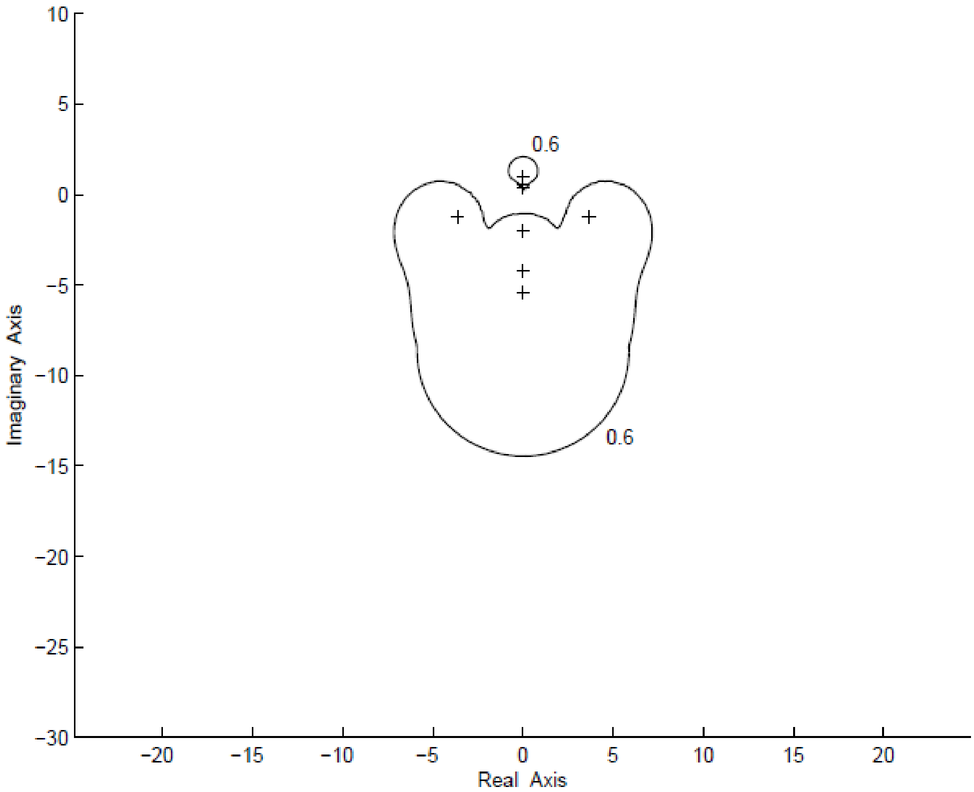
$$= I\lambda^2 + i\begin{bmatrix} I_{10} & 0 \\ 0 & 5I_{10} \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Τα όρια του ε-ψευδοφάσματος της $P(\lambda)$ για $\varepsilon = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,$ και $w = \{1,1,1\}$ τα βλέπουμε στην εικόνα 2 και τα όρια $\partial\sigma_{0.6,w}(P)$ στην εικόνα 3.



Εικόνα 5.02

Εικόνα 5.02 : Ψευδόφασμα ενός γυροσκοπικού συστήματος.



Εικόνα 5.03

Εικόνα 5.03 : Ψευδόφασμα ενός γυροσκοπικού συστήματος.

Παράδειγμα 3ο : Ένας 50×50 Πολυωνιμίκος πίνακας

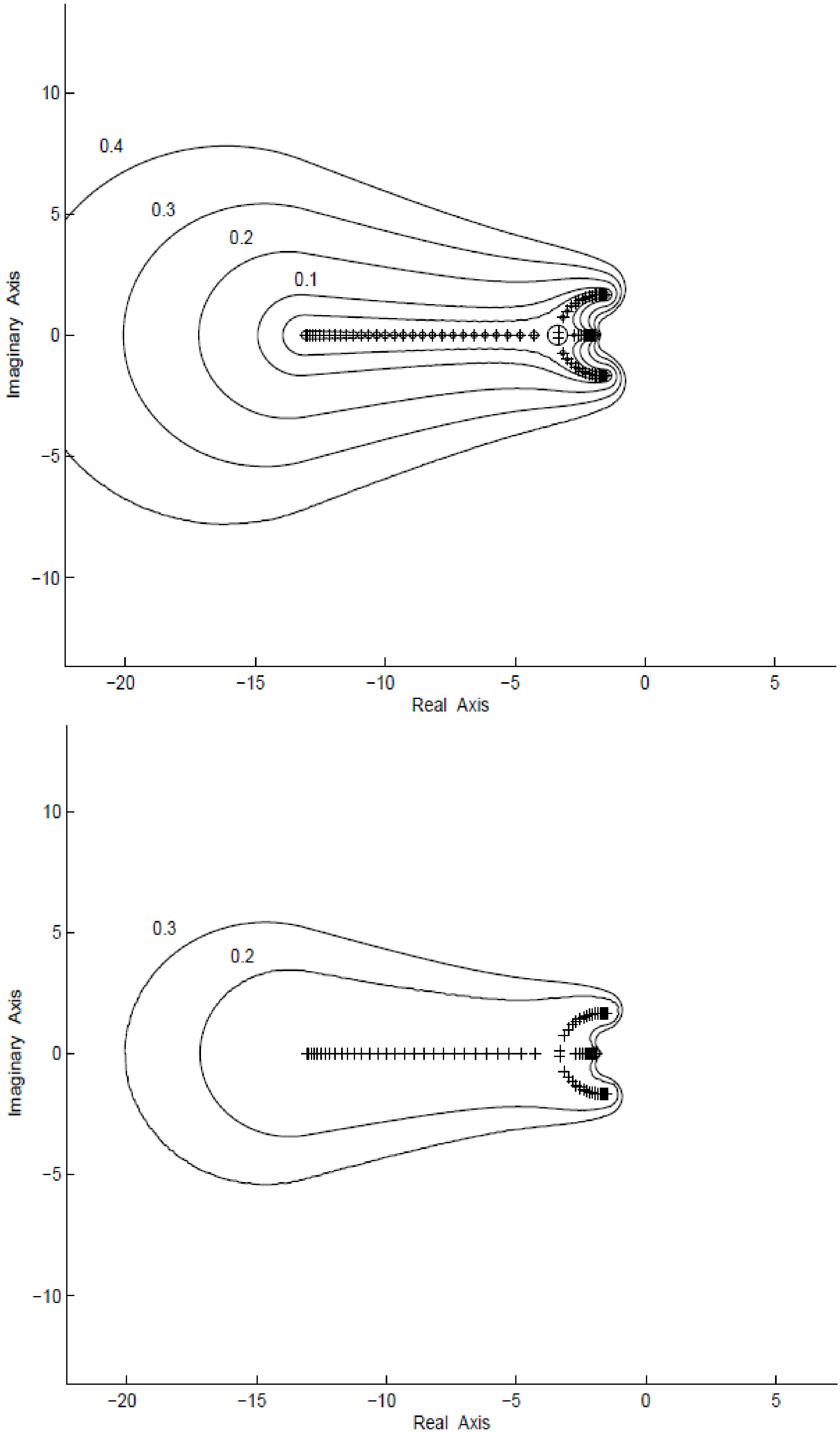
$$P(\lambda)=A_2\lambda^2+A_1\lambda+A_0 \Leftrightarrow$$

$$P(\lambda)=I\lambda^2+tridiag\{-3,9,-3\}\lambda+tridiag\{-5,15,-5\}$$

Το οποίο αντιστοιχεί σε ένα περιγραφόμενο σύστημα απόσβεσης μάζας-ελατηρίου $[18,19]$.

Τα όρια του ε-ψευδοφάσματος της $P(\lambda)$ με $w=\{1,1,1\}$ και $\varepsilon=0.0.1,\ 0.05,\ 0.1$

Εικόνα 4,5 Ψευδοφάσμα ενός σύστηματος μάζας-ελατηρίου


0.4
0.3
0.2
0.1
Imaginary Axis
Real Axis
10
5
0
-5
-10
-20
-15
-10
-5
0
5
0.3
0.2
Imaginary Axis
Real Axis

Εικόνα 5.04,5

Εικόνα 5.04,5 : Ψευδόφασμα απόσβεσης μαζάς-ελατηρίου.

5.2 Το γραμμικό σύστημα

Από την εργασία “Central manifold theory for the generalized equation of Kirchhoff string on R^N” υπάρχει το γραμμικοποιημένο σύστημα της μορφής $u_{tt} = -\left\| A^{1/2} u \right\|_H A_u - \delta A_{u_1} + f'(u)u$.

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε τη σταθερότητα της αρχικής λύσης $u=0$ με $f'(0) \neq 0$. Η γραμμική εξίσωση του συστήματος γύρω από τη λύση u είναι

$$u_{tt} = -\left\| A^{1/2} u \right\|_H A_u - \delta A_{u_1} + f'(u)u \quad (5.1)$$

Στην περίπτωση που το $u=0$, η εξίσωση (5.1) γίνετε

$$u_{tt} + \delta A u_t - f'(0)u = 0 \quad (5.2)$$

Θέτωντας $u_t = w$, η εξίσωση (5.2) παίρνει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \delta A & -f'(0) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Όπου

δ : μία απόσβεση

f : εξωτερική επίδραση (διέγερση).

Ή

$$\overline{u}_t + A\overline{u} = 0 \ , \quad (5.3)$$

Όπου

$$\overline{u}_t = (w, \mathrm{u})^T \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} \delta A & -f'(0) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Συμπερασματικά, για να μελετήσουμε τη σταθερότητα της λύσης, μελετάμε το φάσμα με παράγοντα A. Για μεταγενέστερη χρήση δηλώνουμε τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 5.1. Έστω $\wp$ ένας τομεακός γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Banach X , και έστω $f : U \to X$, όπου U είναι μια κυλινδρική γειτονία στο $R^N \times X^\delta$, (για κάποιο $\delta > 0$). Επίσης, έστω x_0 ένα σημείο ισορροπίας. Ας υποθέσουμε

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + B_z + g(t, z),$$

όπου B είναι ένας οριακός γραμμικός χάρτης από το X^{δ} έως το X και

$\|g(t,z)\| = O(\|z\|_{\delta})$ αφού $\|z\|_{\delta} \to 0$, ομοιόμορφα στο t, και $f(t,x)$ είναι τοπικά Holder συνεχής στο t, τοπίκα Lipschitzian στο x στο U.

Εάν το φάσμα του $L = A - B$ βρίσκεται στο $\{\operatorname{Re}\lambda > \beta\}$, για κάποιο $\beta > 0$, για παράδειγμα, $\sigma(L) \subset \{\operatorname{Re}\lambda > \beta\}$, ή ισοδύναμα εάν η γραμμικοποίηση

$$\frac{dz}{dt} + Az = Bz$$

είναι ομοιόμοργα ασυμπτωτικά σταθερή, τότε η αρχική εξίσωση έχει λύση x_0 ομοιόμορφα ασυμπτωτικά σταθερό στο X^{δ} .

Θεώριμα 5.2. Έστω A, f σαν το **θεώρημα 5.1.**. Υποθέστε επίσης ότι $Ax_0 = f(t, x_0)$ για $t \geq t_0$, όπου

$$f(t, x_0 + z) = f(t, x_0) + Bz + g(t, z) \qquad g(t, 0) = 0 \ ,$$

$$\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho)\|z_1 - z_2\|_{\delta}$$

$\|z_1\|_{\delta} \leq \rho$, $\|z_2\|_{\delta} \leq \rho$, και $k(\rho) \to 0$, $\rho \to 0^+$.

Αν $L = A - B$ υποθέσουμε $\sigma(L) \cap \{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$ είναι ένα μη-κενό φασματικό σύνολο. Τότε η λύση ισορροπίας x_0 είναι ασταθές.

Έστω το παρακάτω σύστημα :

$$\begin{cases} \delta\lambda_j\varphi_j - f'(0)\psi_j = \mu_J\varphi_j, \\ -\varphi_j = \mu_j\psi_j, \end{cases}$$

Ή

$$\begin{bmatrix} \delta\lambda_j & -f'(0) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_j \\ \psi_j \end{bmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό το βρήκαμε μετά από απόδειξη, του οποίου υπάρχει η λύση της απόδειξης στο “Central manifold theory for the generalized equation of Kirchhoff string on R^N”

Επομένως, για να βρούμε τις ιδιοτιμές του A, υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, για παράδειγμα :

$$\begin{vmatrix} -\delta\lambda_j + \mu_j & f'(0) \\ 1 & \mu_j \end{vmatrix} = 0$$

Ή ισοδύναμα

$$\mu_j^2 - \delta\lambda_j\mu_j - f'(0) = 0.$$

Παραδείγματα :

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου 5.2, το $\delta > 0$ περιγράφει μια απόσβεση έναντι της f' το οποίο περιγράφει μια εξωτερική επίδρασή ή αλλιώς μια εξωτερική διέγερση.

Η εξίσωση $\mu_j^2 - \delta\lambda_j\mu_j - f'(0) = 0$ είναι της μορφής

$$P(z) = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \cdots + A_1 z + A_0$$

Διότι $\mu_j^2 - \delta\lambda_j\mu_j - f'(0) = 0 \Leftrightarrow \mu_j^2 I - (\delta\lambda_j I)\mu_j - f'(0) I = 0$.

Παράδειγμα 1ο :

Έστω η εξίσωση $\mu_j^2 I - (\delta\lambda_j I)\mu_j - f'(0) I = 0$ με

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\delta > 0 \Rightarrow \delta = 1$,

ιδιοτιμές λ τυχαίες τιμές, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ και

$f'(0) = 0$, οπότε ας πούμε ότι $-f'(0) = \begin{bmatrix} -f'(0) & 0 \\ 0 & -f'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

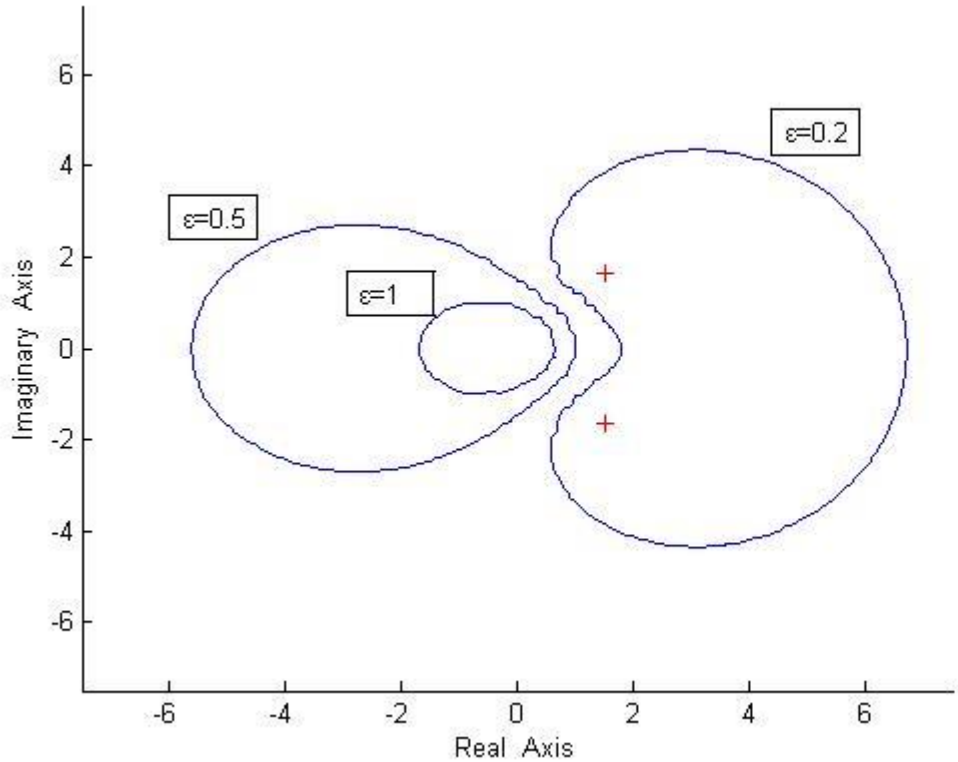
Να τονίσουμε ότι με τη χρήση του ψευδοφάσματος καλύπτουμε μια ευρύτερη περιοχή τιμών, όπου επίσης μπορεί να έχουμε μη-ευστάθεια λόγω προσεγγιστικών λαθών της γραμμικοποίησης.

Με την τεχνική εύρεσης του ψευδοφάσματος στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε με τη χρήση της Matlab να εντοπίσουμε γρήγορα την περιοχή των Ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένο συστήματος, παρακάμπτωντας την κλασσική διαδικασία

- Για $\lambda_1 = 1$ έχουμε.

Ορίσματα Matlab για να μπορούν τα αποτελέσματα να επιβεβεωθούν από τον καθέ ένα.

```
A0=[5 0;0 5];
A1=[-3 0;0 -3];
A2=[1 0;0 1];
Q={A0,A1,A2};
w=[1:3];
epsilons=[0.5,0.2,1];
xrange=[-30,30];
yrange=[-30,30];
hx=0.1;
hy=0.1
```



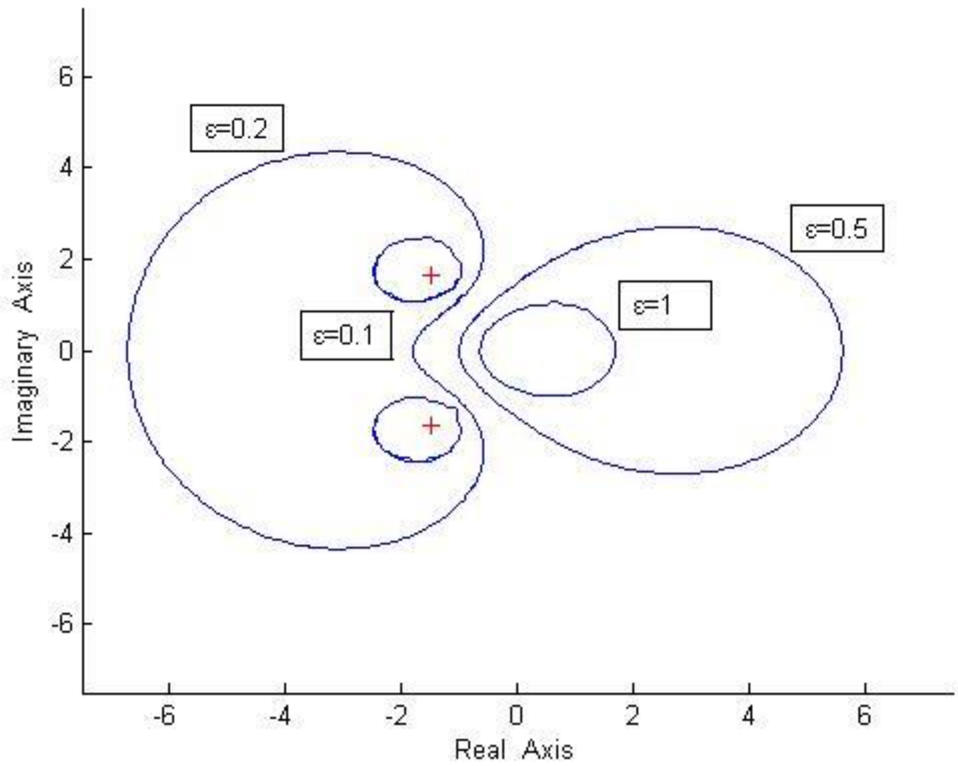
Εικόνα 5.2.1

Εικόνα 5.2.1 : Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με τύχαιο $\lambda_1 = 1$.

Η παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε είναι ότι καθώς το ε αυξάνεται θα περιμέναμε να αγκαλίαζει τις δύο ιδιοτιμές, έναντι παρατηρούμε ότι για $\varepsilon = 1$ αυτό δεν γίνεται, για $\varepsilon = 0.2$ υπάρχει αύξηση του ψευδοφάσματος.

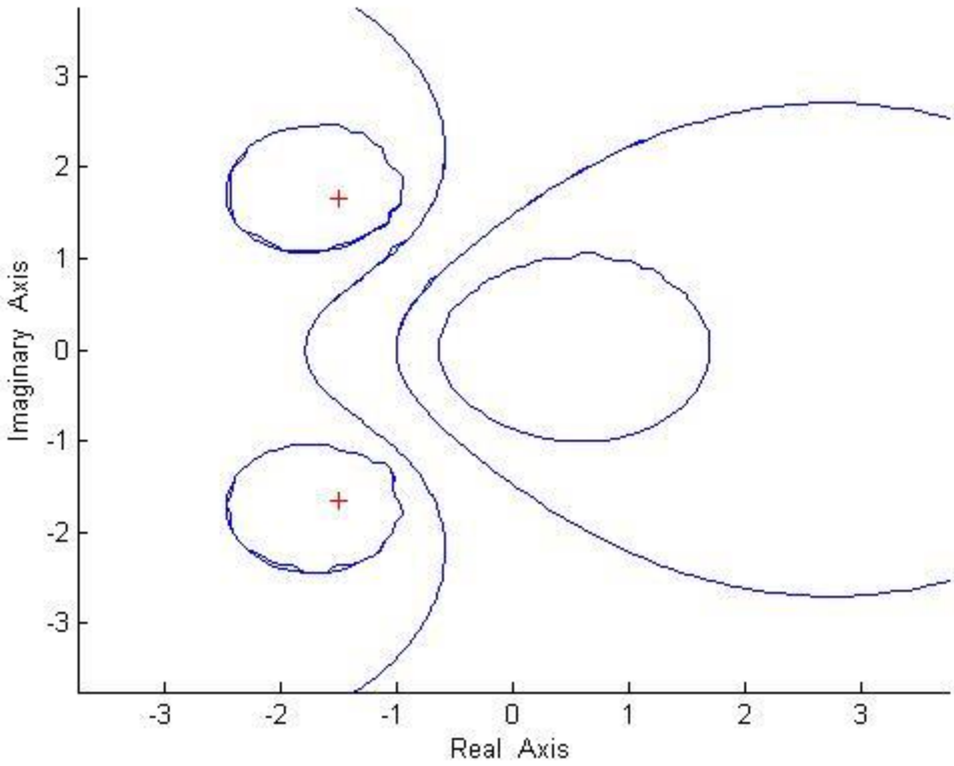
- Για $\lambda_2 = -1$έχουμε

```
A0=[5 0;0 5];
A1=[3 0;0 3];
A2=[1 0;0 1];
Q={A0,A1,A2};
w=[1:3];
epsilons=[0.1,0.2,0.5,1];
xrange=[-30,30];
yrange=[-30,30];
hx=0.1;
hy=0.1
```



Εικόνα 5.2.2

Εικόνα 5.2.2 Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με τύχαιο $\lambda_2 = -1$.



Εικόνα 5.2.2 μεγεθυμένη

Εικόνα 5.2.2 μεγεθυμένη : Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με τύχαιο $\lambda_2 = -1$ μεγενθυμένο.

Παρατήρουμε ότι το ψευδοφάσμα, παρόλο που αλλάξε κατά λίγο την τιμή του λ, το σχήμα φαίνετε πολύ διαφορετικό. Η συμμετρικότητα είναι εμφανής, και το σχήμα είναι ακριβώς αντίθετο με αυτό του σχήματος 5.2.1. Αυτό που μπορούμε να πούμε με ευκολία είναι ότι για $\varepsilon = 0.1$ στις ιδιοτιμές δημιουργείται ένας μικρός κύκλος που τις αγκαλίαζει. Η γενική παρατήρηση είναι ότι περιμέναμε για μικρές τιμές του ε να βρίσκονται κοντά στις ιδιοτιμές, και όσο μεγάλωνε το ε αυτό να αγκαλίαζει πιο συμμετρικά τις ιδιοτιμές με μαγαλύτερη ακτίνα κύκλου, το οποίο έγινε μόνο για $\varepsilon = 0.2$.

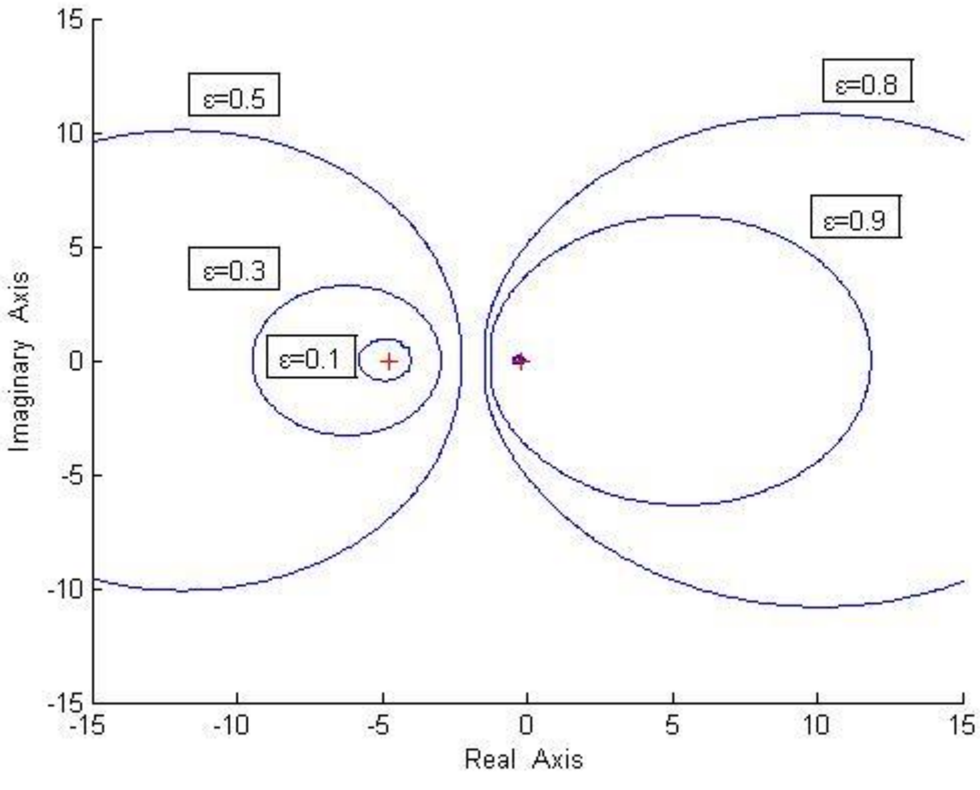
Παράδειγμα 2ο :

Σε αυτό το παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια εξίσωση, $\mu_j^2 I - (\delta\lambda_j I)\mu_j - f'(0)I = 0$, με άλλους παράγοντες ώστε να δούμε το φαινόμενο της αύξησης του ε με την ακτίνα του «κύκλου».

Δεδομένα είναι $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\delta > 0 \Rightarrow \delta = 1$, τύχαιο $\lambda = 1$, $A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ και $-f'(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Όποτε σαν είσοδο δεδομένων στο Matlab έχουμε :

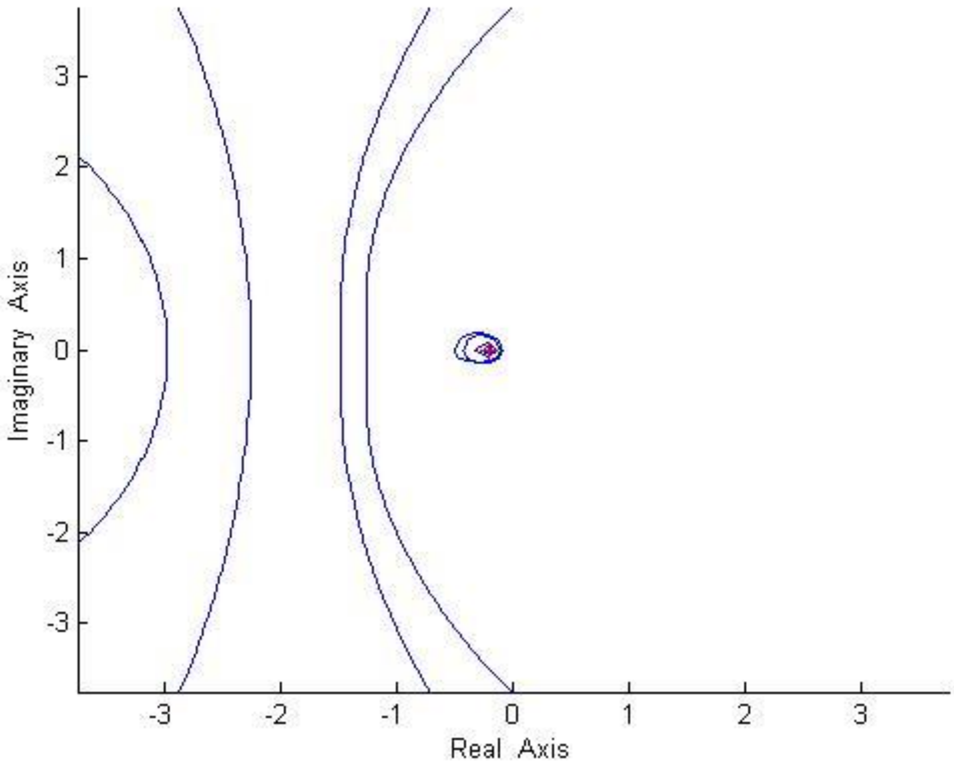
```
A0=[2 0;0 2];
A1=[10 0;0 10];
A2=[2 0;0 2];
Q={A0,A1,A2};
w=[1:3];
epsilons=[0.1,0.5,0.8,0.9];
xrange=[-30,30];
yrange=[-30,30];
hx=0.1;
hy=0.1
```



Εικόνα 5.2.3

Εικόνα 5.2.3 Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με τύχαιο $\lambda = 1$.

Η παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε είναι, πέραν της συμμετρικότητας των δύο ιδιοτιμών, ότι καθώς το ε αυξάνεται βλέπουμε ότι οι «κύκλοι» που περιβάλλουν τις ιδιοτιμές αυξάνονται και αυτές σε διάμετρο ακτίνας κύκλου.



Εικόνα 5.2.3 μεγενθυμένη

Εικόνα 5.2.3 μεγενθυμένη Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με τύχαιο $\lambda = 1$.

Παράδειγμα 3ο :

Σε αυτό το παράδειγμα θα πάρουμε μια άλλη εξίσωση, με περισσότερες ιδιοτιμές ώστε να δούμε τι γίνετε αν έχουμε τρείς, τεσσέρεις ή και πέντε ιδιοτιμές στο ίδιο σχήμα.Σκόπος μας είναι πάντα να βρούμε το ψευδοφάσμα των ιδιοτίμων αυτών.

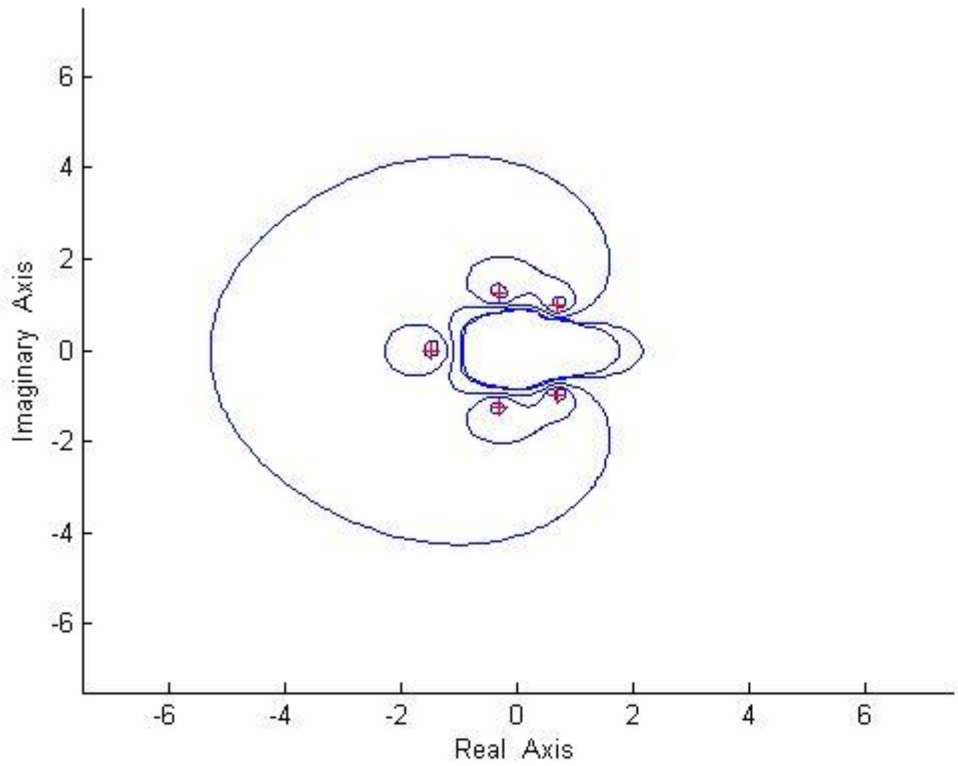
Έστω εξίσωση $P(z) = A_5 z^5 + A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0$ όπου

$$A_0 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Τα ορίσματα που θα δώσουμε στο Matlab είναι :

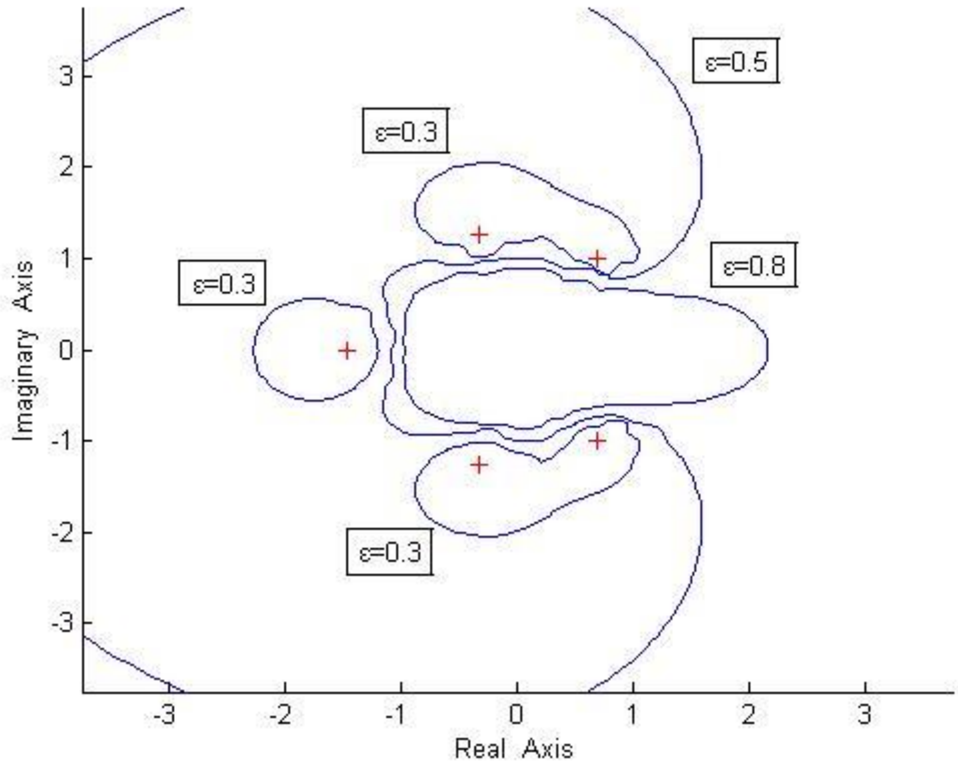
```
A0=[15 0;0 15];
A1=[2 0;0 2];
A2=[8 0;0 8];
A3=[5 0;0 5];
A4=[3 0;0 3];
A5=[4 0;0 4];
Q={A0,A1,A2,A3,A4,A5};
```

```
w=[1:6];
epsilons=[0.1,0.3,0.5,0.8,0.9];
xrange=[-30,30];
yrange=[-30,30];
hx=0.1;
hy=0.1
```



Εικόνα 5.2.4

Είκονα 5.2.4 Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με πέντε ιδιοτιμές.



Εικόνα 5.2.4 μεγεθυμένη

Είκονα 5.2.4 μεγεθυμένη Ψευδοφάσμα γραμμικοποιημένου συστήματος με πέντε ιδιοτιμές.

Η συνάρτηση c=pseinout(Q,w,epsilons,xrange,yrange,hx,hy) στο Matlab εκτιμά το φάσμα, και για αρκέτα ε τα όρια του ε- ψευδοφάσματος ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα.

Ανακεφαλαίωση

Κατά την παρούσα εργασία εξετάσαμε τα παρακάτω πεδία και τη συσχέτιση μεταξύ τους

- Κλασσική θεωρία Ιδιοτιμών
- Εφαρμογές στα Γραμμικά Συστήματα
- Επέκταση των Ιδιοτιμών με τη θεωρία του Ψευδοφάσματος
- Υπολογιστική χρήση του Ψευδοφάσματος για προσεγγιστική λύση προβλημάτων Ιδιοτιμών

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το θεωρητικό «εργαλείο»των Ιδιοτιμών έχει πληθώρα εφαρμογών

- Ιδιοτιμές γεωμετρικών μετασχηματισμών
- Ιδιοπρόσωπα
- Μοριακά τροχιακά
- Γεωλογία και παγολογία
- Ανάλυση δόνησης

Στην παρούσα εργασία επικεντρώσαμε στα γραμμικά και τα γραμμικοποιημένα συστήματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, Gilbert Strang, ΠΕΚ (2010)
2. Α. Βελώνη, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου – Ανάλυση και Προσομοίωση, Τζιόλας (2011)
3. P. Papadopoulos, N. Stavrakakis, Central manifold theory for the generalized equation of Kirchhoff strings on R^n , Nonlinear Analysis, 61 (2005), 1343-1362
4. Ανάλυση Πινάκων , Διαταραχές Ιδιοτιμών και Ψευδοφάσμα Πίνακα Παναγιώτης Ψαρράκος. Open E-Class Notes ocw-aoc.ntua.gr
5. S. Fatouros, P. Psarrakos, “An improved grid method for the computation of the pseydospectra of matrix polynomials”, Mathematical and Computer Modelling, 49 (2009), 55-65