

**ΑΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ Τ.Τ.  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΦΟΡΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ Τ.Ε.**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Θεωρία του Χάους**

**Άννα Ντέτς**

**Εισηγήτρια: Βελώνη Αναστασία**

**ΑΙΓΑΛΕΩ  
ΜΑΪΟΣ 2019**

(Κενό φύλλο)

Θεωρία του Χάους

**Θεωρία του Χάους**

**Άννα Ντέτς**

**A.M. 34172**

**Εισηγήτρια:**

**Βελώνη Αναστασία**

**Εξεταστική Επιτροπή: Βελώνη Αναστασία, Έλληνας Ιωάννης, Φατούρος Σταύρος.**

(Κενό φύλλο)

**ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

Άννα Ντέτζ  
3

Η κάτωθι υπογεγραμμένη Άννα Ντέτς, του Γιάτσεκ, με αριθμό μητρώου 34172 φοιτήτρια του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ Συστημάτων Τ.Ε. του Α.Ε.Ι. Πειραιά Τ.Τ. πριν αναλάβω την εκπόνηση της Πτυχιακής Εργασίας μου, δηλώνω ότι ενημερώθηκα για τα παρακάτω:

«Η Πτυχιακή Εργασία (Π.Ε.) αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο του συγγραφέα, όσο και του Ιδρύματος και θα πρέπει να έχει μοναδικό χαρακτήρα και πρωτότυπο περιεχόμενο.

Απαγορεύεται αυστηρά οποιοδήποτε κομμάτι κειμένου της να εμφανίζεται αυτούσιο ή μεταφρασμένο από κάποια άλλη δημοσιευμένη πηγή. Κάθε τέτοια πράξη αποτελεί προϊόν λογοκλοπής και εγείρει θέμα Ηθικής Τάξης για τα πνευματικά δικαιώματα του άλλου συγγραφέα. Αποκλειστικός υπεύθυνος είναι ο συγγραφέας της Π.Ε., ο οποίος φέρει και την ευθύνη των συνεπειών, ποινικών και άλλων, αυτής της πράξης.

Πέραν των όποιων ποινικών ευθυνών του συγγραφέα σε περίπτωση που το Ίδρυμα του έχει απονείμει Πτυχίο, αυτό ανακαλείται με απόφαση της Συνέλευσης του Τμήματος. Η Συνέλευση του Τμήματος με νέα απόφασής της, μετά από αίτηση του ενδιαφερόμενου, του αναθέτει εκ νέου την εκπόνηση της Π.Ε. με άλλο θέμα και διαφορετικό επιβλέποντα καθηγητή. Η εκπόνηση της εν λόγω Π.Ε. πρέπει να ολοκληρωθεί εντός τουλάχιστον ενός ημερολογιακού δμήνου από την ημερομηνία ανάθεσης της. Κατά τα λοιπά εφαρμόζονται τα προβλεπόμενα στο άρθρο 18, παρ. 5 του ισχύοντος Εσωτερικού Κανονισμού.»

(Κενό φύλλο)

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

## Θεωρία του Χάους

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ολοκληρώθηκε μετά από επίμονες προσπάθειες, σε ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο, όπως αυτό της Θεωρίας του Χάους . Την προσπάθειά μου αυτή υποστήριξε η επιβλέπων καθηγητριά μου, την οποία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Βελώνη Αναστασία για τις πολύτιμες συμβουλές της και την οικογένειά μου για την στήριξη και την υπομονή που μου έδειξε καθ'ολη την διάρκεια των σπουδών μου.

(Κενό φύλλο)

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**



Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με την θεωρία του χάους, η οποία θεωρείται μια από τις σημαντικότερες θεωρίες του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Η θεωρία αυτή ασχολείται κυρίως με τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, τα οποία έχουν μια πολύ ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές τους συνθήκες. Με την πάροδο του χρόνου τα συστήματα αυτά μπορούν να παράγουν εντελώς απρόβλεπτες και χαοτικές συμπεριφορές. Στην χαοτική κίνηση, η ακολουθία των αριθμών που παράγει μία τροχιά δεν επαναλαμβάνεται ποτέ, ενώ όλες οι τροχιές, μετά από αρκετό χρόνο, συγκεντρώνονται τελικά σε μια περιοχή που αποτελεί τον ελκυστή του συστήματος, ο οποίος ονομάζεται παράξενος ελκυστής και είναι σύνολο fractal. Με τον όρο fractal καλείται ένα γεωμετρικό σχήμα που επαναλαμβάνεται αυτούσιο σε άπειρο βαθμό μεγέθυνσης και συχνά αναφέρεται ως απείρως πολύπλοκο. Το fractal παρουσιάζει επομένως την λεγόμενη αυτο-ομοιότητα επειδή όσες φορές και να μεγεθυνθεί, οποιοδήποτε τμήμα του θα συνεχίζει να παρουσιάζει ένα εξίσου περίπλοκο σχέδιο με μερική ή ολική επανάληψη του αρχικού. Η μελέτη της δυναμικής των μιγαδικών συναρτήσεων οδήγησε στην ανακάλυψη των συνόλων Julia, τα οποία είναι στην ουσία fractals και αποτελούνται από τιμές τέτοιες, ώστε μια αυθαίρετα μικρή διαταραχή μπορεί να προκαλέσει δραστικές αλλαγές στις τιμές μίας ακολουθίας, όταν αυτή επαναλαμβάνεται, και επομένως παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά. Η μελέτη των τετραγωνικών πολυωνύμων των μιγαδικών μεταβλητών οδήγησε στο σύνολο Mandelbrot, το οποίο διαθέτει fractal χαρακτηριστικά και κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί σε ένα σύνολο Julia. Πρόσφατα έχει ανακαλυφθεί ότι η θεωρία του χάους μπορεί να επεκταθεί και στην κβαντομηχανική, ενώ ήδη έχουν προταθεί πολλές εφαρμογές της θεωρίας του χάους σε μία πληθώρα τομέων, γεγονός που καταδεικνύει την σημασία της και τις σημαντικές προοπτικές περαιτέρω ανάπτυξης που αυτή διαθέτει.

## ABSTRACT

The present thesis concerns the theory of chaos, which is considered to be one of the most important theories of the 20th century. This theory deals mainly with non-linear dynamic systems, which have a very sensitive dependence on their initial conditions. Over time these systems can produce unpredictable and chaotic behaviour. In chaotic motion, the sequence of numbers that produces a trajectory is never repeated, and all trajectories, after some time, eventually gather in an area that is the trap of the system, called a strange attractor, that constitutes a fractal. The term fractal is used to define a geometric shape that repeats itself to an infinite degree of magnification and is often referred to as infinitely complex. The fractal therefore exhibits the so-called self-similarity due to the fact that any part of it will continue to present an equally complicated pattern with partial or total repetition of the original shape no matter how many times it is magnified. The study of the dynamics of complex functions has led to the discovery of the Julia sets, which are essentially fractals and consist of such values that an arbitrary small disturbance can cause drastic changes in the values of a sequence when it is repeated and thus exhibit chaotic behaviour. The study of square polynomials of complex variables has led to the Mandelbrot set, which possesses fractal features and each point of which corresponds to a specific Julia set. It has recently been discovered that chaos theory can extend to quantum mechanics, and many chaos theory applications have already been proposed in a number of areas, demonstrating the importance of chaos theory and its significant prospects for further development.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Θεωρία χάους

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: χάος, μη γραμμικά συστήματα, fractals, σύνολα Julia/Mandelbrot

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 15

1.1 Αντικείμενο της πτυχιακής εργασίας..... 16

1.2	Ιστορική αναδρομή.....	16
1.3	Δυναμικά και γραμμικά δυναμικά συστήματα.....	18
1.4	Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα.....	24
1.5	Μη χαοτικοί και χαοτικοί ελκυστές.....	26
1.6	Χαρακτηριστικά και παραδείγματα χαοτικών συστημάτων.....	29
1.7	Ευστάθεια σημείων ισορροπίας.....	39
1.8	Η απεικόνιση του χάους.....	41
1.8.1	Ορισμός της χαοτικής απεικόνισης.....	41
1.8.2	Εκθέτες Lyapunov.....	42
1.8.3	Προσδιορισμός εκθετών Lyapunov.....	49
1.8.4	Διαστάσεις των παράξενων ελκυστών.....	50
<b>2.</b>	<b>FRACTALS.....</b>	<b>52</b>
2.1	Εισαγωγή και ορισμός των fractals.....	52
2.2	Το σύνολο Cantor.....	54
2.3	Η καμπύλη Koch και το τετράγωνο Koch.....	55
2.4	Το τρίγωνο Sierpinski και το χαλί Sierpinski.....	59
2.5	Το σφουγγάρι Menger.....	62
2.6	Οι διαστάσεις των fractals.....	64
<b>3.</b>	<b>ΣΥΝΟΛΑ JULIA.....</b>	<b>70</b>
3.1	Εισαγωγή στα σύνολα Julia.....	70
3.2	Απεικονίσεις συνόλων Julia.....	72
3.3	Αλγόριθμος κατασκευής συνόλων Julia.....	80
3.4	Συνεκτικότητα των συνόλων Julia.....	82
3.5	Ιδιότητες και παραδείγματα συνόλων Julia.....	83
<b>4.</b>	<b>ΣΥΝΟΛΟ MANDELBROT.....</b>	<b>91</b>
4.1	Εισαγωγή στο σύνολο Mandelbrot.....	91
4.2	Αλγόριθμος κατασκευής συνόλου Mandelbrot.....	92
4.3	Χαρακτηριστικά και ιδιότητες του συνόλου Mandelbrot.....	94
<b>5.</b>	<b>ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ.....</b>	<b>102</b>
5.1	Εισαγωγή στην κβαντική μηχανική.....	102
5.2	Εισαγωγή στο κβαντικό χάος.....	103
5.3	Παραδείγματα κβαντικού χάους.....	105
<b>6.</b>	<b>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ.....</b>	<b>110</b>
6.1	Εφαρμογές σε φυσιολογία και ιατρική.....	110
6.2	Εφαρμογές στην κοσμολογία - αστρονομία.....	112

6.3 Εφαρμογές στην οικονομία.....	114
6.4 Εφαρμογές στην φιλοσοφία και λογική.....	116
6.5 Άλλες εφαρμογές.....	117
<b>7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>119</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>121</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Διανυσματικά πεδία και παραδείγματα τροχιών από επίλυση του δυναμικού συστήματος $dx/dt = -x$ .....	20
--	----

Σχήμα 1.2: Διανυσματικά πεδία και παραδείγματα τροχιών από επίλυση του δυναμικού συστήματος $dx/dt = x^2$ .....	20
Σχήμα 1.3: Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση των απλών πραγματικών ιδιοτιμών.....	22
Σχήμα 1.4: Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση της διπλής πραγματικής ιδιοτιμής.....	23
Σχήμα 1.5: Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών.....	23
Σχήμα 1.6: (A) Ο χώρος φάσεων ενός εκκρεμούς για μικρές αιωρήσεις (ολοκληρώσιμο σύστημα) και (B) ο χώρος φάσεων για ένα σύνολο μορίων ενός αερίου.....	26
Σχήμα 1.7: Φασικά πορτρέτα με οριακό σημείο, οριακό κύκλο και οριακό τόρο ως ελκυστές.....	27
Σχήμα 1.8: Φασικό πορτρέτο με παράξενο ελκυστή.....	28
Σχήμα 1.9: Μηχανικός ταλαντωτής με εξωτερική διέγερση.....	28
Σχήμα 1.10: Το πείραμα του Lorenz. Η διαφορά στις αρχικές τιμές των δύο καμπυλών είναι μόνο 0,000127.....	30
Σχήμα 1.11: Ελκυστής του Lorenz με βάση τις διαφορικές εξισώσεις (8) [10].....	32
Σχήμα 1.12: Ελκυστής του Rossler με βάση τις διαφορικές εξισώσεις (9) [].....	34
Σχήμα 1.13: Διπλό εκκρεμές με μάζες $m_1, m_2$ , μήκη $L_1, L_2$ και γωνίες από την κατακόρυφο $\theta_1, \theta_2$ .....	36
Σχήμα 1.14: Αρχική θέση του διπλού εκκρεμούς στην προσομοίωση με χρήση Matlab [13].....	37
Σχήμα 1.15: Ο χώρος φάσεων με την τροχιά των δύο μαζών του διπλού εκκρεμούς [13].....	37
Σχήμα 1.16: Οι γωνίες $\theta_1, \theta_2$ των δύο μαζών του διπλού εκκρεμούς συναρτήσει του χρόνου κατά την διάρκεια της προσομοίωσης [13].....	38
Σχήμα 1.17: Παραδείγματα ευστάθειας κατά Lyapunov ( $\alpha$ ) και ασυμπτωτικής ευστάθειας ( $\beta$ ).....	40
Σχήμα 1.18: Η λογιστική απεικόνιση $f_x$ με μπλε για $r = 2,9$ , ενώ φαίνονται τα δύο σημεία ισορροπίας $x_{0,1}$ και $x_{0,2}$ .....	44
Σχήμα 1.19: Η λογιστική απεικόνιση $f_x$ με μπλε και η απεικόνιση $f^2x$ για παράμετρο $r = 3,2$ .....	45
Σχήμα 1.20: Σχηματική απεικόνιση της διακλάδωσης διπλασιασμού περιόδου, όπου οι μπλε καμπύλες δηλώνουν ευσταθή περιοδικά σημεία ενώ οι κόκκινες ασταθή 46	
Σχήμα 1.21: Διάγραμμα διπλασιασμού περιόδου της λογιστικής απεικόνισης.....	47
Σχήμα 1.22: Εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης ευστάθειας για $r \in [2,5,4]$ .....	48
Σχήμα 2.1: Το σύνολο Cantor του μεσαίου τρίτου.....	55
Σχήμα 2.2: Η καμπύλη Koch και τα βήματα για την κατασκευή της.....	56
Σχήμα 2.3: Η χιονονιφάδα Koch και τα βήματα για την κατασκευή της.....	57
Σχήμα 2.4: Το τετράγωνο Koch και τα βήματα για την κατασκευή του.....	58
Σχήμα 2.5: Το τετράγωνο Sierpinski και τα βήματα 0-5 για την κατασκευή του [17]60	
Σχήμα 2.6: Το χαλί Sierpinski και τα βήματα 1-6 για την κατασκευή του [18].....	61
Σχήμα 2.7: Το σφουγγάρι Menger και τα βήματα 0-4 για την κατασκευή του [19] 63	

Σχήμα 2.8: Η άνω εικόνα απεικονίζει ροζ θόρυβο, ενώ η μεσαία και η κάτω αποτελούν μεγεθύνσεις της άνω και της μεσαίας εικόνας, αντίστοιχα.....	66
Σχήμα 3.1: Απεικόνιση της τροχιάς του $z$ για τις περιπτώσεις όπου το αρχικό σημείο $z_0$ βρίσκεται (α) εντός του μοναδιαίου κύκλου, (β) πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και (γ) εκτός του μοναδιαίου κύκλου.....	74
Σχήμα 3.2: Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του $c$ [25].....	77
Σχήμα 3.3: Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του $c$ [25].....	78
Σχήμα 3.4: Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του $c$ [25].....	79
Σχήμα 3.5: (α) Απεικόνιση του πλήρους συνόλου Julia για $c = -0.5 + 0.5i$ , καθώς και διαδοχικές μεγεθύνσεις τμημάτων αυτού στα (β) και (γ).....	81
Σχήμα 3.6: Απεικόνιση συνόλου Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για $c = i$ , γνωστό ως fractal δενδρίτης [25].....	83
Σχήμα 3.7: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του $c$ [25]	85
Σχήμα 3.8: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του $c$ [30]	86
Σχήμα 3.9: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του $c$ [30]	87
Σχήμα 3.10: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του $c$ [30]	88
Σχήμα 3.11: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του $c$ [30]	89
Σχήμα 3.12: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συναρτήσεις διαφορετικές της (40) [30].....	90
Σχήμα 4.1: Απεικόνιση του συνόλου Mandelbrot για $N=400$ επαναλήψεις του αλγορίθμου κατασκευής [30].....	93
Σχήμα 4.2: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia (α, β, γ) για τρία σημεία εντός του συνόλου Mandelbrot.....	96
Σχήμα 4.3: Απεικόνιση διαδοχικών μεγεθύνσεων του συνόλου Mandelbrot.....	97
Σχήμα 4.4: Αντιστοίχιση μεταξύ λογιστικής απεικόνισης και συνόλου Mandelbrot	100
Σχήμα 4.5: Διαδοχικές μεγεθύνσεις της γειτονιάς του $M$ για $c=i$ [Similarities].....	101
Σχήμα 4.6: Σύνολα Julia ευρισκόμενα στις άκρες του συνόλου Mandelbrot.....	101
Σχήμα 5.1: Ιστογράμματα κατανομής των ενεργειακών διαφορών γειτονικών επιπέδων στο μόριο του LiCN για (α) τα 29 χαμηλότερα επίπεδα και (β) τα επίπεδα 30-80.....	106
Σχήμα 5.2: Μεταβολές των δονητικών συχνοτήτων του LiCN ως προς τη διαταραχή της Χαμιλτονιανής.....	107
Σχήμα 5.3: Η δομή των κόμβων δύο κυματοσυναρτήσεων του LiCN: (α) κανονική και (β) χαστική.....	108
Σχήμα 5.4: Κβαντικές καταστάσεις σε αντιστοιχία με περιοδικές τροχιές για το μόριο HCP [farantos1996].....	109

## **1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΧΑΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

Η θεωρία του χάους θεωρείται μια από τις σημαντικότερες θεωρίες του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Πρόκειται για έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Ένα σύστημα είναι στην ουσία ένα σύνολο αλληλεπιδρώντων στοιχείων που αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύνολο. Το μη γραμμικό σημαίνει ότι λόγω ανατροφοδότησης ή πολλαπλασιαστικών αποτελεσμάτων μεταξύ των συστατικών

του συνόλου, το τελευταίο γίνεται κάτι μεγαλύτερο από την απλή άθροιση των επιμέρους τμημάτων. Τέλος, δυναμικό σημαίνει ότι το σύστημα αλλάζει με την πάροδο του χρόνου με βάση την τρέχουσα κατάστασή του [1].

Τα χαοτικά συστήματα μπορούν να περιέχουν πολύ λίγα αλληλεπιδραστικά συστατικά και αυτά μπορεί να ακολουθούν πολύ απλούς κανόνες, αλλά όλα αυτά τα συστήματα παρουσιάζουν μια πολύ ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές τους συνθήκες. Παρά τη ντετερμινιστική τους απλότητα, με την πάροδο του χρόνου τα συστήματα αυτά μπορούν να παράγουν εντελώς απρόβλεπτες και αποκλίνουσες (ή χαοτικές) συμπεριφορές. Ο Edward Lorenz, ο πατέρας της θεωρίας του χάους, περιέγραψε το χάος ως εξής: «Χάος: όταν το παρόν καθορίζει το μέλλον, αλλά το κατά προσέγγιση παρόν δεν καθορίζει κατά προσέγγιση το μέλλον» [2].

Η θεωρία του χάους φαίνεται να βρήκε απήχηση στην επιστημονική κοινότητα και έφερε ένα νέο ρεύμα ανανέωσης στις επιστήμες αλλά και σε πεδία έξω από αυτήν. Η ύπαρξη χαοτικών κινήσεων σε απλά μηχανικά συστήματα ανακαλύφθηκε μόλις στις αρχές του εικοστού αιώνα από τον Henri Poincare. Διαπιστώθηκε ότι το χάος επέρχεται σε μη γραμμικά συστήματα, τα οποία είναι ευαίσθητα στις αρχικές συνθήκες. Συνεπώς τεκμηριώθηκε ότι τα χαοτικά συστήματα συμπεριφέρονται όχι με τυχαίο τρόπο αλλά με χαοτικό που υπακούει σε κάποιες αρχές. Η αλματώδης ανάπτυξη του κλάδου των ηλεκτρονικών υπολογιστών οδήγησε στην ανακάλυψη των fractals από τον Benoit Mandelbrot. Τα fractals είναι μορφές που βασίζονται στην αυτο-ομοιότητα, δηλαδή είναι σχήματα που έχουν την ίδια μορφή σε κάθε επίπεδο παρατήρησης τους. Ενώ στην απεικόνισή τους υπάρχει μια πολυπλοκότητα, κατ' ουσίαν προέρχονται από ένα απλό μοτίβο, το οποίο επαναλαμβάνεται. Η θεωρία του χάους φαίνεται να βρίσκει εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία, ενώ τα αποτελέσματα της χρήσης της είναι παρατηρήσιμα στην καθημερινή ζωή, ακόμα κι αν αυτό συχνά δεν γίνεται άμεσα αντιληπτό. Ωστόσο, η θεωρία του χάους κάνει ακόμα τα αρχικά της βήματα και διαφαίνεται να υπάρχει χώρος για νέες εξελίξεις στο μέλλον [3].

### **1.1 Αντικείμενο της πτυχιακής εργασίας**

Αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η παρουσίαση και εξήγηση τόσο της ίδιας θεωρίας του χάους, όσο και των φαινομένων που συνδέονται με αυτήν. Παρουσιάζονται επίσης τα επιστημονικά πεδία στα οποία βρίσκει εφαρμογή,



καθώς και οι πιθανές μελλοντικές δυνατότητες αυτής με βάση τις γνώσεις του παρόντος. Για τον σκοπό αυτό η εργασία έχει οργανωθεί κατά κεφάλαια.

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιείται εισαγωγή στο θέμα της εργασίας, προσδιορίζεται το αντικείμενό της, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή και αναλύονται τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Στην συνέχεια στο κεφάλαιο 2 αναλύονται τα fractals. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα σύνολα Julia και στο 4<sup>ο</sup> στα σύνολα Mandelbrot. Εν συνεχεία, στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται η κβαντική θεωρία του χάους και στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναφέρονται οι χρήσεις και η χρησιμότητα της θεωρίας του χάους, ενώ στο 7<sup>ο</sup> παρατίθενται τα συμπεράσματα από την παρούσα εργασία. Σημειώνεται ότι αρκετά από τα σχήματα που παρουσιάζονται στην εργασία σχετικά με την θεωρία του χάους, έχουν προέλθει από χρήση του προγράμματος Matlab.

## 1.2 Ιστορική αναδρομή

Ο Henri Poincare, στην προσπάθειά του να λύσει το πρόβλημα του μαθηματικού συσχετισμού των κινήσεων τριών ουράνιων σωμάτων (Γη, Ήλιος και Σελήνη), το οποίο είχε τεθεί το 1887 από τον Βασιλιά Όσκαρ της Σουηδίας, ανακάλυψε ότι οι εξισώσεις της Κλασικής Μηχανικής, για το πρόβλημα αυτό, δεν ήταν δυνατόν να λυθούν αναλυτικά με τις ως τότε γνωστές μαθηματικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, πέρα από την την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του προβλήματος τριών σωμάτων, ανακάλυψε ότι στα πιο απλά προβλήματα της Μηχανικής και της Αστρονομίας, οι λύσεις (οι τροχιές των σωμάτων) εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή των αρχικών συνθηκών. Αν και η εργασία του Poincare θεωρήθηκε σημαντική από μερικούς φυσικούς του καιρού του, οι νέες ανακαλύψεις στον καινούριο κλάδο της φυσικής, την κβαντομηχανική, την επισκίασαν και την υποβάθμισαν [4].

Η απεικόνιση του ανωτέρω φαινομένου κατέστη πιο εύκολη με την απαρχή της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών την δεκαετία του 1950. Αυτός ήταν ο ένας από τους λόγους που οδήγησε στη γέννηση της θεωρίας του χάους. Οι υπόλοιποι λόγοι ήταν το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας για την ακανόνιστη συμπεριφορά διαφόρων φαινομένων, καθώς και η δημιουργία μιας νέας ταυτότητας, ήτοι ενός νέου κλάδου των μαθηματικών που θα μπορούσε να απασχολήσει ερευνητές [3].

Ένας πρωτοπόρος της θεωρίας του χάους ήταν ο Edward Lorenz, ο οποίος έτυχε να συναντήσει το φαινόμενο του χάους καθώς εργαζόταν για την πρόβλεψη του καιρού το 1961. Χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα προσομοίωσης του καιρού, ανακάλυψε ότι μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες δημιουργούν μεγάλες διαφορές στα αποτελέσματα [3].

Μπορεί να ειπωθεί ότι υπάρχουν δύο τύποι μαθηματικής σκέψης. Ο πρώτος, ο οποίος προϋπήρχε της θεωρίας του χάους, χρησιμοποιεί σύμβολα και θεωρίες και χρησιμοποιείται στην ανάλυση πολύπλοκων συστημάτων. Ο δεύτερος τύπος μαθηματικής σκέψης δημιουργήθηκε με τη γέννηση της θεωρίας του χάους και χρησιμοποιεί κυρίως μορφές και σχήματα στην αποτύπωση συμπερασμάτων. Η γεωμετρία χρησιμοποιείται κατά κόρον στην θεωρία του χάους στην παρουσίαση δεδομένων με την μορφή πολυδιάστατων καμπύλων και επιφάνειων, σε αντίθεση με τα γραφήματα και τους πίνακες αριθμών, γεγονός που οδήγησε στην δημιουργία των fractals [3].

Ο μαθηματικός Benoit Mandelbrot ανακάλυψε την γεωμετρία των fractals, ενώ ο ίδιος πρωτοχρησιμοποίησε την λέξη fractal το 1975. Οδηγήθηκε εκεί μέσα από την απεικόνιση των προβλημάτων μέσω γεωμετρικών σχημάτων, αφού έγινε μέλος της ομάδας της IBM το 1958. Εκεί ξεκίνησε την μαθηματική ανάλυση του ηλεκτρονικού θορύβου και παρατήρησε μια διακύμανση σε όλες τις κλίμακες, η οποία δεν μπορούσε να εξηγηθεί από τις υπάρχουσες στατιστικές μεθόδους. Η αύξηση της επεξεργαστικής και απεικονιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών έδωσε την δυνατότητα της αναπαράστασης πολύπλοκων εικόνων από fractals. Πολλά από αυτά έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και έχουν πάρει το όνομά τους από τους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με αυτά (π.χ. Mandelbrot Set) [3].

### **1.3 Δυναμικά και γραμμικά δυναμικά συστήματα**

Το χάος αποτελεί μέρος ενός μεγαλύτερου κλάδου των μαθηματικών γνωστού ως δυναμική ή δυναμικά συστήματα, τα οποία μελετούν την χρονική εξέλιξη των φυσικών συστημάτων. Δυναμικό σύστημα καλείται κάθε σύστημα του οποίου η εξέλιξη από κάποια αρχική κατάσταση περιγράφεται από ένα σύνολο εξισώσεων [5]. Μια ομάδα δυναμικών συστημάτων μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα  $n$  διαφορικών εξισώσεων  $1^{ης}$  τάξης με τον γενικό τύπο:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, c) \quad (1)$$

όπου  $x$  το διάνυσμα  $n$  πραγματικών συναρτήσεων ως προς τον χρόνο  $t$ , το οποίο μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση (2):

$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \quad (2)$$

Οι συναρτήσεις  $x_i(t)$ ,  $i=1,2, \dots, n$  αντιπροσωπεύουν συνήθως φυσικές ποσότητες (π.χ. θερμοκρασία, ταχύτητα, πίεση), ενώ η σταθερά  $c = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  αποτελεί εξωγενή μεταβλητή και τα  $c_i$ ,  $i=1,2, \dots, k$  είναι οι παράμετροι ελέγχου του δυναμικού συστήματος. Η μεταβολή της τιμής μιας παραμέτρου ελέγχου μπορεί να αλλάξει την συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος, ενώ κατά την διάρκεια παρατήρησης της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος οι παράμετροι ελέγχου παραμένουν σταθερές [5].

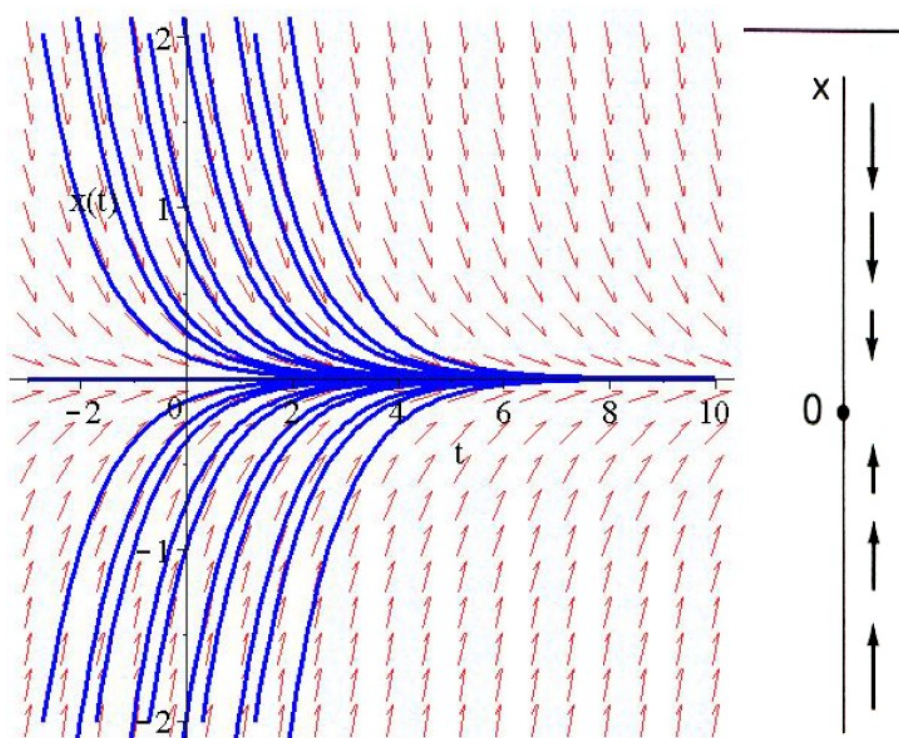
Ισχύει  $x \in R^n$ , όπου ο χώρος  $R^n$  είναι ο λεγόμενος χώρος φάσεων ή καταστάσεων. Στο χώρο φάσεων, η κατάσταση του συστήματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή καθορίζεται από ένα σημείο, το οποίο κινείται χρονικά. Δημιουργείται έτσι μια τροχιά στο χώρο φάσεων, η ταχύτητα της οποίας προσδιορίζεται από το διανυσματικό πεδίο  $F: R^n \rightarrow R^n$  της σχέσης (1). Λόγω της ντετερμινιστικής φύσεως της περιγραφής του συστήματος, κάθε σημείο στο χώρο των φάσεων διαγράφει μία μόνο τροχιά. Συνεπώς από την σχέση (1) είναι εφικτό να υπολογιστεί η κατάσταση του συστήματος στο παρελθόν και το μέλλον, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστή η παρούσα κατάσταση αυτού [5].

Όταν το διανυσματικό πεδίο  $F$  εξαρτάται από τον χρόνο, το δυναμικό σύστημα καλείται μη αυτόνομο και περιγράφεται από την σχέση (1). Αντιθέτως όταν το σύστημα δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε το δυναμικό σύστημα καλείται αυτόνομο και η σχέση (1) γίνεται:

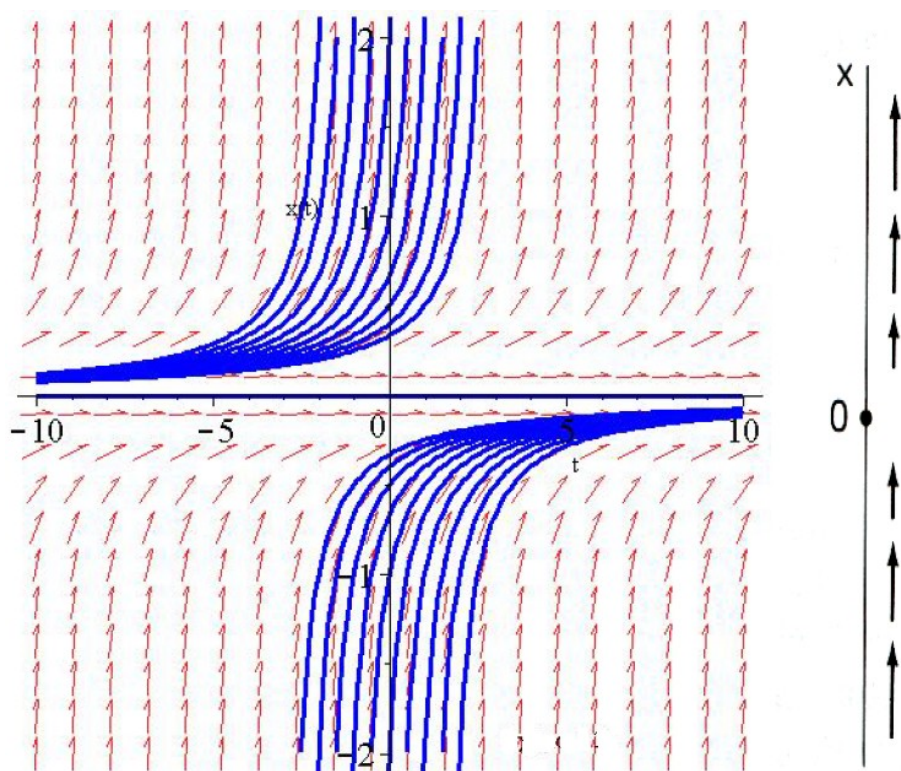
$$\frac{dx}{dt} = F(x, c) \quad (3)$$

Αποδεικνύεται ότι στο αυτόνομο σύστημα δύο διαφορετικές τροχιές που προέρχονται από την χρονική εξέλιξη διαφορετικών αρχικών συνθηκών δεν τέμνονται στο χώρο φάσεων (εκτός από μια ειδική περίπτωση, όπου οι τροχιές συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας για  $t \rightarrow \infty$ ), ενώ στο μη αυτόνομο σύστημα δύο διαφορετικές τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες είναι δυνατόν να διέρχονται από το ίδιο σημείο στο χώρο φάσεων [5].

Στα σχήματα 1.1 και 1.2 φαίνονται τα διανυσματικά πεδία και παραδείγματα τροχιών από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων  $dx/dt = -x$  και  $dx/dt = x^2$ , αντίστοιχα [6].



**Σχήμα 1.1:** Διανυσματικά πεδία και παραδείγματα τροχιών από επίλυση του δυναμικού συστήματος  $dx/dt = -x$



**Σχήμα 1.2:** Διανυσματικά πεδία και παραδείγματα τροχιών από επίλυση του δυναμικού συστήματος  $dx/dt = x^2$

Όταν σε ένα δυναμικό σύστημα  $n$  διαφορικών εξισώσεων το διανυσματικό πεδίο  $F$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $x_i$ ,  $i=1,2, \dots, n$ , τότε αυτό καλείται γραμμικό και αποτυπώνεται ως εξής:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (4)$$

όπου  $A$  είναι ο  $n \times n$  σταθερός και αντιστρέψιμος πίνακας συντελεστών. Αν ισχύει ότι οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους, τότε υπάρχουν  $n$  ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα  $y_i$  και η λύση της (4) μπορεί να γραφεί ως εξής:

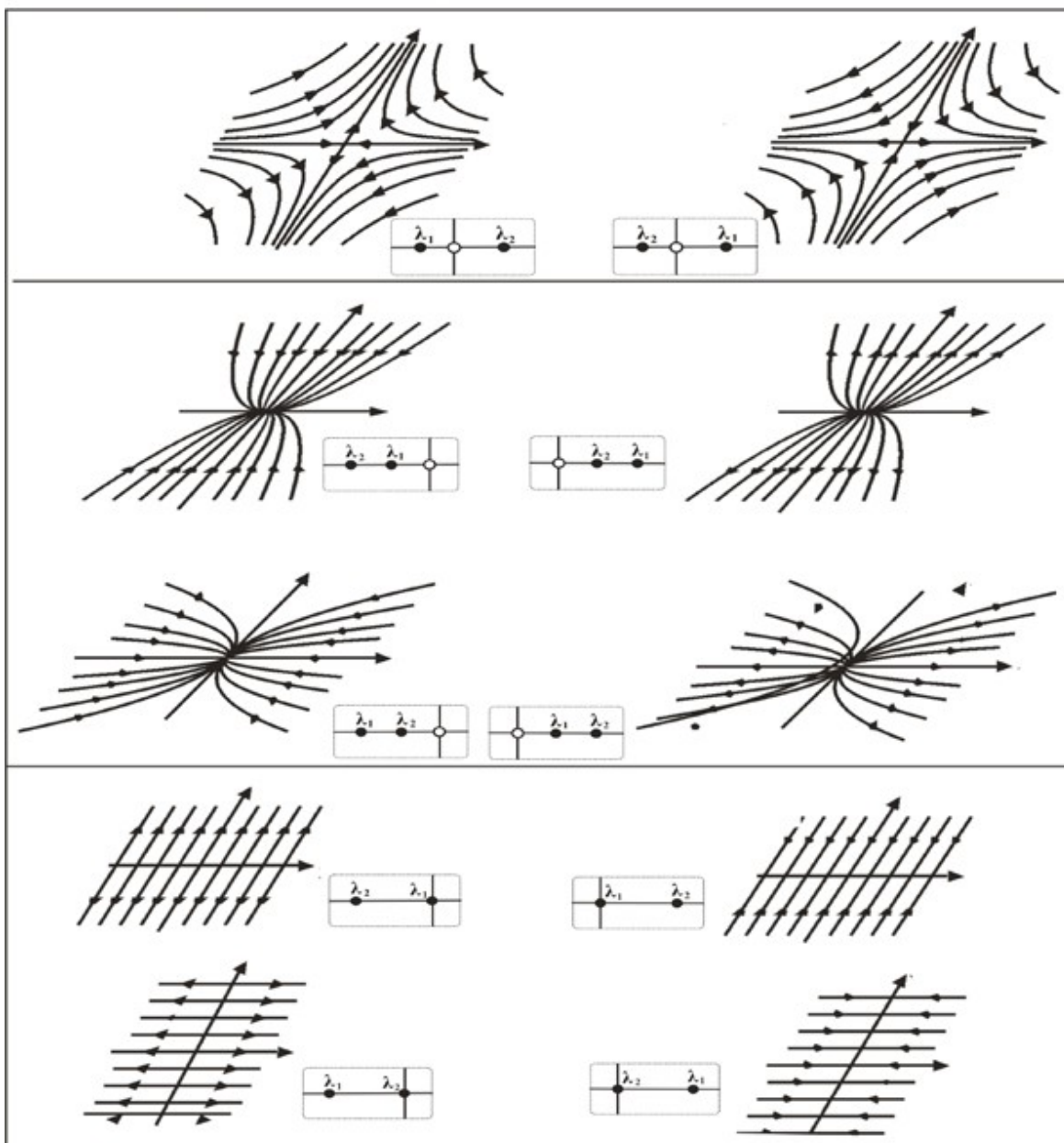
$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} y_i \quad (5)$$

Στην (5) οι σταθερές  $C_i, i=1,2, \dots, n$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Υπάρχει μία κατάσταση του συστήματος για την οποία ισχύει  $x_s=0$  και η οποία καλείται σημείο ισορροπίας. Αν οι τροχιές του συστήματος που βρίσκονται γειτονικά του  $x_s$  έλκονται ή απωθούνται από αυτό, τότε το σημείο ισορροπίας καλείται ασυμπτωτικά σταθερό ή ασταθές, αντίστοιχα [5].

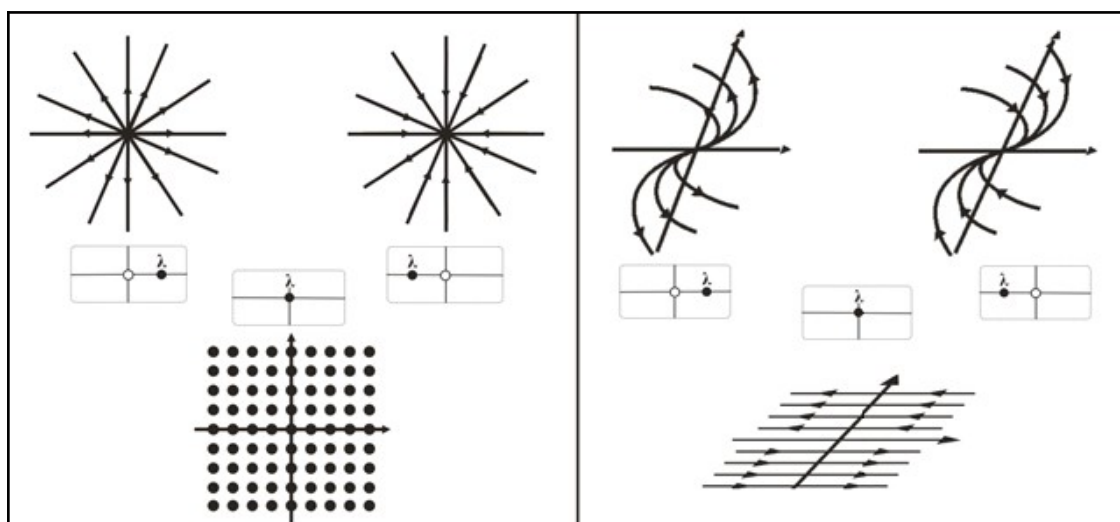
Στην περίπτωση που ο χώρος φάσεων είναι δισδιάστατος, η κατάσταση ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$  του πίνακα  $A$ . Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν στον δισδιάστατο χώρο φάσεων τρεις γενικές περιπτώσεις ιδιοτιμών [7]:

1. Απλές πραγματικές ιδιοτιμές ( $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$ )
2. Διπλή πραγματική ιδιοτιμή ( $\lambda_0 \in R$ )
3. Μιγαδικές ιδιοτιμές ( $\lambda_1, \lambda_2 \in C, \lambda_{1,2} = a \pm i\omega$ )

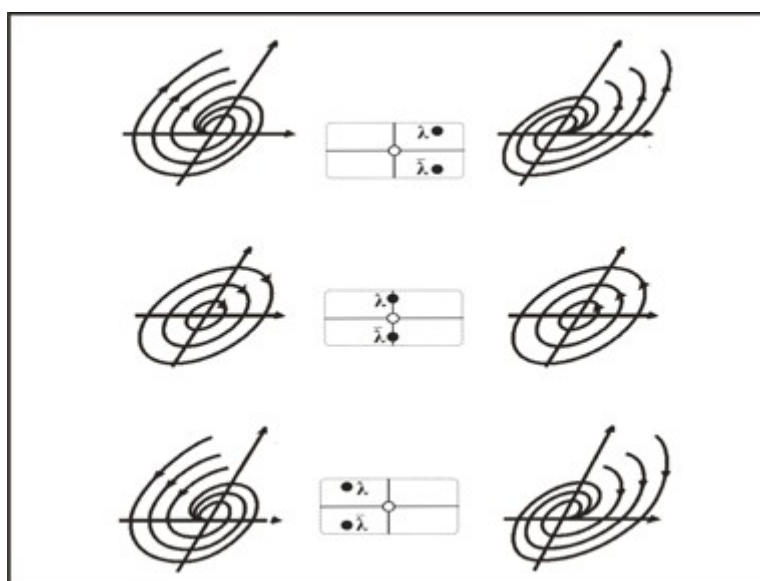
Στα σχήματα 1.3 – 1.5 φαίνονται οι καταστάσεις ισορροπίας στον δισδιάστατο χώρο φάσεων και οι ιδιοτιμές για τις άνω κατηγοριοποιήσεις των ιδιοτιμών, αντίστοιχα [7].



**Σχήμα 1.3:** Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση των απλών πραγματικών ιδιοτιμών



**Σχήμα 1.4:** Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση της διπλής πραγματικής ιδιοτιμής



**Σχήμα 1.5:** Καταστάσεις ισορροπίας στον διδιάστατο χώρο φάσεων και ιδιοτιμές για την περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών



#### 1.4 Μη γραμμικά δυναμικά συστήματα

Όταν το διανυσματικό πεδίο  $F$  αποτελεί έναν μη γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών  $x_i, i=1,2, \dots, n$ , τότε το σύστημα καλείται μη γραμμικό και η γενική του μορφή είναι η ακόλουθη:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

Επειδή δεν υπάρχουν καθορισμένες μέθοδοι αναλυτικών λύσεων για την (6), η μελέτη των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων είναι ποιοτικού χαρακτήρα. Ειδικότερα, μελετώνται τα σημεία ισορροπίας ( $x_s$ ) και η κατάσταση όταν ο χρόνος  $t$  τείνει στο άπειρο. Για την μελέτη του σημείου ισορροπίας μπορεί να θεωρηθεί ένα σημείο  $x = x_s + x'$ , με  $|x'| \ll 1$ , ώστε η (6) να γίνεται:

$$\frac{dx'}{dt} = A' x' \quad (7)$$

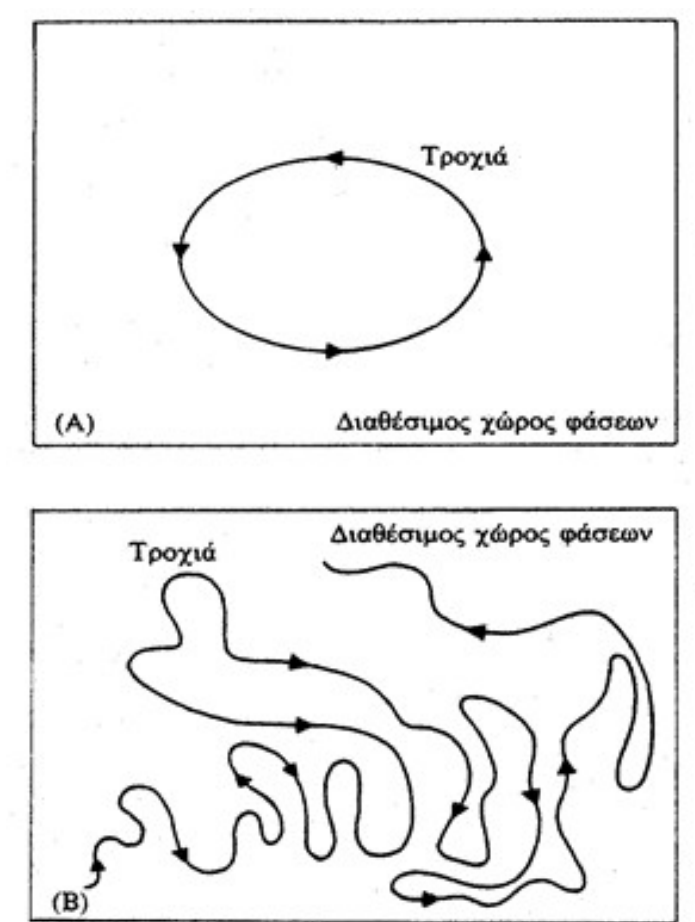
Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας  $A'$  ισούται με τον Ιακωβιανό πίνακα του  $F$  για  $x_s$  και κατά συνέπεια η μορφή της ισορροπίας (ασταθής ή σταθερή) καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του  $A'$  [5].

Στην κλασσική μηχανική ο τελεστής Χάμιλτον  $H$  (Χαμιλτονιανή), δηλαδή το άθροισμα της δυναμικής και κινητικής ενέργειας, περιγράφει την κατάσταση των δυναμικών συστημάτων. Όταν η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τον χρόνο το σύστημα καλείται διατηρητικό (ή διατηρήσιμο), ενώ στην αντίθετη περίπτωση καλείται καταναλίσκον. Στα διατηρητικά συστήματα η δυναμική είναι αντιστρεπτή σε σχέση με τον χρόνο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα διατηρητικών συστημάτων είναι το ηλιακό σύστημα και το εκκρεμές άνευ τριβών. Στα καταναλίσκοντα συστήματα εμφανίζονται εσωτερικές τριβές με αποτέλεσμα να υπάρχουν απώλειες, ενώ χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι ο αποσβενόμενος ταλαντωτής. Τα συστήματα αυτά είναι μη γραμμικά και έχουν την ιδιότητα ότι με την πάροδο του χρόνου και για  $t \rightarrow \infty$ , οι τροχιές των στοιχείων του χώρου φάσεων συγκλίνουν σε έναν υποχώρο με μικρότερες διαστάσεις από τον χώρο φάσεων. Ο υποχώρος αυτός καλείται ελκυστής, καθώς θεωρείται ότι έλκει τις τροχιές προς το μέρος του. Αναλόγως με τον τρόπο σύγκλισης των τροχιών, ο ελκυστής ονομάζεται ομαλός ή Άννα Ντέτς

παράξενος (regular ή strange, αντίστοιχα), ενώ το φασικό πορτρέτο είναι ένα σχήμα, το οποίο απεικονίζει την εξέλιξη του συστήματος από διαφορετικές αρχικές συνθήκες [5].

Τα διατηρητικά (χαμιλτονιανά) δυναμικά συστήματα διακρίνονται στα ολοκληρώσιμα και στα μη ολοκληρώσιμα. Ολοκληρώσιμα καλούνται αυτά των οποίων η επίλυση οδηγεί στην γνώση κάθε μελλοντικής κατάστασης από τις αρχικές συνθήκες στον φασικό χώρο. Τα συστήματα αυτά περιέχουν ομαλές κινήσεις στο χώρο φάσεων. Αντιθέτως στα μη ολοκληρώσιμα χαμιλτονιανά συστήματα είναι αδύνατον να υπολογιστούν οι μελλοντικές καταστάσεις, παρά την ακρίβεια γνώσης της αρχικής κατάστασης του συστήματος. Τα μη ολοκληρώσιμα χαμιλτονιανά συστήματα εμφανίζουν επομένως χαοτική συμπεριφορά και είναι πάντα μη γραμμικά, ενώ επισημαίνεται ότι τα συστήματα αυτά συνιστούν την πλειοψηφία των φυσικών δυναμικών συστημάτων. Τα καταναλίσκοντα συστήματα είναι μη ολοκληρώσιμα [8].

Ως εργοδικότητα ορίζεται η ιδιότητα της τροχιάς να περνάει από όλες τις δυνατές καταστάσεις του χώρου φάσεων με ίση πιθανότητα. Παράδειγμα εργοδικού συστήματος είναι τα μόρια ενός αερίου, τα οποία βρίσκονται σε ένα κλειστό δοχείο, η κίνηση των οποίων μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο θα έχει καλύψει ολόκληρο τον χώρο φάσεων. Αντίθετα, μη εργοδικό μπορεί να χαρακτηριστεί ένα εκκρεμές, το οποίο υφίσταται μικρή αρχική δύναμη και κατά συνέπεια κάνει μικρές αιωρήσεις (ολοκληρώσιμο σύστημα). Τα δύο αυτά παραδείγματα συστημάτων απεικονίζονται στο Σχήμα 1.6 [5].

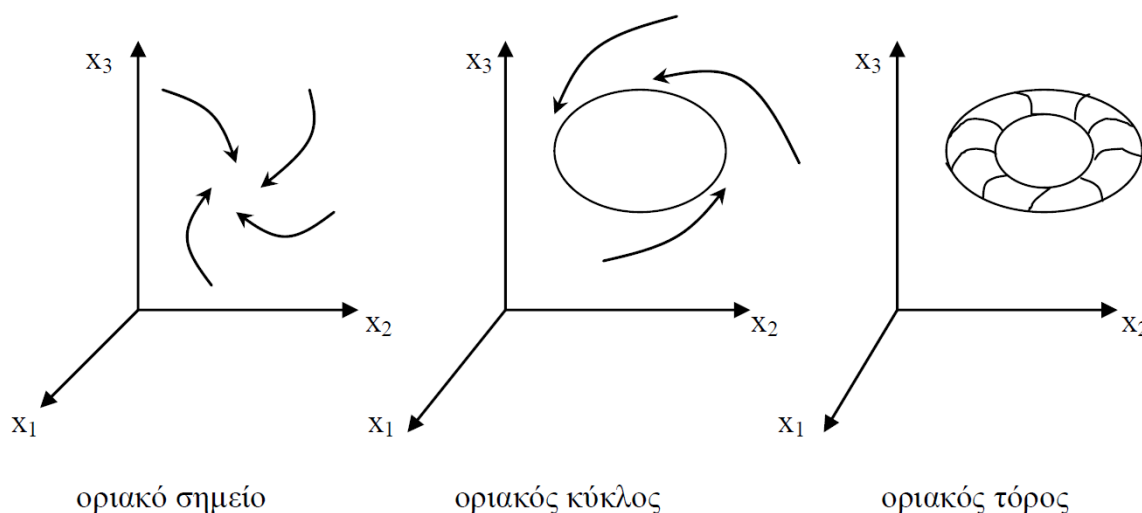


**Σχήμα 1.6:** (A) Ο χώρος φάσεων ενός εκκρεμούς για μικρές αιωρήσεις (ολοκληρώσιμο σύστημα) και (B) ο χώρος φάσεων για ένα σύνολο μορίων ενός αερίου

### 1.5 Μη χαοτικοί και χαοτικοί ελκυστές

Στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, η τελική κατάσταση ισορροπίας (για  $t \rightarrow \infty$ ) καλείται οριακό σύνολο. Από τα οριακά σύνολα, εκείνα τα οποία αποτελούν ελκυστές στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι η σταθερή εστία (stable focus) και ο σταθερός κόμβος (stable node). Σημειώνεται ότι οι ελκυστές εμφανίζονται μόνο σε καταναλίσκοντα δυναμικά συστήματα και όχι στα διατηρητικά. Ανάλογα με τις ιδιότητές του, ένας ελκυστής μπορεί να είναι χαοτικός ή μη χαοτικός. Οι μη χαοτικοί ελκυστές χαρακτηρίζονται από ακέραια διάσταση ίση με την τοπολογική διάσταση του υπόχωρου του χώρου φάσεων. Επιπλέον δεν παρουσιάζουν ευαισθησία ως προς τις αρχικές συνθήκες, και κατά συνέπεια η μελλοντική εξέλιξή τους είναι προβλέψιμη. Ένας μη χαοτικός ελκυστής μπορεί να είναι οριακό σημείο (σταθερός κόμβος, σταθερή εστία), οριακός κύκλος ή οριακός τόρος [5].

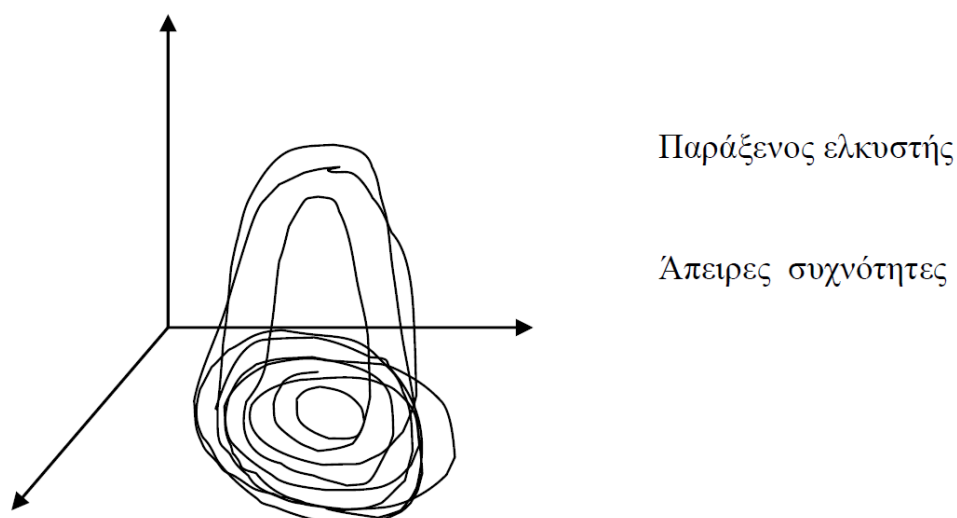
Κατά κανόνα οι ελκυστές συστημάτων που φτάνουν σε κατάσταση ισορροπίας είναι οριακά σημεία. Παράδειγμα αυτού είναι το εκκρεμές, το οποίο, εξαιτίας των τριβών, καταλήγει σε μια τελική κατάσταση ισορροπίας (σταθερό σημείο), όπως φαίνεται και στο φασικό πορτρέτο του σχήματος 1.7. Ωστόσο, ένας οριακός κύκλος μπορεί επίσης να είναι ελκυστής για μια τροχιά στο χώρο των φάσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το εξαναγκασμένο εκκρεμές, η απωλεσθείσα ενέργεια (λόγω τριβών) του οποίου αναπληρώνεται από μια εξωτερική διέγερση (δύναμη). Το φασικό πορτρέτο αυτού του συστήματος απεικονίζεται επίσης στο σχήμα 1.7. Ο οριακός (δακτυλιοειδής) τόρος είναι ένας ακόμη μη χαστικός ελκυστής και παράδειγμα αυτού είναι δύο εξαναγκασμένοι, ασύζευκτοι ταλαντωτές, των οποίων ο λόγος συχνοτήτων είναι άρρητος. Σε αυτήν την περίπτωση η κίνηση του συστήματος καλείται ημιπεριοδική (quasi-periodic), ενώ η τροχιά στο χώρο των φάσεων καλύπτει την επιφάνεια ενός τόρου (Σχήμα 1.7) [5, 8].



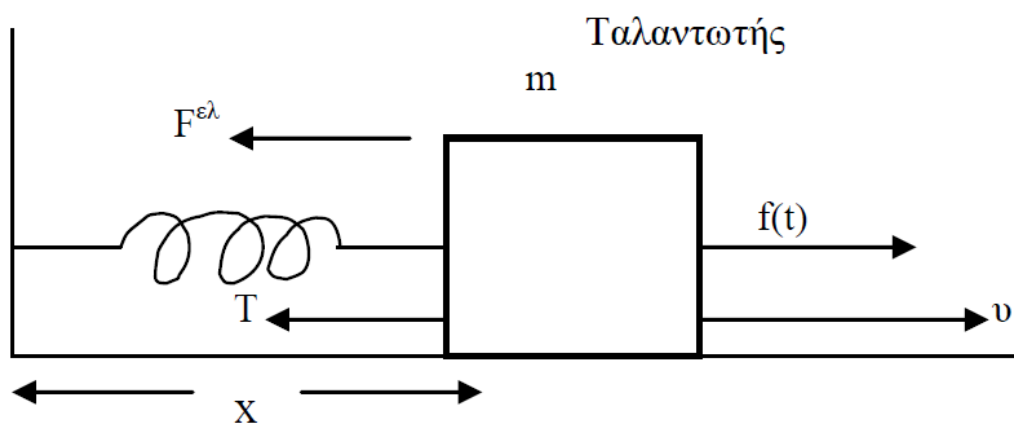
**Σχήμα 1.7:** Φασικά πορτρέτα με οριακό σημείο, οριακό κύκλο και οριακό τόρο ως ελκυστές

Όταν οι βαθμοί ελευθερίας του μη γραμμικού δυναμικού συστήματος είναι περισσότεροι από δύο τότε είναι δυνατό να έχουμε παράξενο (χαστικό) ελκυστή. Ο παράξενος ελκυστής χαρακτηρίζεται ως χαστικός διότι παρουσιάζει το φαινόμενο της ευαισθησίας ως προς τις αρχικές συνθήκες, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης του συστήματος. Ενώ στον οριακό κύκλο η τροχιά στον χώρο φάσεων είναι περιοδική με συχνότητα  $\omega$  και στον οριακό τόρο είναι ημιπεριοδική με δύο συχνότητες ( $\omega_1, \omega_2$ ), στον παράξενο ελκυστή η τροχιά είναι

απεριοδική και εμφανίζει άπειρες συχνότητες (σχήμα 1.8). Παράδειγμα συστήματος με παράξενο ελκυστή υπάρχει στο μη γραμμικό χαστικό μηχανικό ταλαντωτή (σχήμα 1.9), καθώς και στον ηλεκτρικό μη γραμμικό ταλαντωτή (ηλεκτρικό κύκλωμα με μη γραμμική δυναμική) [8].



Σχήμα 1.8: Φασικό πορτρέτο με παράξενο ελκυστή



Σχήμα 1.9: Μηχανικός ταλαντωτής με εξωτερική διέγερση

## 1.6 Χαρακτηριστικά και παραδείγματα χαστικών συστημάτων

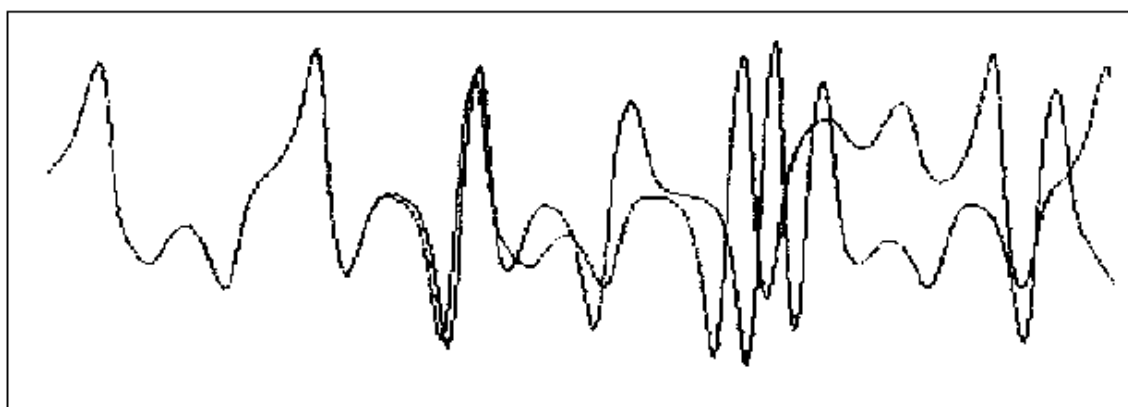
Έως τις αρχές της δεκαετίας του 1960, οι μόνοι γνωστοί ελκυστές ήταν το οριακό σημείο, ο οριακός κύκλος και ο οριακός τόρος. Επιπλέον ήταν παραδεκτό ότι η εξέλιξη ενός ντετερμινιστικού συστήματος είναι καθορισμένη όταν υπάρχουν οι αρχικές συνθήκες, ενώ η εξέλιξη ενός στοχαστικού συστήματος είναι απρόβλεπτη και αντιμετωπίζεται με στατιστικές μεθόδους ανάλυσης, όπως ο υπολογισμός της μέσης τιμής μιας ποσότητας. Το 1963 ο E. Lorenz ανακάλυψε ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας, το οποίο παρουσιάζει σύνθετη συμπεριφορά, διαφορετική με την αντίστοιχη των μέχρι τότε γνωστών ελκυστών. Ειδικότερα, η τροχιά του συστήματος δεν έμοιαζε με τις ομαλές τροχιές του οριακού σημείου, οριακού κύκλου και τόρου και εμφάνιζε παράξενες για την εποχή εκείνη ιδιότητες. Αυτός ο ελκυστής ήταν το πρώτο παράδειγμα χαοτικού (παράξενου) ελκυστή, και το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων το πρώτο παράδειγμα χαοτικού συστήματος [5].

Τα χαοτικά συστήματα αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία δυναμικών συστημάτων και περιγράφονται μαθηματικά από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (ροές) ή από μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών (απεικονίσεις) και ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών καταναλισκόντων συστημάτων. Ενώ ο υποχώρος στον οποίον εξελίσσεται η τροχιά είναι περιορισμένος για ένα σύνολο αρχικών συνθηκών, η τροχιά δεν διέρχεται ποτέ από το ίδιο σημείο δύο φορές, έχει άπειρο μήκος, είναι απεριοδική και αυτό φαίνεται στο φάσμα ισχύος (που αποτελεί μια μεταβλητή του συστήματος), το οποίο είναι συνεχές. Επειδή οι μελλοντικές θέσεις της τροχιάς φαίνεται να μην σχετίζονται με τις παρελθούσες, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των μεταβλητών ενός χαοτικού συστήματος μηδενίζεται σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα [5].

Μια χαρακτηριστική ιδιότητα των χαοτικών συστημάτων είναι η πολύ μεγάλη ευαισθησία τους από τις αρχικές συνθήκες. Δύο τροχιές με περίπου ίσες αρχικές συνθήκες μένουν μόνο για μικρό χρονικό διάστημα γειτονικές και αποκλίνουν γρήγορα εκθετικά. Συνεπώς μικροδιαταραχές επηρεάζουν άμεσα και δραματικά την μακροσκοπική συμπεριφορά του συστήματος. Λόγω της απόκλισης γειτονικών τροχιών ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov, οποίος αποτελεί μέτρο της μέσης απόκλισης δύο γειτονικών τροχιών ενός χαοτικού συστήματος, είναι πάντοτε θετικός [5].

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες αποτελεί το μοντέλο προσομοίωσης της εξέλιξης του καιρού, το οποίο ο Lorenz είχε

δημιουργήσει σε ένα πρωτόγονο ηλεκτρονικό υπολογιστή της εποχής του 1963. Μετά από αρκετές δοκιμές είχε καταλήξει σε ένα σύστημα 12 διαφορικών εξισώσεων που εξέφραζαν τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται η εξέλιξη του καιρού (θερμοκρασία, πίεση κλπ.). Με την αριθμητική μέθοδο επίλυσης, η πορεία του καιρικού συστήματος ήταν ντετερμινιστικά προδιαγεγραμμένη από τις διαφορικές εξισώσεις και την αρχική συνθήκη. Κάποια μέρα ο Lorenz θέλησε να επανεξετάσει μια ακολουθία της εξέλιξης του καιρού και αντί να αρχίσει από την αρχή, άρχισε από τη μέση τους υπολογισμούς εισάγοντας τα δεδομένα εκείνης της χρονικής στιγμής στο μοντέλο ως αρχικές συνθήκες. Ενώ η καινούργια εκτέλεση έπρεπε να είναι ίδια με την προηγούμενη, διέφερε από ένα σημείο και έκτοτε εντελώς, ώστε ο προβλεπόμενος καιρός έπειτα από λίγους μήνες είχε χάσει κάθε ομοιότητα με αυτόν που είχε αρχικά υπολογίσει το μοντέλο (σχήμα 1.10) [9].



**Σχήμα 1.10:** Το πείραμα του Lorenz. Η διαφορά στις αρχικές τιμές των δύο καμπυλών είναι μόνο 0,000127

Η απόκλιση των ανωτέρω αποτελεσμάτων οφειλόταν στο γεγονός ότι τα δεδομένα που επανεισήγαγε ο Lorenz για τον δεύτερο υπολογισμό είχαν μικρότερη ακρίβεια (λιγότερα δεκαδικά ψηφία) από εκείνα που αποθήκευε ο υπολογιστής εσωτερικά. Ειδικότερα, αντί να καταχωρηθεί ο αριθμός 0.506127 (με έξι δεκαδικά ψηφία), τον οποίο είχε στη μνήμη ο υπολογιστής ως συνθήκες την δεδομένη στιγμή έναρξης των υπολογισμών, ο Lorenz εισήγαγε τον αριθμό 0.506, υποθέτοντας ότι η μικρή διαφορά θα είχε αμελητέες συνέπειες. Επομένως, στο συγκεκριμένο μοντέλο, και η ελάχιστη ακόμη έλλειψη ακρίβειας απέβη καθοριστική. Εν συνεχεία ο Lorenz απλοποίησε το αρχικό μοντέλο και κατασκεύασε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που να ανήκει στο χώρο των τριών διαστάσεων αντί των δώδεκα.

Μολονότι τρισδιάστατο διατηρεί την πολύπλοκη συμπεριφορά του αρχικού με τις δώδεκα εξισώσεις, γεγονός που οφείλεται στη μη γραμμικότητά του. Το κλασικό μοντέλο, το οποίο κατά κανόνα αποκαλείται σύστημα των εξισώσεων του Lorenz έχει την ακόλουθη μορφή [9]:

$$\begin{aligned} dx/dt &= 10(y-x) \\ dy/dt &= xz + 28x - y \\ dz/dt &= xy - (8/3)z \end{aligned} \tag{8}$$

Το σύστημα αυτό αποτελείται από τρεις διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν δύο μη γραμμικούς όρους (τους  $xz$  και  $xy$ ) και τα οποία μοντελοποιούν ρεύματα μεταφοράς θερμότητας μέσα σε ένα ρευστό. Στο σχήμα 1.11 παρουσιάζεται ένα μέρος της τροχιάς της λύσης, το οποίο καλείται ελκυστής του Lorenz και κατασκευάστηκε με χρήση του Matlab [10].

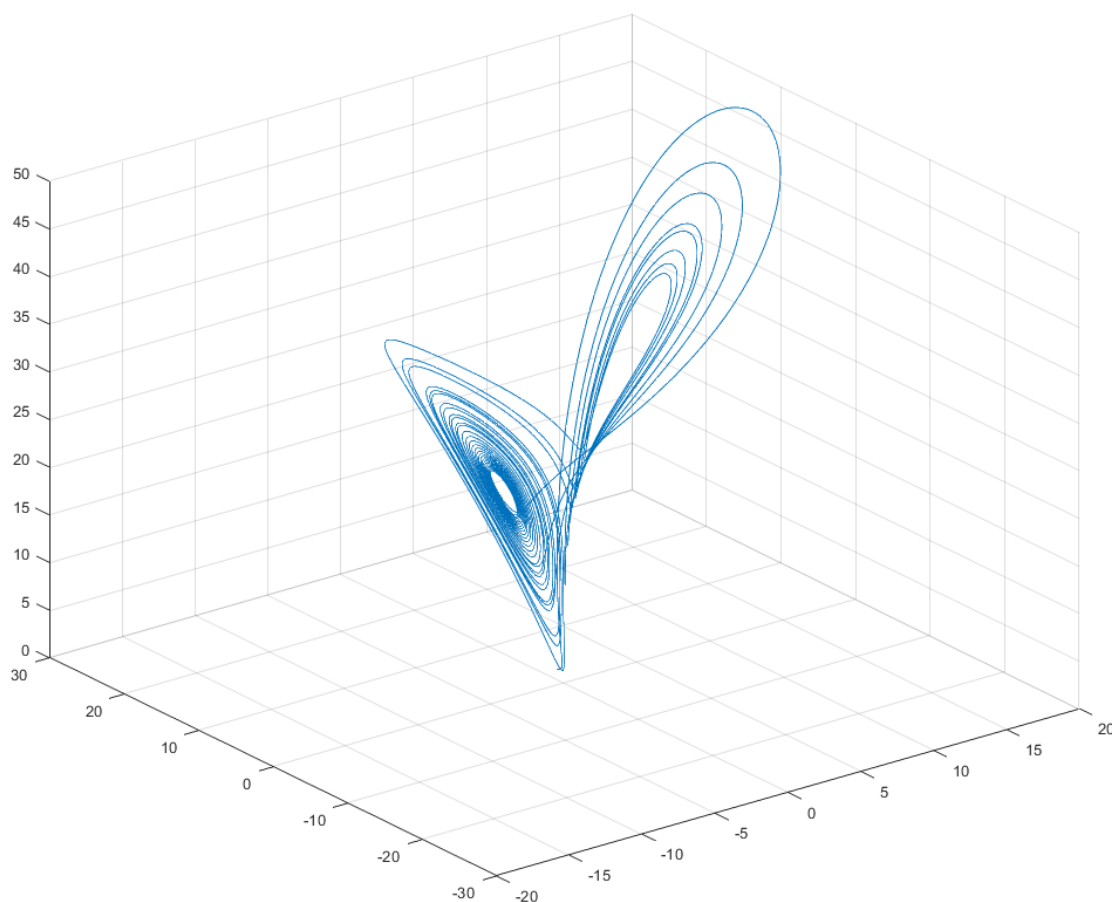
Στο σχήμα 1.11 οι τρεις μεταβλητές προσδιορίζουν κάθε στιγμή τη θέση ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο. Η τροχιά έχει σχεδιαστεί για ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα, καθότι η τροχιά είναι άπειρη, και ομοιάζει με πεταλούδα με δύο λοβούς ή διπλή έλικα. Το σχήμα αυτό είναι γνωστό ως το φαινόμενο της πεταλούδας. Φαίνεται ότι όλες οι τροχιές, ενώ κινούνται επ' άπειρον στο χώρο των τριών διαστάσεων, παραμένουν παγιδευμένες (φραγμένες) σε μια πεπερασμένη περιοχή χωρίς να τέμνουν η μία την άλλη ή να κλείνουν και κατά συνέπεια εμφανίζεται ένα είδος άπειρης πολυπλοκότητας. Διαπιστώθηκε ότι ένα σημείο στο χώρο των φάσεων που κινούνταν γύρω από τους λοβούς δεν θα επαναλάμβανε ποτέ την κίνησή του. Επιπλέον ήταν αδύνατο να προβλεφθεί σε ποια θέση το σημείο θα άρχιζε να διαγράφει τροχιά γύρω από το λοβό και ποιος λοβός θα ήταν αυτός. Η ακολουθία των αριθμών που παράγει την τροχιά δεν επαναλαμβάνεται και πρόκειται επομένως για ένα είδος αταξίας αλλά ταυτόχρονα και τάξης [9].

Αξίζει να σημειωθεί ότι το φαινόμενο της πεταλούδας έχει ως έναν βαθμό παρερμηνευτεί στην κοινή αντίληψη. Η ιδέα ότι κάτι τόσο ασήμαντο όσο μια πεταλούδα μπορεί με το φτερούγισμά της να προκαλέσει ή να αποτρέψει έναν τυφώνα έχει ιδωθεί ως επιχείρημα υπέρ της άποψης ότι ένα "ασήμαντο" άτομο, γεγονός ή ιδέα μπορούν να καθορίσουν την εξέλιξη της ιστορίας. Ωστόσο, είναι γεγονός ότι ένα χαοτικό σύστημα είναι επί της ουσίας μακροχρόνια απρόβλεπτο.



## Θεωρία του Χάους

Ενώ φαινομενικά ασήμαντα γεγονότα έχουν όντως επηρεάσει την ιστορία σε κάποιες περιπτώσεις, η γνώση της πιθανής εξέλιξης ενός συστήματος χωρίς τα γεγονότα αυτά δεν είναι δυνατόν να αποκτηθεί. Στο παράδειγμα της πεταλούδας, για να συμβεί ο τυφώνας θα έπρεπε το φτερούγισμα να λάβει χώρα σε μια ακριβώς υπολογισμένη στιγμή, κάτι το οποίο είναι αδύνατον να προβλεφθεί επακριβώς [11].



**Σχήμα 1.11:** Ελκυστής του Lorenz με βάση τις διαφορικές εξισώσεις (8) [10]

Ένα άλλο παράδειγμα χαοτικού ελκυστή είναι ο ελκυστής Rossler, ο οποίος βασίζεται στις παρακάτω εξισώσεις:

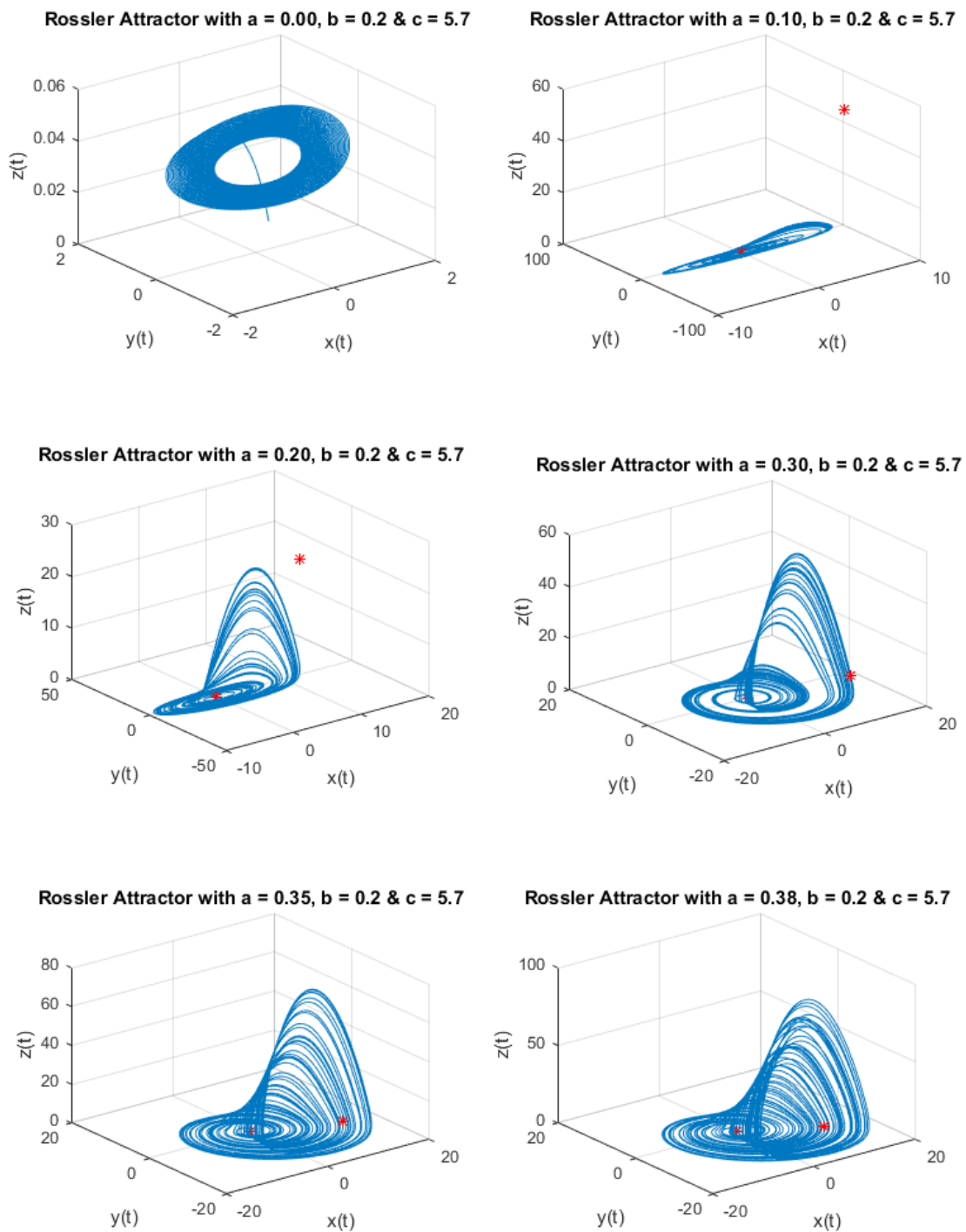
$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay \tag{9}$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

όπου τα  $a, b, c$  αποτελούν σταθερές. Ο μόνος μη γραμμικός όρος εμφανίζεται στην εξίσωση  $dz/dt$  και είναι τετραγωνικός. Με την μεταβολή των παραμέτρων, το σύστημα αυτό παρουσιάζει ένα ευρύ φάσμα συμπεριφοράς. Θέτοντας  $b=0,2$  και  $c=5,7$  και μεταβάλλοντας την παράμετρο  $a$ , λαμβάνονται με την βοήθεια του Matlab τα σχήματα που φαίνονται στην εικόνα 1.12, όπου φαίνεται πως μεταβάλλεται ο ελκυστής Rossler συναρτήσει της παραμέτρου  $a$  [12].

# Θεωρία του Χάους



**Σχήμα 1.12:** Ελκυστής του Rossler με βάση τις διαφορικές εξισώσεις (9) []

Ένα άλλο παράδειγμα χαοτικής κίνησης είναι το απλό εκκρεμές. Όπως είναι γνωστό, η δυναμική του εκκρεμούς εξηγείται απόλυτα από τους νόμους του Νεύτωνα. Η εξίσωση που προσδιορίζει ανά πάσα στιγμή την θέση του εκκρεμούς είναι η ακόλουθη:

$$x'' = g \sin \theta \quad (9)$$

όπου  $x$  η θέση του εκκρεμούς,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\theta$  η γωνία του εκκρεμούς από την κατακόρυφο. Ενώ θεωρητικά η εξίσωση (9) δίνει τη δυνατότητα της ακριβούς πρόβλεψης της θέσης του εκκρεμούς, η τελευταία είναι δυνατόν να προβλεφθεί μόνο για σύντομο χρονικό διάστημα, καθώς οι αριθμοί  $g$  και  $\sin \theta$  (σε συγκεκριμένες θέσεις) έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία. Χρησιμοποιώντας λίγα δεκαδικά ψηφία έχει ως αποτέλεσμα οι υπολογισμοί να αποκλίνουν με την πάροδο του χρόνου από την ακριβή θέση του εκκρεμούς, ώστε σε κάποια στιγμή να βρίσκεται σε εντελώς αντίθετη θέση από την υπολογιζόμενη [9].

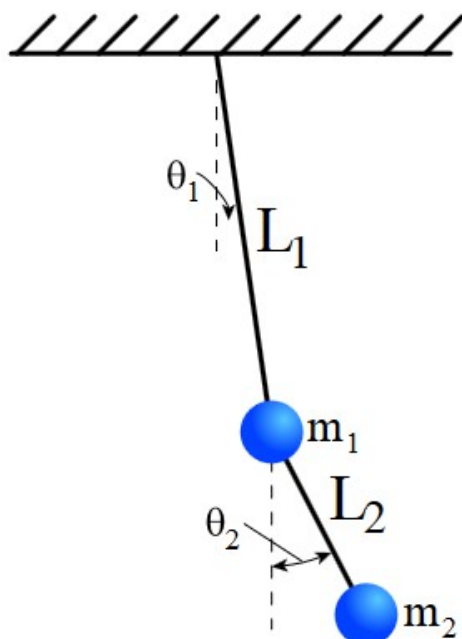
Η χαοτική κίνηση είναι ιδιαίτερα εμφανής στην περίπτωση του διπλού εκκρεμούς, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα 1.13 [1]. Οι εξισώσεις που περιγράφουν την θέση των δύο μαζών είναι οι ακόλουθες:

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad (10)$$

$$y_1 = -L_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2$$

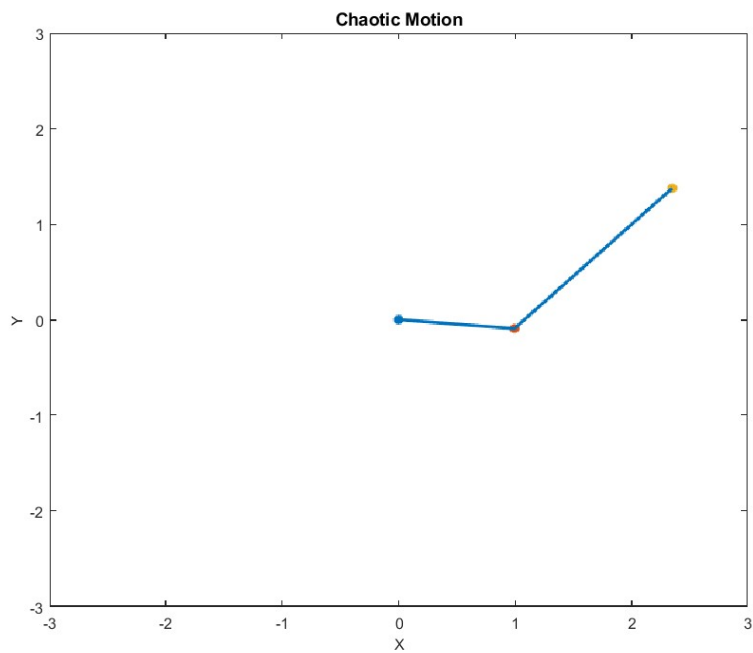
$$y_2 = -L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2$$



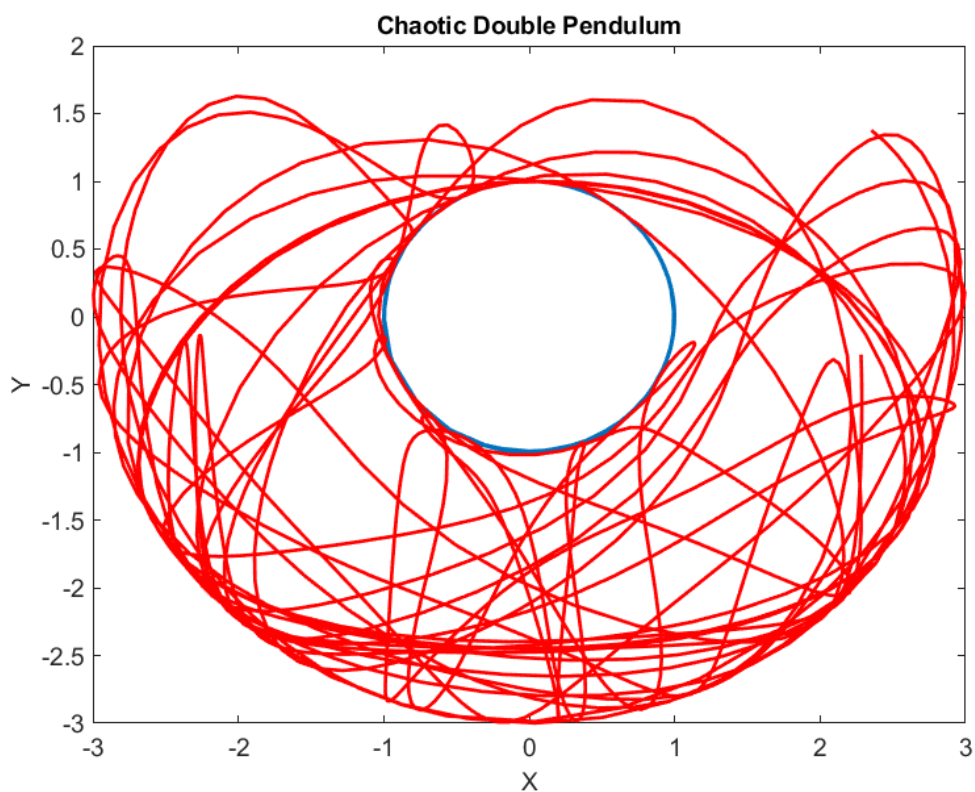
**Σχήμα 1.13:** Διπλό εκκρεμές με μάζες  $m_1$ ,  $m_2$ , μήκη  $L_1$ ,  $L_2$  και γωνίες από την κατακόρυφο  $\theta_1$ ,  $\theta_2$

Λαμβάνοντας μάζες  $m_1 = 2$  και  $m_2 = 1$ , μήκη  $L_1 = 1$  και  $L_2 = 2$  και αρχικές γωνίες  $\theta_1 = 2,5$ ,  $\theta_2 = 1$  έγινε προσομοίωση της τροχιάς του διπλού εκκρεμούς μέσω των εξισώσεων (10) με την βοήθεια του λογισμικού Matlab. Στα σχήματα 1.14 – 1.16 απεικονίζονται η αρχική θέση του εκκρεμούς, ο χώρος φάσεων με την τροχιά του διπλού εκκρεμούς, καθώς και οι γωνίες  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  συναρτήσει του χρόνου, αντίστοιχα [13].

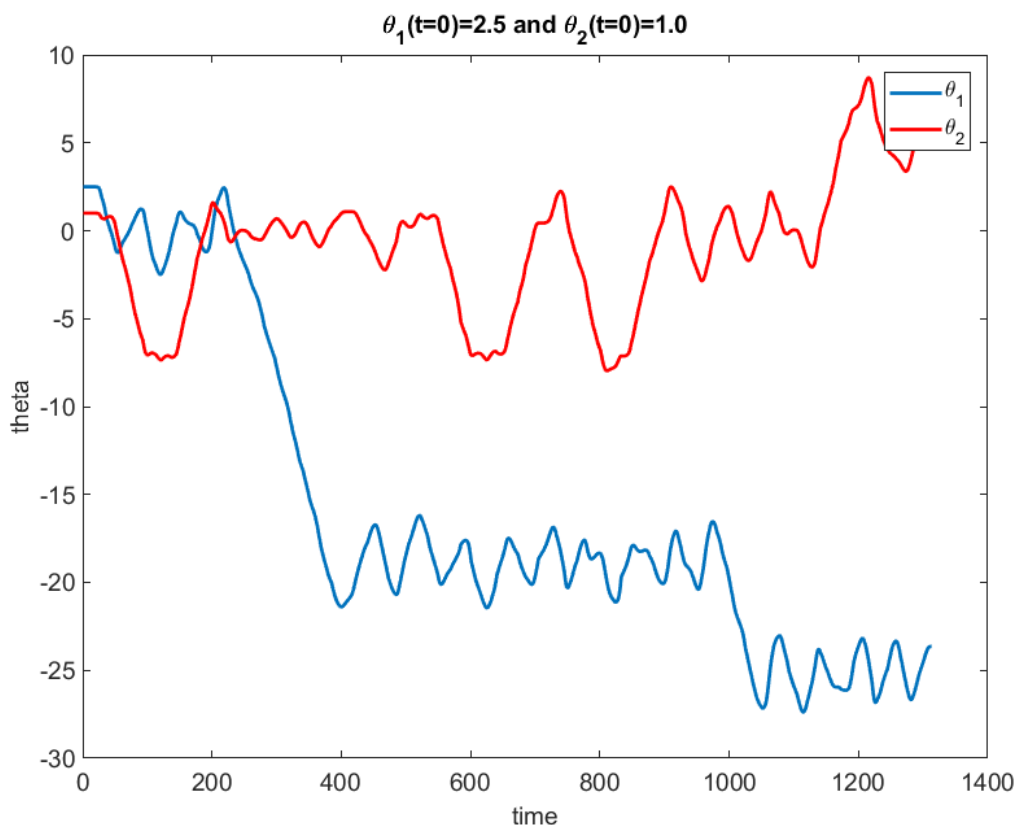
## Θεωρία του Χάους



Σχήμα 1.14: Αρχική θέση του διπλού εκκρεμούς στην προσομοίωση με χρήση Matlab [13]



Σχήμα 1.15: Ο χώρος φάσεων με την τροχιά των δύο μαζών του διπλού εκκρεμούς [13]



**Σχήμα 1.16:** Οι γωνίες  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  των δύο μαζών του διπλού εκκρεμούς συναρτήσει του χρόνου κατά την διάρκεια της προσομοίωσης [13]

Άλλο ένα τέτοιο παράδειγμα χαοτικού μοντέλου είναι ο καιρός. Η ασφαλής πρόβλεψη του καιρού προϋποθέτει την επακριβή γνώση των αρχικών συνθηκών, κυρίως της θερμοκρασίας και της ατμοσφαιρικής πίεσης. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί λόγω των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά την διαδικασία της μέτρησης και επιπλέον επειδή η ακρίβεια των μετρήσεων είναι πεπερασμένη, καθώς τα πιο ακριβή θερμόμετρα και βαρόμετρα περιορίζονται σε μερικά δεκαδικά ψηφία. Συνεπώς θα έπρεπε να εφευρεθεί μία μηχανή να καταμετράει χωρίς σφάλματα και με ακρίβεια απείρων δεκαδικών ψηφίων τις δυο αυτές παραμέτρους. Επιπλέον, οι τιμές αυτές θα έπρεπε να είναι γνωστές για οποιοδήποτε σημείο της ατμόσφαιρας, κάτι το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο. Στην πραγματικότητα, οι μετρήσεις όχι μόνο γίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια αλλά λαμβάνουν χώρα σε σημεία που απέχουν αποστάσεις της τάξεως των χιλιομέτρων μεταξύ τους [3].

Το κλειδί για την κατανόηση της χαοτικής συμπεριφοράς έγκειται στην κατανόηση μιας διαδικασίας «τεντώματος» και «διπλώματος», η οποία συμβαίνει στον χώρο φάσεων. Η εκθετική απόκλιση γειτονικών τροχιών αποτελεί μια τοπική ιδιότητα,

καθόσον οι χαοτικοί ελκυστές έχουν πεπερασμένο μέγεθος και δύο τροχιές ενός χαοτικού ελκυστή δεν μπορούν να αποκλίνουν εκθετικά συνεχώς. Συνεπώς ο ελκυστής πρέπει κατά κάποιον τρόπο να αναδιπλώνεται στον εαυτό του. Ενώ οι τροχιές αποκλίνουν και ακολουθούν διαφορετικές κατευθύνσεις, βρίσκονται εν τέλει ξανά η μία πλησίον της άλλης, γεγονός το οποίο είναι εμφανές στα σχήματα 1.11, 1.12 και 1.15. Η διαδικασία αυτή του «τεντώματος» και «διπλώματος» των τροχιών επαναλαμβάνεται διαρκώς, δημιουργώντας συνεχώς νέα τεντώματα και νέες διπλώσεις μέσα σε άλλες διπλώσεις. Προκύπτει ότι ένας χαοτικός ελκυστής είναι επί της ουσίας ένα μορφοκλασματικό (fractal) αντικείμενο, το οποίο έχει τυπικά μη ακέραια κλασματική διάσταση και στο οποίο φαίνονται όλο και περισσότερες λεπτομέρειες όσο αυτό μεγαθύνεται [5].

Η ιδιότητα της ευαισθησίας των χαοτικών συστημάτων από τις αρχικές συνθήκες έχει ως αποτέλεσμα την περιορισμένη χρονικά πρόβλεψή τους, κάτι που είναι εμφανές και από την πρόβλεψη του καιρού (οι βραχυχρόνιες είναι συνήθως πιο αξιόπιστες). Ενώ, ωστόσο, τα χαοτικά συστήματα είναι ντετερμινιστικά, η γνώση των μελλοντικών καταστάσεων προσκρούει σε δύο αξεπέραστα εμπόδια. Αφενός οι αρχικές συνθήκες δεν είναι ποτέ εντελώς γνωστές λόγω των σφαλμάτων μέτρησης και αφετέρου τα υπολογιστικά προβλήματα καθιστούν αδύνατη μια μακρόχρονη πρόβλεψη. Αυτό συμβαίνει επειδή ο υπολογιστής θα πρέπει να εκτελεί πράξεις με αριθμούς που αποτελούνται από συνεχώς αυξανόμενα ψηφία, το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο. Συνεπώς, λόγω αποκοπής ψηφίων κατά την διαδικασία υπολογισμού θα υπεισέλθει ένα μικρό σφάλμα, το οποίο σταδιακά θα αυξηθεί εκθετικά και θα ακυρώσει τα αποτελέσματα της πρόβλεψης [5].

### 1.7 Ευστάθεια σημείων ισορροπίας

Όσον αφορά την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, αυτή ορίζεται ως εξής:

Ένα σημείο ισορροπίας (ή κρίσιμο σημείο)  $\mathbf{x}^*=(x_0,y_0)$  ονομάζεται ευσταθές (ή ευσταθές κατά Lyapunov), εάν ξεκινώντας από μια αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}(0)$  σε απόσταση  $\delta$  από αυτό, η τροχιά παραμένει σε απόσταση μικρότερη του  $\varepsilon$  για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ ώστε εάν } \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta, \text{ τότε } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \forall t \geq 0 \quad (11)$$



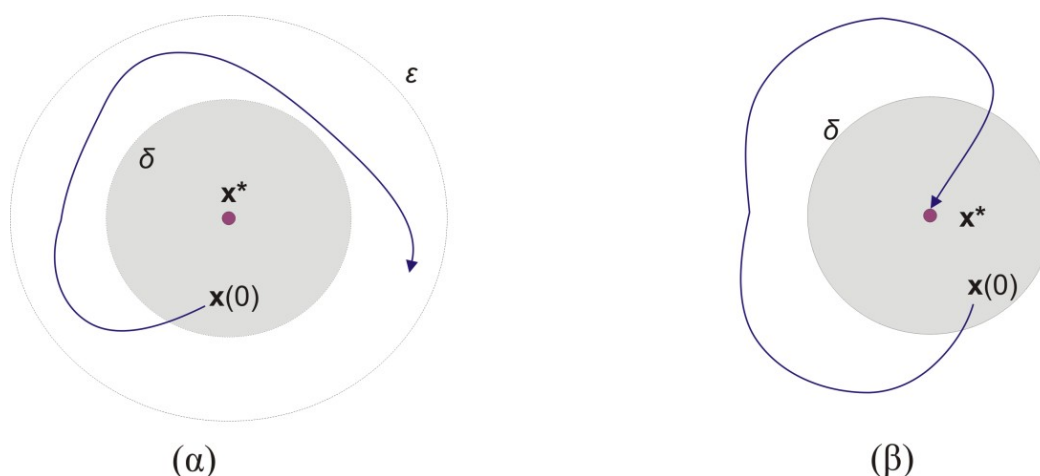
Εάν το σημείο δεν είναι ευσταθές, τότε καλείται ασταθές.

Επιπλέον, ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x}^*=(x_0,y_0)$  ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθές εάν υπάρχει γύρω από το σημείο μια περιοχή  $\Delta$ , με

$\Delta=\{x=(x,y), \|x-x^*\|<\delta\}$ , ώστε για κάθε αρχική συνθήκη  $x(0) \in \Delta$ , η τροχιά να τείνει προς το σημείο ισορροπίας και συνεπώς να ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0 \quad (12)$$

Αναφέρθηκε ότι τα σημεία ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος, τα οποία έλκουν τις τροχιές που ξεκινούν από τη γειτονιά τους ονομάζονται ελκυστές (attractors). Αντιθέτως, αν οι τροχιές, οι οποίες ξεκινούν από μια γειτονιά του σημείου ισορροπίας, απομακρύνονται από αυτό, τότε το σημείο ονομάζεται απωθητής (repeller) [14].



**Σχήμα 1.17:** Παραδείγματα ευστάθειας κατά Lyapunov (α) και ασυμπτωτικής ευστάθειας (β)

Για ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας  $x_0$  ενός συστήματος  $x' = F(x)$ , υπάρχει ενδιαφέρον για την εκτίμηση της περιοχής ευστάθειας του σημείου  $x_0$ , δηλαδή του υποσυνόλου εκείνου, το οποίο αποτελείται από τα αρχικά σημεία  $x(t \rightarrow 0)$ , τα οποία τείνουν ασυμπτωτικά προς το  $x_0$  για  $t \rightarrow \infty$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov [6]:

Έστω το σύστημα  $x' = F(x)$ , με  $F$  μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και  $E$  ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  που περιέχει ένα σημείο ισορροπίας  $x_0$ . Γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $V(x)$ , η οποία ονομάζεται **συνάρτηση Lyapunov**, για την οποία ισχύει ότι  $V(x_0) = 0$  και  $V(x) > 0$  για κάθε  $x \neq x_0$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα:

- Αν  $V'(x) \leq 0$  για  $x \in E$ , τότε το  $x_0$  είναι ευσταθές
- Αν  $V'(x) < 0$  για  $x \in E$ , τότε το  $x_0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές
- Αν  $V'(x) > 0$  για  $x \in E$ , τότε το  $x_0$  είναι ασταθές

Στο σχήμα 1.17 φαίνεται η ευστάθεια κατά Lyapunov, καθώς και η ασυμπτωτική ευστάθεια [14].

## 1.8 Η απεικόνιση του χάους

### 1.8.1 Ορισμός της χαοτικής απεικόνισης

Ο ορισμός της έννοιας του χάους καθιστά απαραίτητο την εισαγωγή των δύο ιδιοτήτων που μπορεί να εμφανίζει μια απεικόνιση, αλλά και γενικότερα ένα δυναμικό σύστημα [14].

α) Η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες

Μαθηματικά, μία απεικόνιση  $f$  σε έναν μετρικό χώρο  $X$  λέγεται ότι έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες, αν υπάρχει  $\delta > 0$ , έτσι ώστε για κάθε σημείο  $x_0$  του  $X$  και για  $\varepsilon > 0$  υπάρχει σημείο  $\hat{x}_0 \in X$ , με μετρική απόσταση μεταξύ των σημείων  $d(x_0, \hat{x}_0) < \varepsilon$  και  $n \geq 0$  τέτοιος ώστε  $d(x_n, \hat{x}_n) > \delta$ . Συνεπώς μια περιοχή οποιουδήποτε σημείου  $x_0$  περιέχει τουλάχιστον ένα άλλο σημείο  $\hat{x}_0$ , του οποίου η τροχιά απέχει από την τροχιά του  $x_0$  απόσταση μεγαλύτερη από έναν σταθερό αριθμό ύστερα από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Με αυτόν τον τρόπο, παρά την αρχική εγγύτητα των δύο τροχιών, αυτές θα απομακρυνθούν τελικά εκθετικά ή μια από την άλλη.

β) Η τοπολογική μεταβατικότητα

Μία απεικόνιση  $f$  σε ένα αναλλοίωτο σύνολο  $S$  λέγεται ότι είναι τοπολογικά μεταβατική αν για δύο οποιαδήποτε ανοιχτά υποσύνολα  $U$  και  $V$  του  $S$  υπάρχει  $n \geq 0$  τέτοιος ώστε  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ . Στην περίπτωση αυτή, από κάθε περιοχή του  $S$  ξεκινάει τουλάχιστον μία τροχιά της  $f$  που περνάει από κάθε περιοχή του συνόλου  $S$  και πλησιάζει αυθαίρετα κοντά σε κάθε σημείο του  $S$ . Η τροχιά αυτή καλείται πυκνή στο  $S$ . Αν η ιδιότητα αυτή ισχύει για κάθε  $n \geq n_0$ , τότε καλείται τοπολογική ανάμιξη.

Σε περίπτωση που ισχύουν και οι δύο παραπάνω ιδιότητες (α και β) στην απεικόνιση ενός αναλλοίωτου συνόλου, τότε η απεικόνιση αυτή είναι χαοτική.

### 1.8.2 Εκθέτες Lyapunov

Ένας τρόπος να διαπιστωθεί πρακτικά αν μια απεικόνιση είναι χαοτική ή όχι συνίσταται στον έλεγχο της ικανοποίησης της μία εκ των δύο προαναφερθεισών ιδιοτήτων, και μάλιστα της ιδιότητας (α) της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες. Για τον σκοπό αυτό ορίζεται ως εκθέτης Lyapunov  $\lambda$ , ο οποίος δίνει τον ρυθμό της εκθετικής απομάκρυνσης γειτονικών τροχιών [14].

Έστω μια απεικόνιση  $f: R \rightarrow R$  και δύο τροχιές, οι οποίες εκκινούν από σημεία  $x_0$  και  $x_0 + \varepsilon$ . Σε περίπτωση που ύστερα από  $n$  επαναλήψεις, η απόσταση μεταξύ των τροχιών έχει αυξηθεί εκθετικά από  $\varepsilon$  σε  $\varepsilon e^{n\lambda(x_0)}$ , τότε ισχύει ότι  $\varepsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|$ . Για  $n \rightarrow \infty$  προκύπτει ότι:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)| \right) \quad (13)$$

Στην παραπάνω σχέση (13) ισχύει ότι  $(f^n)'(x_0) = f'(x_0) \times f'(x_1) \times \dots \times f'(x_{n-1})$ , όπου  $x_i = f^i(x_0)$ . Καθότι το όριο στην σχέση (13) δεν είναι πάντοτε υπαρκτό, ο εκθέτης Lyapunov μπορεί για μία μονοδιάστατη απεικόνιση  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  να οριστεί ως εξής:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (14)$$

όπου το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\lambda}(x_n)$  δηλώνει το μέγιστο της συσσώρευσης της ακολουθίας  $\{x_n\}$ .

Σε περίπτωση που ο εκθέτης Lyapunov είναι θετικός ( $\lambda(x_0) > 0$ ) για τροχιές που εκκινούν από γειτονικές περιοχές, τότε οι τροχιές απομακρύνονται εκθετικά. Αν, επιπλέον, το σύνολο των αρχικών συνθηκών είναι πυκνό, τότε το σύστημα έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες και η απεικόνισή του είναι χαοτική. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή για  $\lambda(x_0) < 0$ , τότε η απεικόνισή δεν είναι χαοτική. Για ένα σημείο ισορροπίας ισχύει ότι  $\lambda(x_0) = \ln|f'(x_0)|$  και επομένως το πρόσημο του εκθέτη Lyapunov είναι εξαρτώμενο από την ευστάθειά του. Σημειώνεται ότι γενικά οι εκθέτες Lyapunov μιας απεικόνισης είναι αρκετά δύσκολο να υπολογιστούν με αναλυτικό τρόπο. Γι' αυτόν τον λόγο πραγματοποιείται συνήθως αριθμητικός υπολογισμός τους [14].

Η λογιστική απεικόνιση είναι μια πολυωνυμική χαρτογράφηση δύο βαθμών ελευθερίας, η οποία συχνά αναφέρεται ως ένα αρχέτυπο παράδειγμα του πως μια σύνθετη, χαοτική συμπεριφορά μπορεί να προκύψει από πολύ απλές μη γραμμικές δυναμικές εξισώσεις. Μαθηματικά, η λογιστική απεικόνιση δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

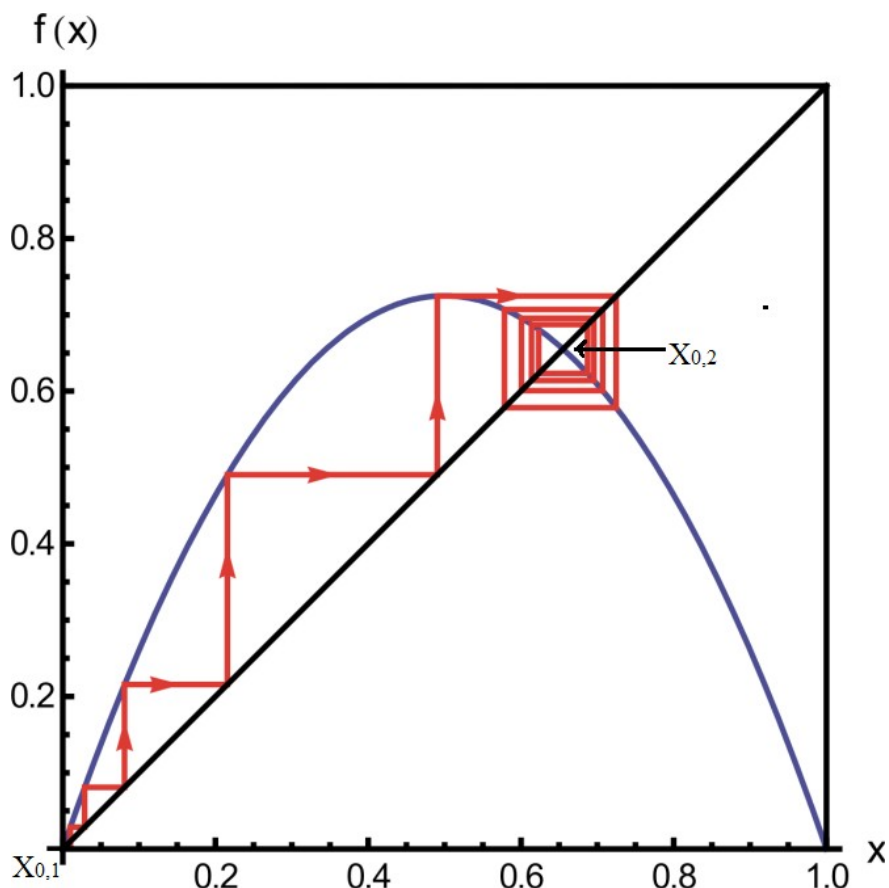
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (15)$$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης  $f(x) = rx(1-x)$  φαίνεται στο σχήμα 1.18. Επειδή ισχύει ότι για  $r \in [0,4]$  κάθε  $x_n \in [0,1]$  απεικονίζεται στο  $x_{n+1} \in [0,1]$ , το διάστημα αυτό της παραμέτρου  $r$  είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος. Τα σταθερά σημεία της (15) προκύπτουν για  $f(x_0) = x_0$ , και επομένως τα δύο αυτά σημεία είναι  $x_{0,1} = 0$  και  $x_{0,2} = (r-1)/r$ . Επειδή ισχύει πρακτικά ότι η ευστάθεια ενός σταθερού σημείου ισορροπίας  $x_0$  εξαρτάται από την παράγωγο της  $f$  στο σημείο  $x_0$  και συγκεκριμένα εάν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη [14]:

$$|\dot{\lambda} f'(x_0)| < 1 \quad (16)$$

προκύπτει ότι το  $x_{0,1}$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας όταν ισχύει  $-1 < r < 1$  και αντίστοιχα το  $x_{0,2}$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας όταν ισχύει  $r_0 < r < r_1$ , για  $r_0 = 1$  και

$r_1=3$ . Επομένως στο σχήμα 1.18 ένα σημείο που εκκινεί από την περιοχή του  $x_{0,1}$ , το οποίο είναι ασταθές σημείο ισορροπίας φαίνεται να τείνει ασυμπτωτικά προς το σημείο  $x_{0,2}$ , το οποίο αποτελεί ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας [14].

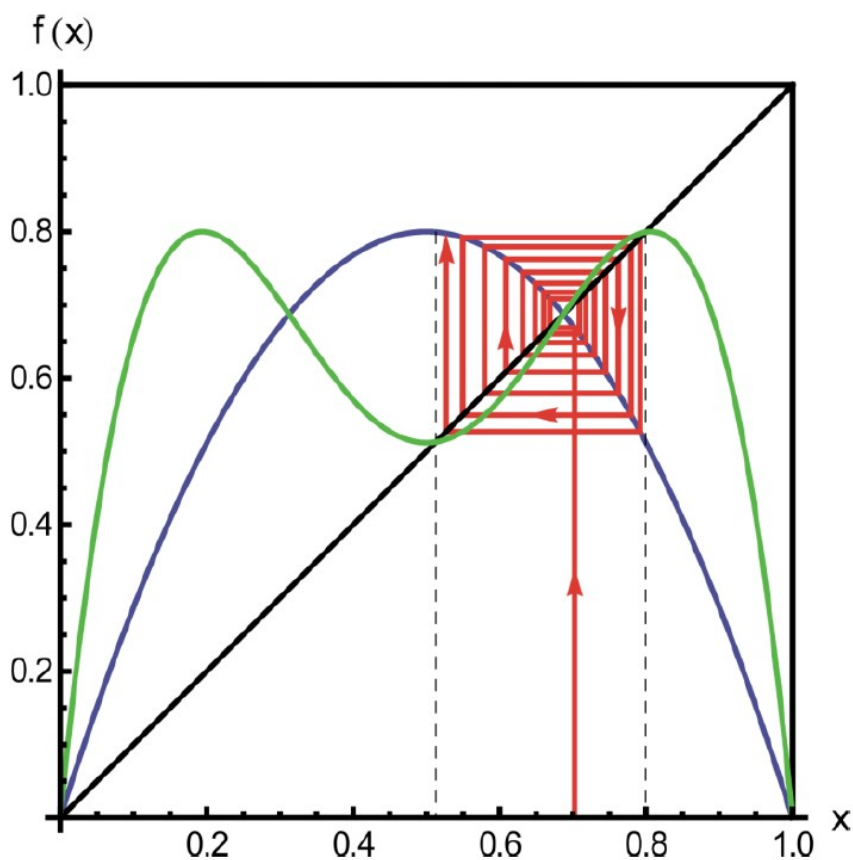


**Σχήμα 1.18:** Η λογιστική απεικόνιση  $f(x)$  με μπλε για  $r = 2,9$ , ενώ φαίνονται τα δύο σημεία ισορροπίας  $x_{0,1}$  και  $x_{0,2}$

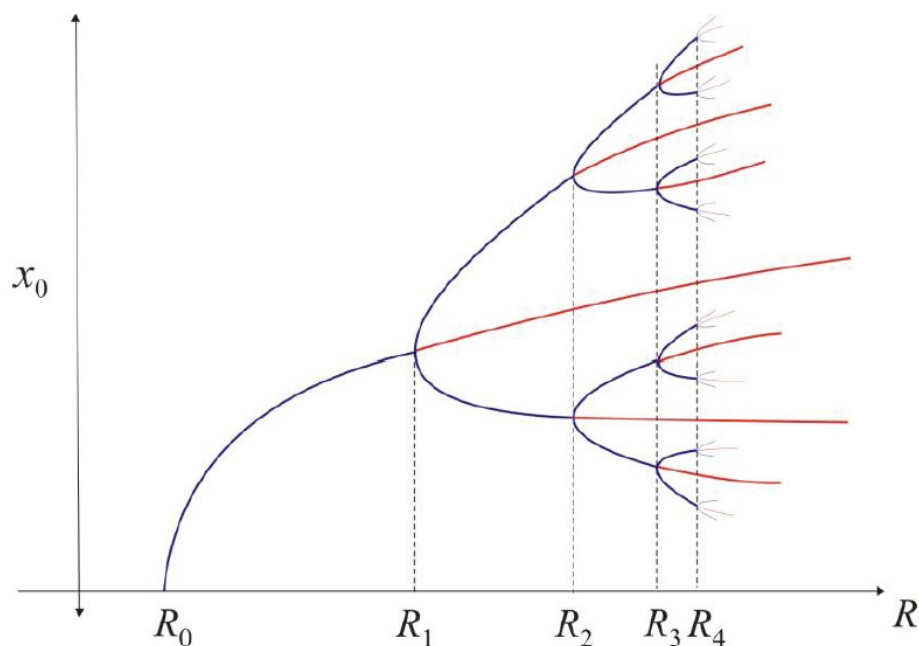
Για μεγαλύτερες τιμές του  $r$  ( $r > r_1$ ) αποδεικνύεται ότι το  $x_{0,2}$  χάνει την ευστάθειά του και εμφανίζεται μια περιοδική τροχιά περιόδου 2. Αυτό φαίνεται με χρήση της συνθήκης  $f^2(p) = p$ , μέσω της οποίας προκύπτουν δύο περιοδικά σημεία περιόδου 2 που ανήκουν στην ίδια περιοδική τροχιά, και η οποία είναι ευσταθής για  $r_1 < r < r_2$ , με  $r_2 = 3,45$ . Στο σχήμα 1.19 αποτυπώνονται οι απεικονίσεις  $f(x)$  και  $f^2(x)$  για  $r = 3,2$ , ενώ φαίνεται πως ένα σημείο που εκκινεί πλησίον του ασταθούς  $x_{0,2}$  καταλήγει σε μια ευσταθή περιοδική τροχιά περιόδου 2 [14].

Με την περαιτέρω αύξηση του  $r$ , το ανωτέρω παρατηρηθέν φαινόμενο συνεχίζεται. Δηλαδή, για  $r > r_2$  η περιοδική τροχιά περιόδου 2 γίνεται ασταθής και εμφανίζεται μια

ευσταθής περιοδική τροχιά περιόδου 4 για  $r_2 < r < r_3$ , κ.ο.κ. Το φαινόμενο αυτό καλείται διακλάδωση διπλασιασμού περιόδου και φαίνεται στο σχήμα 1.20 [14].

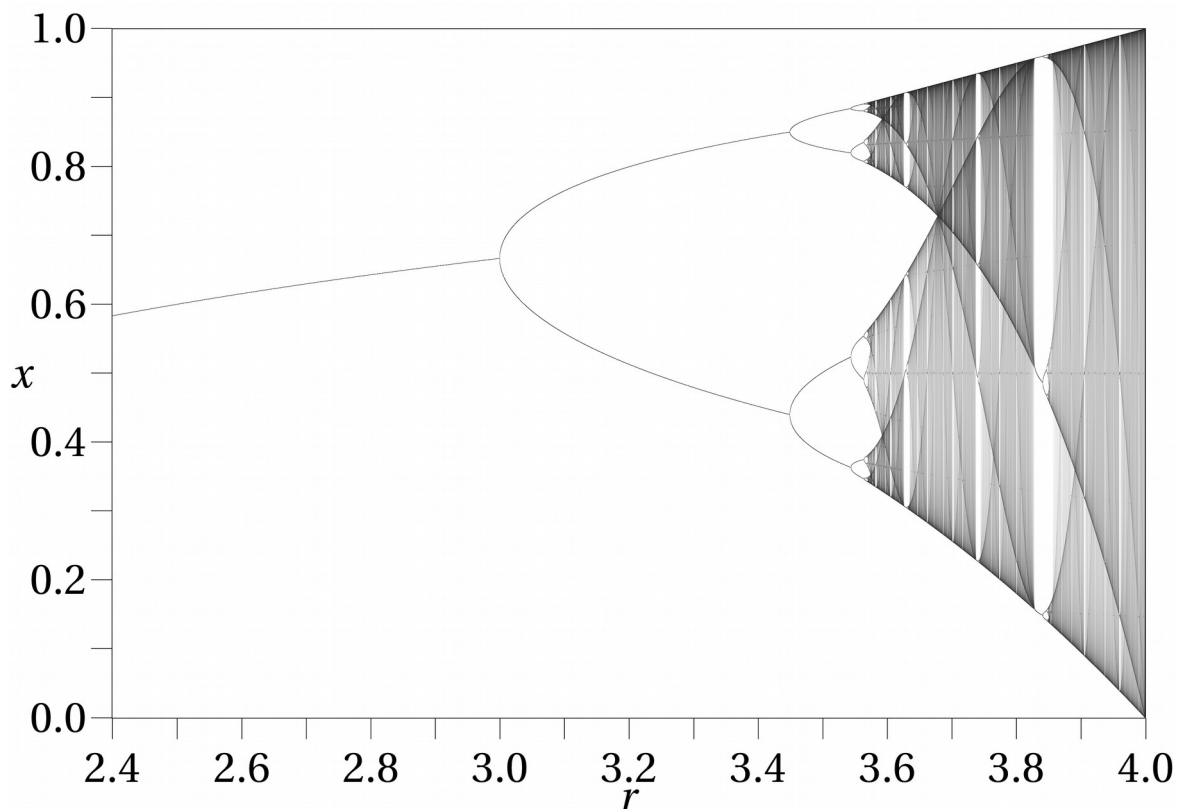


**Σχήμα 1.19:** Η λογιστική απεικόνιση  $f(x)$  με μπλε και η απεικόνιση  $f^2(x)$  για παράμετρο  $r = 3,2$



**Σχήμα 1.20:** Σχηματική απεικόνιση της διακλάδωσης διπλασιασμού περιόδου, όπου οι μπλε καμπύλες δηλώνουν ευσταθή περιοδικά σημεία ενώ οι κόκκινες ασταθή

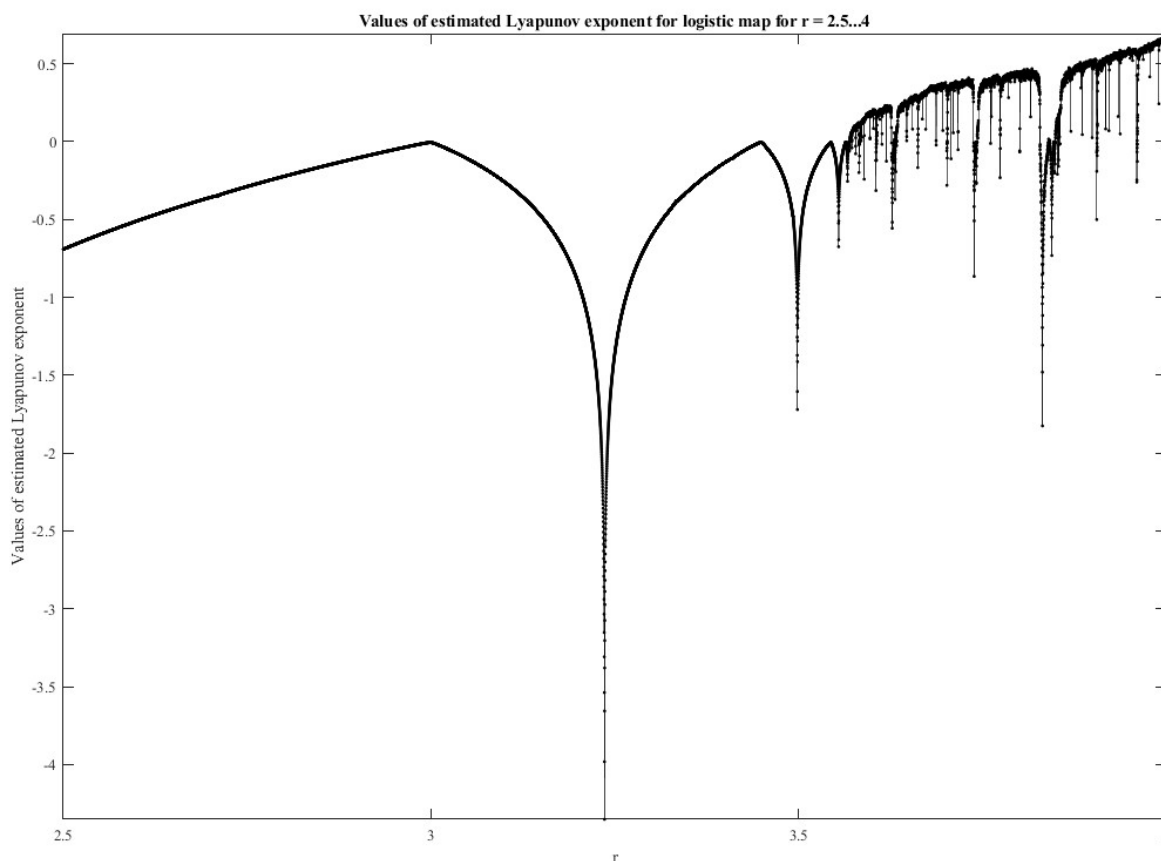
Έχει βρεθεί ότι οι διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου της λογιστικής απεικόνισης συνεχίζονται έως την τιμή  $r = r_{\infty} \cong 3,57$ , όπου όλες οι περιοδικές τροχιές περιόδου  $2^n$  έχουν εμφανιστεί και έχουν γίνει ασταθείς. Πέραν της τιμής αυτής η λογιστική απεικόνιση αρχίζει να εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά, η οποία αποτυπώνεται στο σχήμα 1.21 [1]. Διαφαίνεται επίσης ότι στην χαοτική περιοχή ( $r_{\infty} < r < 4$ ) υπάρχουν μικρές περιοχές ευστάθειας άλλων περιοδικών τροχιών [14].



**Σχήμα 1.21:** Διάγραμμα διπλασιασμού περιόδου της λογιστικής απεικόνισης

Στο κάτωθι σχήμα 1.22 φαίνεται με την χρήση του Matlab η απεικόνιση της μεταβολής του εκθέτη Lyapunov για την λογιστική απεικόνιση για  $r \in [2, 5, 4]$  [15]. Είναι εμφανές ότι ο εκθέτης γίνεται ως επί το πλείστον θετικός για  $r > r_\infty$ , το οποίο υποδεικνύει χαοτική απεικόνιση, ενώ υπάρχουν ταυτόχρονα κάποιες μικρές ενδιάμεσες περιοχές για τις οποίες ο εκθέτης είναι αρνητικός, οι οποίες αντιστοιχούν στις περιοχές ευστάθειας του σχήματος 1.21 [14].





**Σχήμα 1.22:** Εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης ευστάθειας για  $r \in [2,5, 4]$

Από το παραπάνω παράδειγμα έγινε εμφανές ότι η μελέτη των εκθετών Lyapunov ενός δυναμικού συστήματος αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για το αν αυτό το σύστημα είναι χαοτικό ή όχι. Ισχύει ότι ένα ντετερμινιστικό δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό όταν έχει τουλάχιστον έναν θετικό εκθέτη Lyapunov. Ειδικότερα, ισχύει ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο εκθέτης Lyapunov σε μια περιοχή ενός δυναμικού συστήματος, τόσο χαμηλότερη είναι η προβλεψιμότητα σε αυτήν την περιοχή. Καθώς ο ελκυστής ευρίσκεται είναι φραγμένος σε υποχώρο του χώρου φάσεων, δεν είναι δυνατόν να υπάρξει εκθετική απόκλιση των τροχιών προς όλες τις κατευθύνσεις. Όταν παρατηρούνται συστολές και αναδιπλώσεις, ο εκθέτης Lyapunov είναι κατά κανόνα αρνητικός [5].

Τα πρόσημα των εκθετών Lyapunov προσφέρουν μια ποιοτική εικόνα της δυναμικής ενός συστήματος, ενώ σε ένα τρισδιάστατο χώρο φάσεων οι πιθανοί τύποι ελκυστών και τα αντίστοιχα πρόσημα των εκθετών Lyapunov αυτών έχουν ως εξής [5]:

- Οριακό σημείο με πρόσημα (-,-,-)

- Οριακός κύκλος με πρόσημα (0,-,-)
- Δισδιάστατος τόρος με πρόσημα (0,0,-)
- Παράξενος ελκυστής με πρόσημα (+,0,-)

Σε περίπτωση που ένα χαοτικό σύστημα έχει δύο ή περισσότερους θετικούς εκθέτες Lyapunov τότε θεωρείται ότι επικρατεί υπερχάος.

Η δυναμική ενός συστήματος  $n$  διαστάσεων περιγράφεται από  $n$  εκθέτες Lyapunov. Αν υποθεθεί μια διαταραχή  $\Delta V(0)$  ενός αρχικού όγκου  $V$  στο χώρο των φάσεων τότε η εξέλιξη της διαταραχής δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\Delta V(t) = \Delta V(0) e^{Ct} \quad (17)$$

όπου  $C = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$  είναι το άθροισμα των εκθετών Lyapunov. Για ένα καταναλίσκον σύστημα (και επομένως χαοτικό) θα ισχύει ότι  $\Delta V > 0$  όταν  $t$  επειδή ο όγκος  $\Delta V$  συστέλλεται. Συνεπώς προκύπτει ότι  $C < 0$ , δηλαδή το άθροισμα των εκθετών Lyapunov ενός χαοτικού συστήματος είναι αρνητικό. Αντιθέτως, για ένα διατηρητικό σύστημα όπου  $\Delta V(t) = \Delta V(0)$  θα είναι  $C = 0$  [5].

### 1.8.3 Προσδιορισμός εκθετών Lyapunov

Εάν υποθεθεί ένα δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από συνήθεις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του τύπου:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, c) \quad (18)$$

όπου  $x(t) \in R^n$  το διάνυσμα των δυναμικών μεταβλητών και  $c$  το διάνυσμα παραμέτρων, τότε η εξέλιξη μιας μικρής διαταραχής της τροχιάς του  $x(t)$  θα περιγράφεται από το  $n$ -διάστατο γραμμικό σύστημα:

$$\frac{d\xi}{dt} = DF(x(t), c) \times \xi \quad (19)$$

όπου  $DF(x(t))$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας με στοιχεία  $[DF(x(t))]_{ij}$  με  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Η (19) λύνεται ως εξής:

$$\xi(t) = A(t, 0)\xi(0) \quad (20)$$

όπου ο πίνακας  $A(t, 0)$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dA}{dt} = DF(x(t)) \times A \quad (21)$$

με αρχική συνθήκη  $A(0,0) = I$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας. Εν συνεχεία λαμβάνεται ο συμμετρικός πίνακας  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \{ [A(t)^T A(t)]^{1/2} \} \quad (22)$$

όπου  $A(t)^T$  είναι ο ανάστροφος του  $A$ , ενώ οι ιδιοτιμές του  $\Lambda$  έχουν την μορφή  $e^{\lambda_j t}$  όπου  $\lambda_j = 1, 2, \dots, n$  είναι οι εκθέτες Lyapunov [5].

#### 1.8.4 Διαστάσεις των παράξενων ελκυστών

Ένας παράξενος ελκυστής ενός χαοτικού συστήματος αποτελεί ένα fractal αντικείμενο (τα fractals αναλύονται στο κεφ. 2), ενώ η διάσταση του είναι συνήθως κλασματική, δηλαδή μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση και μικρότερη από την διάσταση του αντίστοιχου Ευκλείδειου χώρου. Ως εκ τούτου φαίνεται πως η διάσταση του ελκυστή δείχνει τον ελάχιστο αριθμό των μεταβλητών του συστήματος. Οι πιο γνωστές διαστάσεις των παράξενων ελκυστών είναι η διάσταση χωρητικότητας, η διάσταση πληροφορίας και η διάσταση συσχέτισης.

Εάν θεωρηθεί ένα σύνολο σημείων  $S$  στον χώρο  $R^n$  και  $N(\varepsilon)$  ο ελάχιστος αριθμός υπερκύβων με πλευρά μήκους  $\varepsilon$  και όγκου  $\varepsilon^n$  που απαιτούνται για την κάλυψη των σημείων του συνόλου, τότε η διάσταση χωρητικότητας  $D_0$  υπολογίζεται παίρνοντας το όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$  από την ακόλουθη σχέση [5]:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \quad (23)$$

Η διάσταση  $D_0$  επί της ουσίας προσδιορίζει την γεωμετρική μορφή του ελκυστή μη λαμβάνοντας υπόψιν τη συχνότητα με την οποία η τροχιά διέρχεται από μια περιοχή του ελκυστή. Αντιθέτως, η διάσταση πληροφορίας εξαρτάται από την σχετική συχνότητα που μια τροχιά διέρχεται από έναν στοιχειώδες υπερκύβο.

Εάν στο ίδιο σύνολο  $S$  που προαναφέρθηκε ο  $i^{\text{ος}}$  υπερκύβος έχει  $N_i$  σημεία, οπότε η αντίστοιχη πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο στον δοσμένο υπερκύβο είναι  $P_i = N_i/N$ , η διάσταση πληροφορίας ορίζεται ως εξής:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \log P_i}{\log(\varepsilon)} \quad (24)$$

όπου το  $\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \log P_i$  δηλώνει την πληροφορία που χρειάζεται για να καθοριστεί η κατάσταση του συστήματος με ακρίβεια  $\varepsilon$ . Τονίζεται πως όταν  $P_i = \frac{1}{N} \forall i$ , τότε ισχύει ότι  $D_1 = D_0$  αλλά όταν τα  $P_i$  δεν είναι ίσα μεταξύ τους, το οποίο είναι ο κανόνας, τότε  $D_1 < D_0$ .

Τέλος, διάσταση συσχέτισης ορίζεται ως εξής:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2}{\log(\varepsilon)} \quad (25)$$

όπου  $P_i^2$  η είναι η πιθανότητα να βρεθούν δύο σημεία σε ένα δοσμένο  $n$ -διάστατο υπερκύβο. Σε αρκετούς κλάδους της επιστήμης, όπως η μετεωρολογία, η μηχανική των ρευστών, η γεωφυσική και η οικονομία χρησιμοποιείται η διάσταση συσχέτισης. Γενικώς ισχύει ότι  $D_2 \leq D_1 \leq D_0$  [5].

## 2. FRACTALS

### 2.1 Εισαγωγή και ορισμός των fractals

Το χάος έχει πολλές πλευρές, μία εκ των οποίων, όπως ειπώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Ωστόσο, αν θεωρηθεί η λογιστική εξίσωση (15) και επιλεγεί  $r = 1,2$ , τότε δεν προκύπτει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αντιθέτως, οι τροχιές τείνουν προς ένα συγκεκριμένο σημείο (ελκυστή), ο οποίος καλείται παράξενος ελκυστής (strange attractor) σε περίπτωση που (αντί για σημείο) η τροχιά καταλαμβάνει ολόκληρη επιφάνεια χωρίς συγκεκριμένη διάταξη. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου ελκυστή αποτελεί ο ελκυστής του Lorenz (σχήμα 1.11), ο οποίος ανακαλύφθηκε από τον ίδιο όταν μελετούσε τα ατμοσφαιρικά δυναμικά και χρησιμοποίησε τις εξισώσεις (8).

Άλλος ένας γνωστός παράξενος ελκυστής είναι αυτός του Rossler (σχήμα 1.12), ο οποίος βασίζεται στις εξισώσεις (9). Όσο η τιμή  $a$  στις εξισώσεις (9) αυξάνεται, τόσο το σύστημα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς ελκυστές. Εν συνεχεία, οι ελκυστές γίνονται τέσσερις, κατόπιν οχτώ και συνεχίζουν να διπλασιάζονται μέχρι την εμφάνιση του χάους (σχήματα 1.21 και 1.22). Αυτή είναι η Θεωρία των Διχαλοδρομήσεων (Bifurcation Theory), ενώ η τιμή  $a$ , η οποία ονομάζεται αργή μεταβλητή, θα πρέπει να υπερβεί ένα όριο, ώστε να εμφανιστούν πολλαπλές λύσεις οι οποίες να προκαλούν διακλάδωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων [3].

Μία σημαντική ανακάλυψη συντελέστηκε από τον μαθηματικό Mitchell Feigenbaum όταν μελετούσε ένα διάγραμμα Διχαλοδρομήσεων. Αρχικά συσχέτισε την πρώτη σταθερά Feigenbaum με τις διακλαδώσεις διπλασιασμού περιόδου στην λογιστική απεικόνιση, και επίσης έδειξε ότι αυτό ισχύει για όλες τις μονοδιάστατες απεικονίσεις με ένα μοναδικό τετραγωνικό μέγιστο. Επισημαίνεται ότι η πρώτη σταθερά Feigenbaum  $\delta$  ορίζεται ως ο περιοριστικός λόγος κάθε διαστήματος

διακλάδωσης προς το επόμενο μεταξύ κάθε διπλασιασμού περιόδου σε μία μονοδιάστατη απεικόνιση του τύπου  $x_{i+1} = f(x_i)$ , όπου η  $f(x)$  είναι μία συνάρτηση που εμπεριέχει την παράμετρο διπλασιασμού  $\alpha$ . Δίνεται δε από τον ακόλουθο τύπο:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} \quad (26)$$

όπου  $a_n$  είναι τιμές του  $\alpha$  στην  $n$ -οστή περίοδο διπλασιασμού. Ο αριθμός αυτός είναι γνωστός ως η σταθερά του Feigenbaum, και βρέθηκε ότι είναι ίση με  $\delta = 4,669202\dots$ . Συνεπώς ο Feigenbaum ανακάλυψε την ακριβή κλίμακα αυτο-ομοιότητας του διαγράμματος Διχαλοδρομήσεων, καθώς όταν σμίκρυνε μία ομάδα διχάλων 4,669202 φορές, γινόταν όμοια με την αμέσως επόμενη ομάδα διχάλων που εμφανίζονταν. Ερευνώντας και διαγράμματα άλλων εξισώσεων διαπίστωσε ότι ισχύει παντού ο αριθμός  $\delta$ . Ανακάλυψε επομένως ότι το διάγραμμα Διχαλοδρομήσεων διαθέτει αυτο-ομοιότητα. Ο ίδιος πρότεινε την  $\delta$  ως μια παγκόσμια σταθερά, η οποία συναντάται και σε άλλες μονοδιάστατες απεικονίσεις, που εμφανίζουν ένα μέγιστο, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις [1, 14].

Τα fractals βασίζονται επί της ουσίας στην ιδέα της αυτο-ομοιότητας. Είναι γεωμετρικά σχήματα τα οποία έχουν την ίδια μορφή σε όλες τις κλίμακες. Ένας ακριβής ορισμός για τα fractals είναι δύσκολο να δοθεί καθώς μπορεί να είναι αντικείμενα διαφόρων τύπων, αλλά συνήθως θεωρείται ότι τα fractals προκύπτουν από επαναλαμβανόμενες επαναλήψεις ενός μετασχηματισμού. Με άλλα λόγια, τα fractals είναι μαθηματικά αντικείμενα που μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(A_0) \quad (27)$$

όπου το  $A_0$  είναι ένα αρχικό αντικείμενο και:

$$\tau^n = \underbrace{\tau * \tau * \dots * \tau}_{n \text{ φορές}} \quad (28)$$

είναι οι επαναλήψεις του  $\tau$ . Τα fractals δημιουργούνται κατόπιν υπολογισμών και απεικόνισης μιας σειράς επαναλήψεων  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , όπου  $A_n = \tau(A_{n-1})$ . Από την εξίσωση (27) φαίνεται πως τα fractals ικανοποιούν την εξίσωση μη μεταβλητότητας:

$$A = \tau(A) \quad (29)$$

το οποίο τους δίνει μια ιδιότητα η οποία αναφέρεται ως δυνατότητα αυτο-μετασχηματισμού και οδηγεί στις γνωστές ιδιότητες ότι τα fractals είναι ασαφή αντικείμενα με άπειρη λεπτομέρεια, η οποία αποκαλύπτεται ξανά και ξανά όσο αυτά μεγαλώνονται [16].

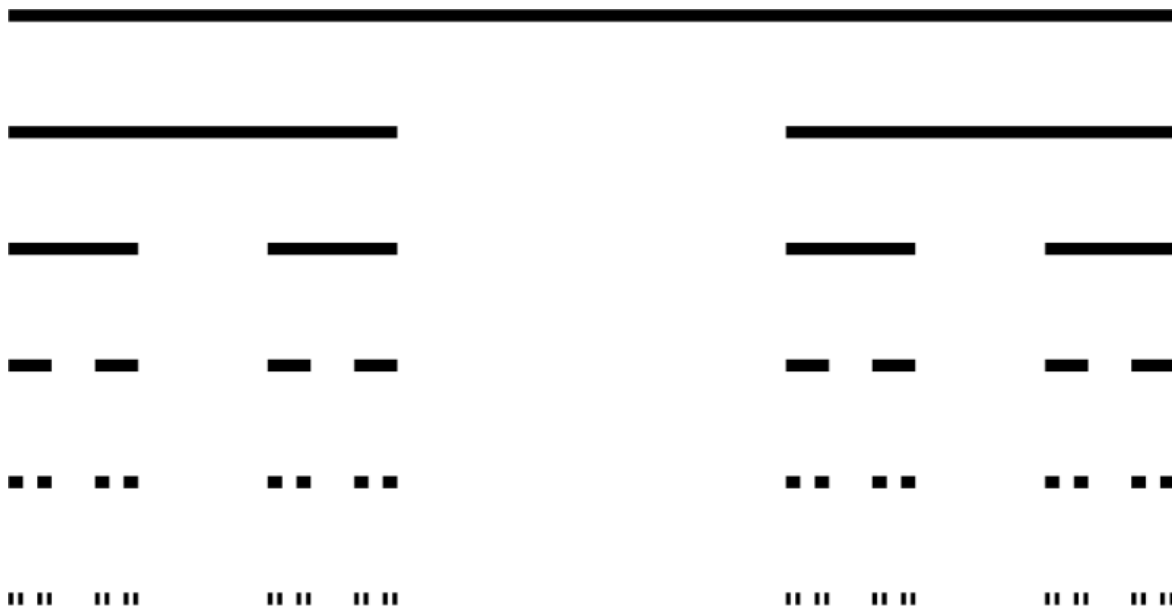
Εάν για παράδειγμα ληφθεί ένας κύκλος και μεγεθυνθεί ένα κομμάτι αυτού, τότε θα αρχίζει να ομοιάζει με ευθεία γραμμή. Με παρόμοιο τρόπο, η μεγέθυνση ενός τμήματος μίας σφαίρας θα το κάνει να ομοιάζει με επίπεδο. Συνεπώς ο κύκλος και η σφαίρα δεν αποτελούν fractals. Ενώ η αυτο-ομοιότητα είναι ένα χαρακτηριστικό των πιο απλών fractals, δεν είναι απαραίτητο όλα τα fractals να είναι όμοια.

Για να γίνει κατανοητή αυτή η ομοιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα ενός δέντρου. Ένα κλαδί αυτού, συγκρινόμενο με το όλο δέντρο, οδηγεί στο ότι είναι παρόμοια μεταξύ τους. Ένα μεγαλύτερο ή ένα μικρότερο κλαδί ομοιάζει επίσης με το δέντρο και με το κλαδί. Δηλαδή, τα μέλη που απαρτίζουν το δέντρο είναι όμοια με το ίδιο το δέντρο. Άλλα παραδείγματα αποτελούν το κουνουπίδι και το μπρόκολο, τα οποία αποτελούνται από κλαδιά που μοιάζουν με μικρά κουνουπίδια και μπρόκολα αντίστοιχα, τα οποία με την σειρά τους απαρτίζονται από ακόμα μικρότερα κλαδιά, όμοια με το όλο φυτό [3].

## 2.2 Το σύνολο Cantor

Ενδεχομένως το πιο γνωστό fractal είναι το σύνολο Cantor. Ένα σύνολο ονομάζεται σύνολο Cantor αν είναι: α) συμπαγές, β) τέλειο, και γ) πουθενά πυκνό. Συμπαγές σύνολο είναι αυτό που είναι κλειστό και φραγμένο. Το τέλειο σύνολο είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία, ενώ το πουθενά πυκνό σύνολο δεν έχει εσωτερικά σημεία. Το σύνολο Cantor φαίνεται μέσα από το παράδειγμα του μεσαίου τρίτου. Αυτό λαμβάνεται παίρνοντας το κλειστό διάστημα  $I = S_0 = [0, 1]$  και αφαιρώντας το μεσαίο τρίτο, δηλαδή το ανοιχτό διάστημα  $(1/3, 2/3)$ , κρατώντας επομένως τα κλειστά διαστήματα  $I_0 = [0, 1/3]$  και  $I_1 = [2/3, 1]$ . Έτσι απομένει το

σύνολο  $S_1 = I_0 \cap I_1$ . Εν συνεχεία από το καθένα από τα διαστήματα  $I_0$  και  $I_1$  αφαιρείται και πάλι το μεσαίο τρίτο και ούτω καθεξής. Έτσι προκύπτει το σχήμα 2.1 που φαίνεται παρακάτω [14].



Σχήμα 2.23: Το σύνολο Cantor του μεσαίου τρίτου

### 2.3 Η καμπύλη Koch και το τετράγωνο Koch

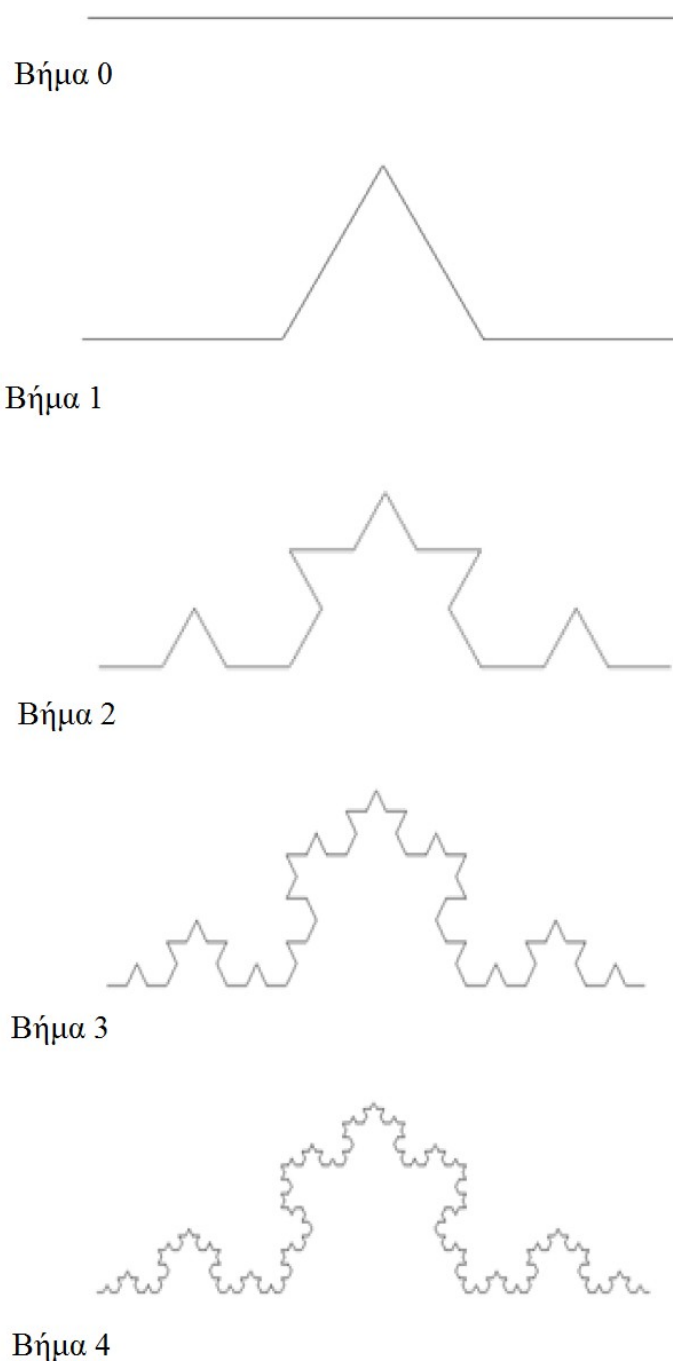
Άλλο ένα γνωστό σετ από fractals είναι η καμπύλη Koch. Ο Helge von Koch πρώτος επινόησε την ομώνυμη καμπύλη το 1904, η οποία κατασκευάζεται ως εξής:

- Θεωρείται ένα μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα (βήμα 0)
- Το ευθύγραμμο τμήμα χωρίζεται σε τρία ίσα μέρη και το μεσαίο τμήμα αφαιρείται προσθέτοντας στη θέση του δυο άλλα τμήματα μήκους  $1/3$  σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου (βήμα 1)
- Η κατασκευή συνεχίζεται αφαιρώντας από κάθε ευθύγραμμο τμήμα της τεθλασμένης γραμμής που έχει δημιουργηθεί το μεσαίο τρίτο του και τοποθετώντας στη θέση του δυο ίσα τμήματα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου (βήματα 2, 3, 4, ...)



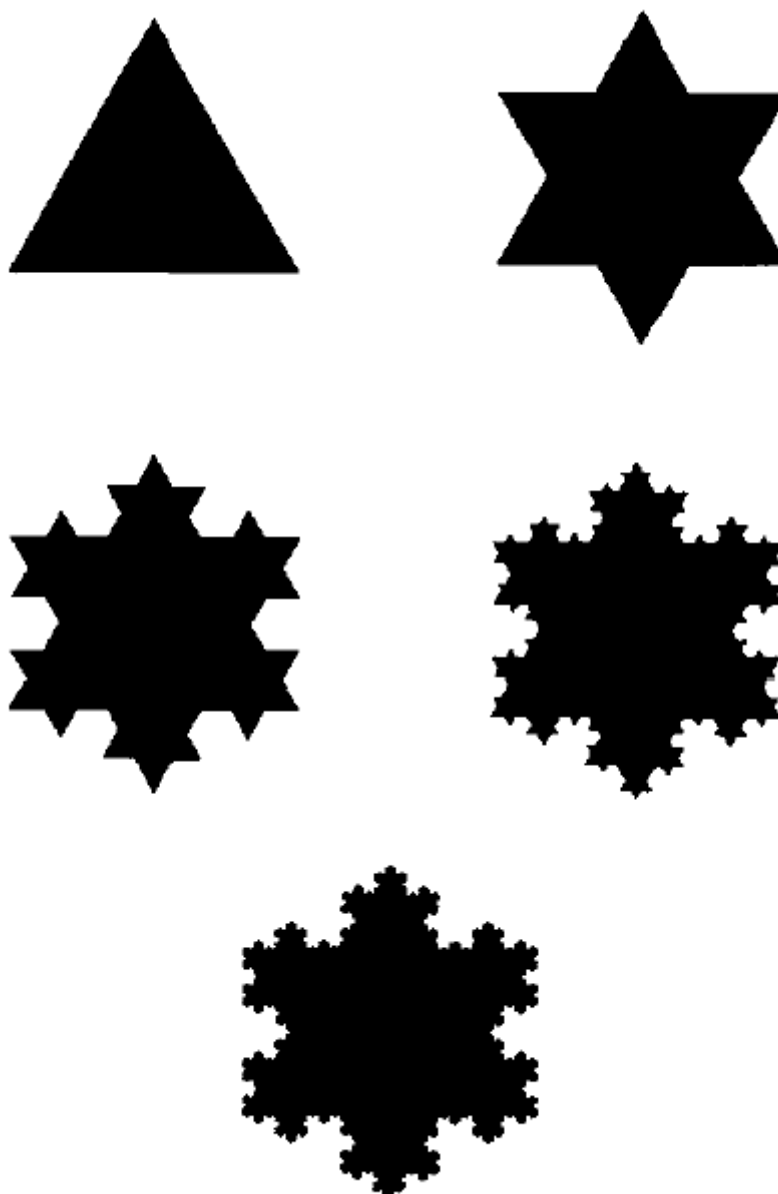
## Θεωρία του Χάους

Καθώς τα βήματα τείνουν στο άπειρο, σχηματίζεται μια απείρως πολύπλοκη καμπύλη. Τα βήματα 0 έως 4 αποτυπώνονται στο σχήμα 2.2 [16].



**Σχήμα 2.24:** Η καμπύλη Koch και τα βήματα για την κατασκευή της

Με την ίδια λογική μπορεί να κατασκευαστεί η χιονονιφάδα Koch εφαρμόζοντας τα βήματα που περιγράφηκαν προηγουμένως σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα ενός ισόπλευρου τριγώνου. Στο σχήμα 2.3 φαίνεται το αποτέλεσμα [16].

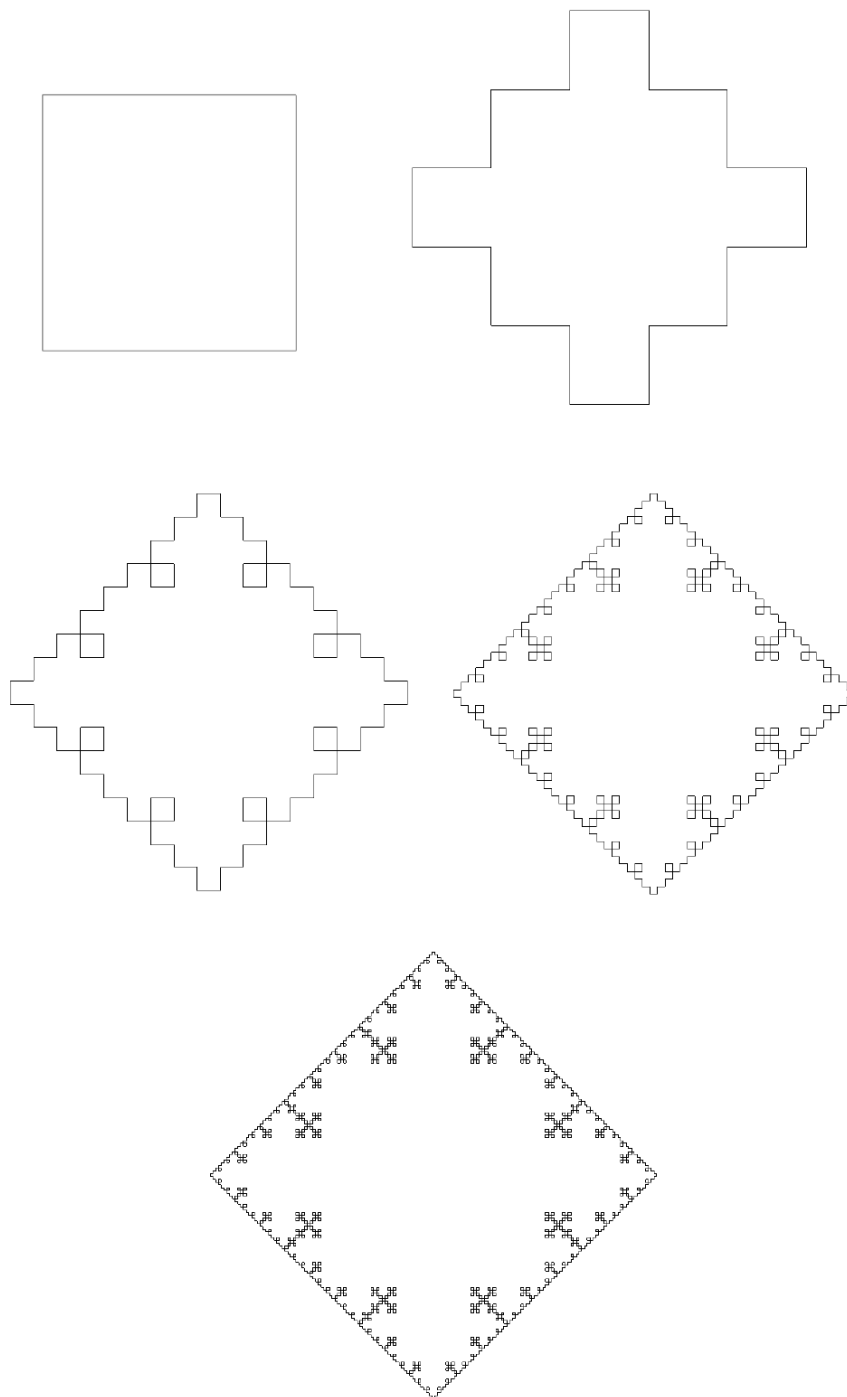


**Σχήμα 2.25:** Η χιονονιφάδα Koch και τα βήματα για την κατασκευή της

Το τετράγωνο Koch είναι μια παραλλαγή της καμπύλης Koch, η οποία κατασκευάζεται με την αντικατάσταση των (μοναδιαίου μήκους) πλευρών ενός τετραγώνου από μία τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από 5 ευθύγραμμα

## Θεωρία του Χάους

τμήματα μήκους  $1/3$  το καθένα και στα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Το σχετικό αποτέλεσμα και τα βήματα κατασκευής φαίνονται στο σχήμα 2.4 [6].



**Σχήμα 2.26:** Το τετράγωνο Koch και τα βήματα για την κατασκευή του

## 2.4 Το τρίγωνο Sierpinski και το χαλί Sierpinski

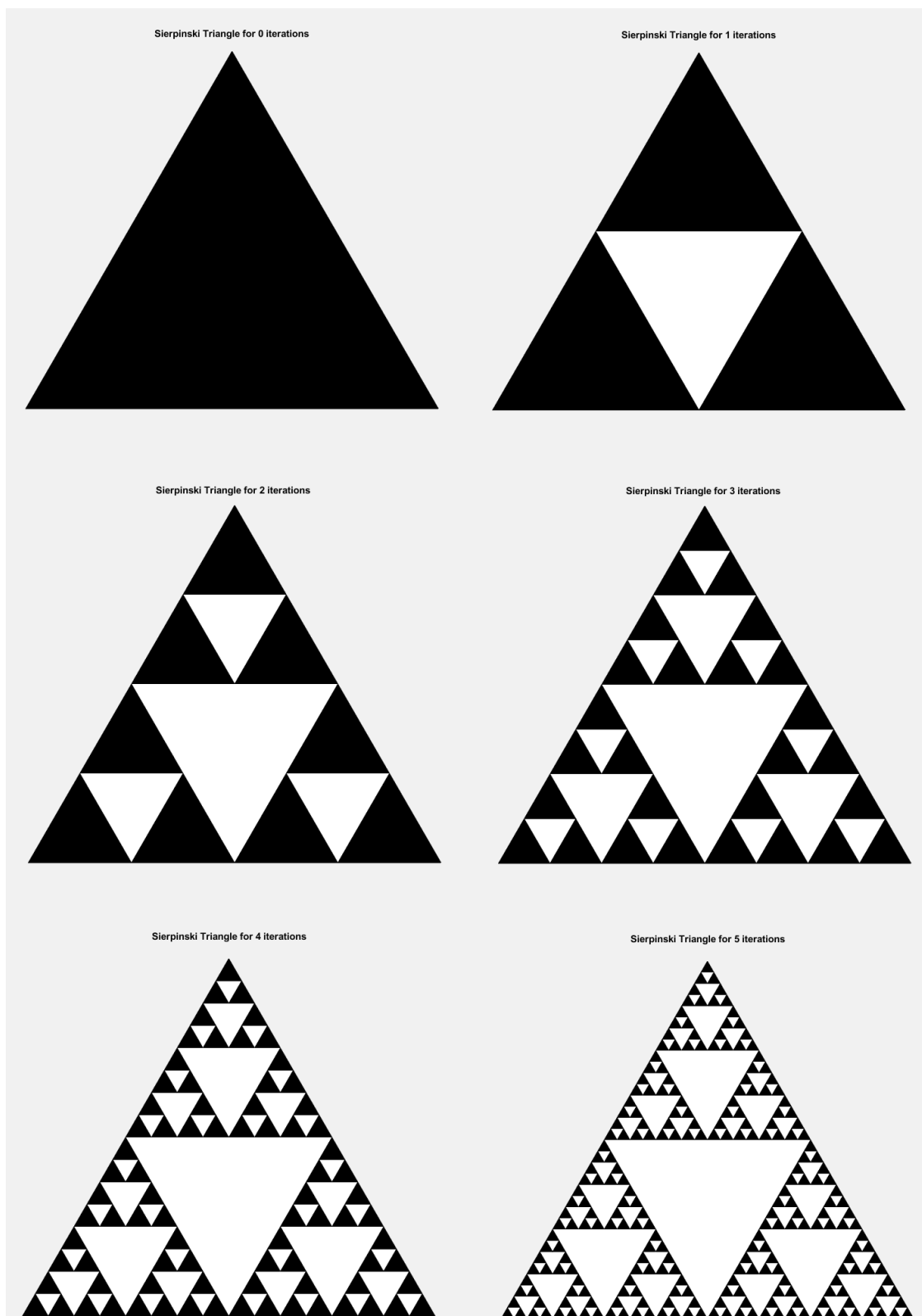
Το τρίγωνο Sierpinski αποτελεί ένα fractal με το γενικό σχήμα ενός ισόπλευρου τριγώνου, υποδιαιρουμένου σε μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα. Αρχικά κατασκευασμένο ως καμπύλη, αυτό είναι ένα από τα βασικά παραδείγματα αυτοομοίων συνόλων. Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι κατασκευής του τριγώνου Sierpinski.

Το τρίγωνο Sierpinski μπορεί να κατασκευαστεί από ένα ισόπλευρο τρίγωνο με επανειλημμένη αφαίρεση τριγωνικών υποσυνόλων:

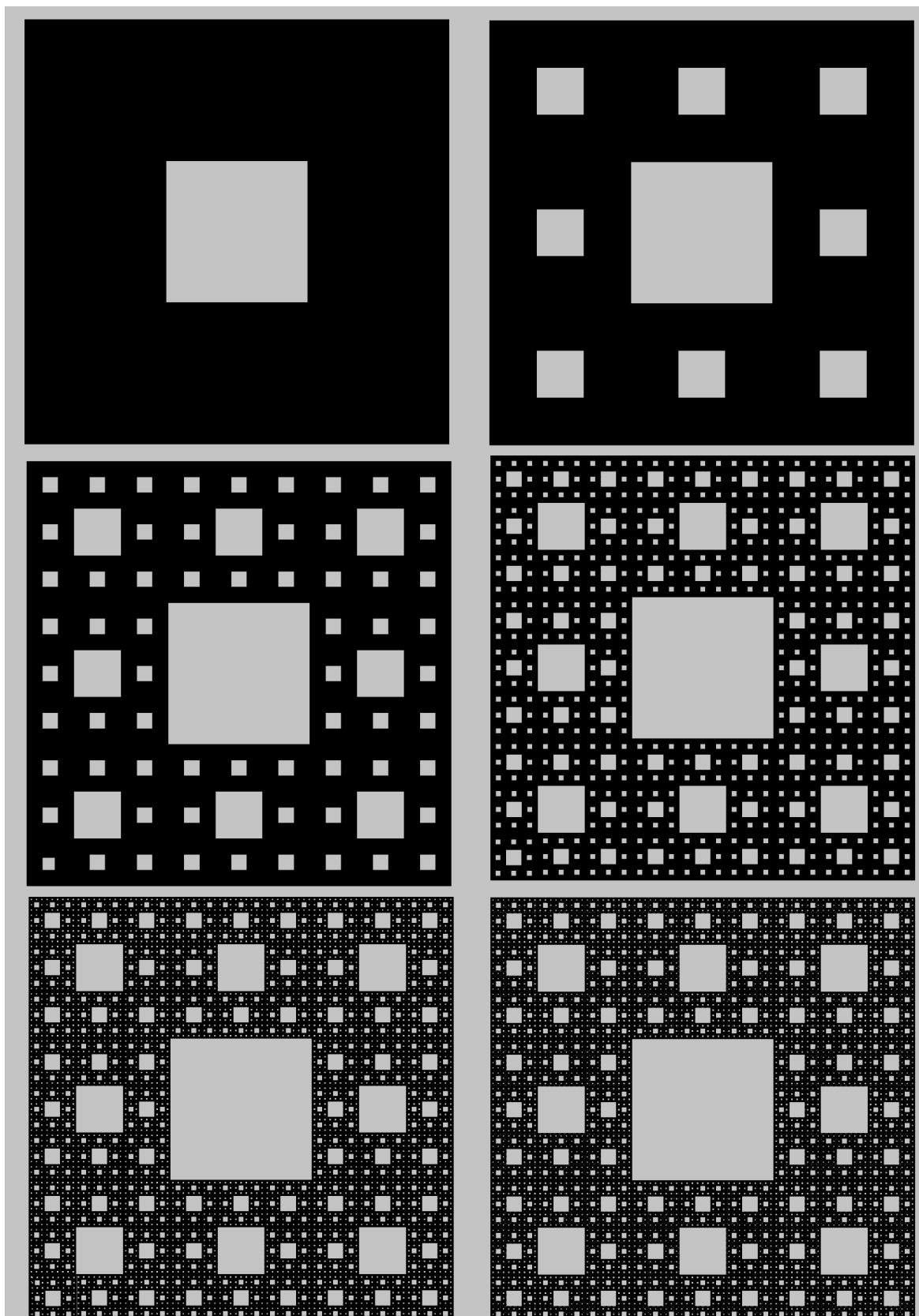
- Ξεκίνημα με ένα ισόπλευρο τρίγωνο
- Υποδιαίρεση αυτού σε τέσσερα μικρότερα ομοιογενή ισόπλευρα τρίγωνα και αφαίρεση του κεντρικού τριγώνου.
- Επανάληψη του προηγούμενου βήματος με το καθένα από τα υπόλοιπα μικρότερα τρίγωνα ες αεί.

Κάθε αφαιρούμενο τρίγωνο είναι τοπολογικώς ένα ανοιχτό σύνολο. Αυτή η διαδικασία της αφαίρεσης των τριγώνων αποτελεί ένα παράδειγμα πεπερασμένου κανόνα υποδιαίρεσης [1]. Στο σχήμα 2.5 φαίνονται τα βήματα 0-5 για την κατασκευή ενός τριγώνου Sierpinski, όπου έγινε χρήση του Matlab [17].

Ένα άλλο fractal που περιγράφηκε από τον Sierpinski το 1916 είναι το χαλί Sierpinski, το οποίο αποτελεί ένα επίπεδο fractal και είναι μια γενίκευση του συνόλου Cantor σε δύο διαστάσεις. Η κατασκευή του χαλιού Sierpinski ξεκινά με ένα τετράγωνο. Το τετράγωνο κόβεται σε 9 μικρότερα τετράγωνα σε ένα πλέγμα 3 προς 3 και αφαιρείται το κεντρικό τετράγωνο από αυτά. Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στη συνέχεια αναδρομικά στα υπόλοιπα 8 υποκείμενα ες αεί. Η διαδικασία της επαναλαμβανόμενης απομάκρυνσης τετραγώνων αποτελεί ένα παράδειγμα ενός πεπερασμένου κανόνα υποδιαίρεσης [1]. Στο σχήμα 2.6 φαίνονται τα βήματα 1-6 για την κατασκευή ενός τριγώνου Sierpinski [18].



Σχήμα 2.27: Το τετράγωνο Sierpinski και τα βήματα 0-5 για την κατασκευή του [17]



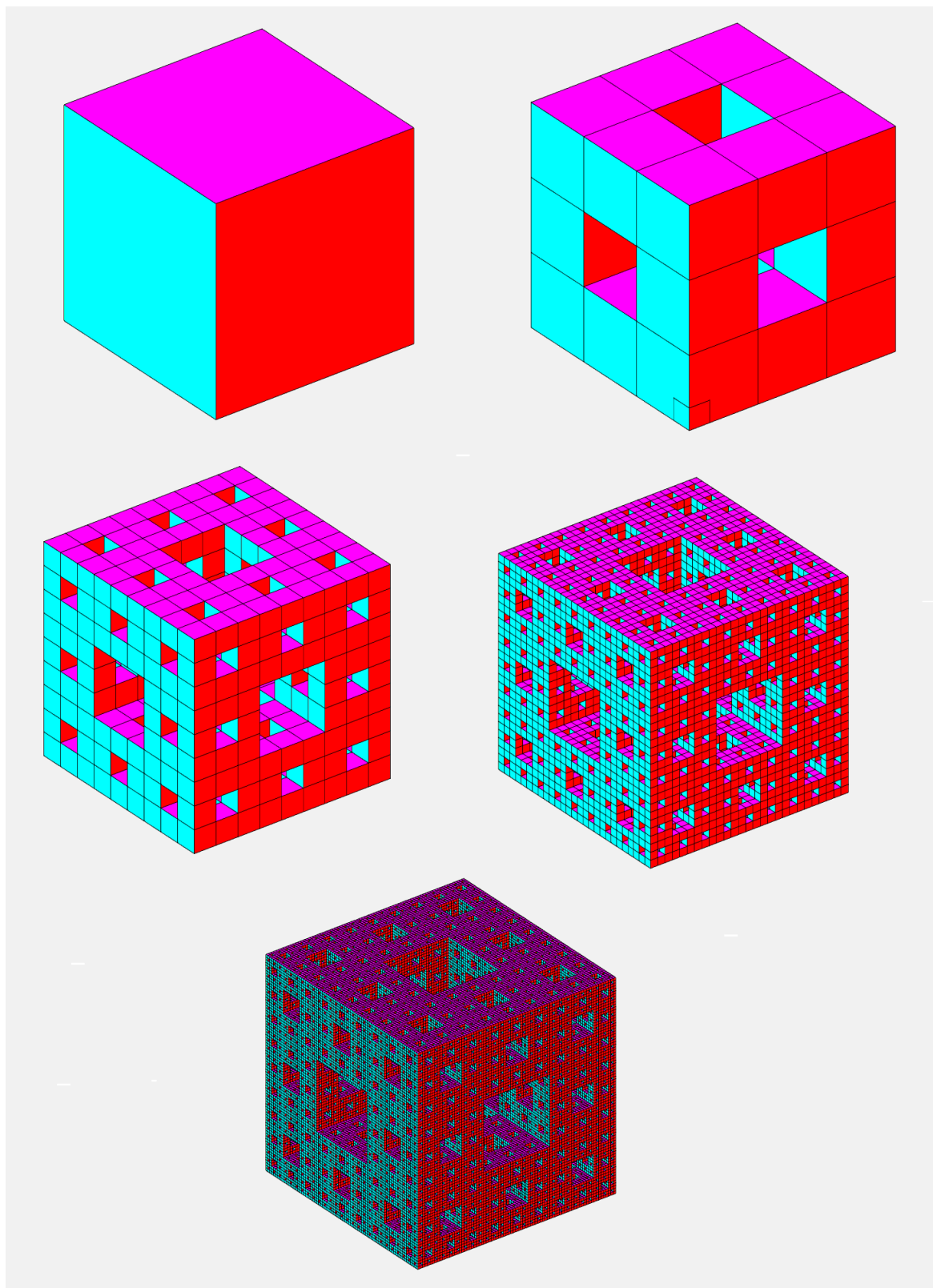
Σχήμα 2.28: Το χαλί Sierpinski και τα βήματα 1-6 για την κατασκευή του [18]

## 2.5 Το σφουγγάρι Menger

Η τεχνική της υποδιαίρεσης ενός σχήματος σε μικρότερα αντίγραφα του ίδιου, αφαιρώντας ένα ή περισσότερα αντίγραφα και συνεχίζοντας αναδρομικά μπορεί να επεκταθεί και σε άλλα σχήματα. Για παράδειγμα, υποδιαιρώντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα, αφαιρώντας το μεσαίο τρίγωνο και επανατρέποντας οδηγεί στο τρίγωνο Sierpinski, όπως προαναφέρθηκε, ενώ σε τρεις διαστάσεις, μια παρόμοια κατασκευή βασισμένη σε κύβους είναι γνωστή ως σφουγγάρι Menger.

Το σφουγγάρι Menger είναι η τρισδιάστατη προέκταση του χαλιού Sierpinski. Η απεικόνιση του fractal ξεκινά με έναν κύβο. Σύμφωνα με το πρώτο βήμα, ο κύβος διαιρείται στη συνέχεια σε είκοσι επτά κύβους ίσου μεγέθους, ενώ ο κεντρικός κύβος και ο μεσαίος κύβος κάθε πλευράς αφαιρούνται αφήνοντας μόνο τους κύβους στις άκρες και τις γωνίες. Η διαδικασία εφαρμόζεται στους υπόλοιπους είκοσι κύβους για τη δεύτερη επανάληψη και ούτω καθεξής. Τα βήματα υλοποίησης 0-4 του τρισδιάστατου αυτού fractal με χρήση του Matlab φαίνονται στο σχήμα 2.7 [19].

Το σφουγγάρι Sierpinski είναι ένα fractal με μερικές μοναδικές ιδιότητες. Όπως συμβαίνει και με το χαλί Sierpinski, καθώς το επίπεδο των επαναλήψεων πλησιάζει το άπειρο, ο όγκος του σφουγγαριού προσεγγίζει το μηδέν, ενώ η συνολική περίμετρος πλησιάζει το άπειρο. Αυτό συμβαίνει επειδή με κάθε νέα επανάληψη προστίθενται νέες ακμές και αφαιρείται όγκος [1].



Σχήμα 2.29: Το σφουγγάρι Menger και τα βήματα 0-4 για την κατασκευή του [19]



## 2.6 Οι διαστάσεις των fractals

Οι διαστάσεις των fractals είναι δύσκολο να κατανοηθούν, καθότι ο άνθρωπος ζει σε έναν τρισδιάστατο χώρο και είναι δύσκολο να αντιληφθεί άλλες διαστάσεις. Ενώ στην καθημερινότητα η λέξη διάσταση χρησιμοποιείται σε σχέση με τον χώρο, στα μαθηματικά οι διαστάσεις είναι ο μέγιστος αριθμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων που χρειάζεται για να καθοριστεί ένα μοναδικό σημείο. Δηλαδή είναι ο αριθμός των συντεταγμένων που χρειάζεται για να δημιουργηθεί ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Για παράδειγμα, η επιφάνεια μίας σφαίρας αποτελεί σχήμα δύο διαστάσεων διότι απαιτούνται μόνο δύο συντεταγμένες για να καθοριστεί (γεωγραφικό μήκος και πλάτος). Κατά συνέπεια, ένα σημείο έχει μηδενική διάσταση, μία γραμμή μία διάσταση, μία επιφάνεια έχει δύο διαστάσεις, ένα γεωμετρικό στερεό έχει τρεις διαστάσεις, ενώ ο χωροχρόνος έχει τέσσερις διαστάσεις [3].

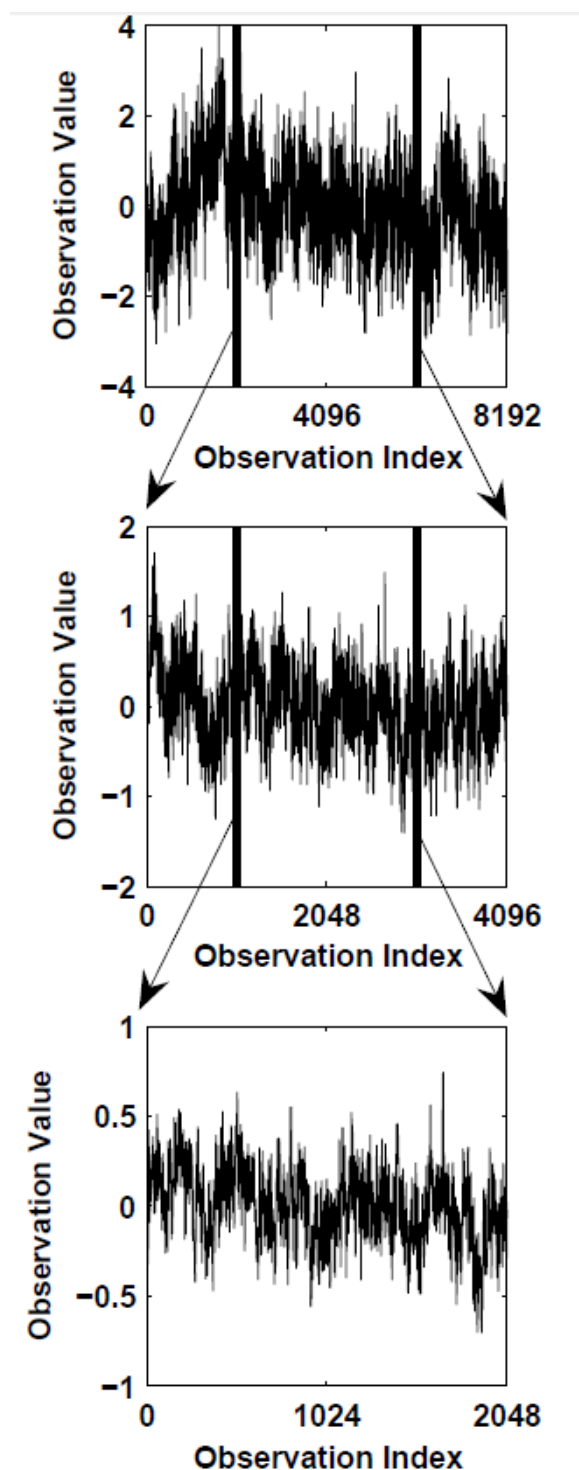
Η αυτο-ομοιότητα σε πολλαπλές κλίμακες ανάλυσης συχνά δημιουργεί αντικείμενα ή μοτίβα που καταλαμβάνουν μη διακριτές ή fractal διαστάσεις. Ουσιαστικά, μια fractal διάσταση αναφέρεται στην χωρική διάσταση ενός αντικειμένου, του οποίου η διάσταση πέφτει μεταξύ των τυπικών ευκλείδειων ακέραιων διαστάσεων ενός, δύο ή τριών. Ο Mandelbrot εξήγησε πως η διάσταση ενός αντικειμένου καθορίζεται εν μέρει από την οπτική γωνία του παρατηρητή (το επίπεδο εισόδου της ανάλυσης). Ένα τεντωμένο κομμάτι κλωστής μοιάζει πολύ με μια γραμμή, ένα ιδανικό μονοδιάστατο ευκλείδειο αντικείμενο. Το πυκνό πλέξιμο του νήματος έχει ως αποτέλεσμα ένα κομμάτι ύφασμα, ένα ιδανικό δισδιάστατο αντικείμενο. Έτσι, μια γραμμή μπορεί να αναδιαταχθεί έτσι ώστε να καταλαμβάνει χώρο. Το τύλιγμα του νήματος σε ένα καρούλι δίνει ένα αντικείμενο που καταλαμβάνει όγκο σε χώρο τριών διαστάσεων. Φυσικά, εάν το καρούλι του νήματος παρατηρηθεί από μεγάλη απόσταση, η διάσταση του φαίνεται να τείνει προς το μηδέν, δηλαδή σε ένα σημείο [20].

Ένας τρόπος για να κατανοηθεί η σχέση μεταξύ Ευκλείδειας γεωμετρίας και fractal γεωμετρίας εννοιολογικά είναι να ειπωθεί η fractal γεωμετρία ως γενίκευση ή επεξεργασία της πρότυπης Ευκλείδειας γεωμετρίας γραμμών, τετραγώνων, κύβων και ούτω καθεξής. Τα ευκλείδια αντικείμενα καταλαμβάνουν μόνο ακέραιες διαστάσεις, 1 για μια γραμμή, 2 για ένα τετράγωνο και ούτω καθεξής. Τα fractals, ωστόσο, μπορεί να καταλαμβάνουν μη-διακριτές διαστάσεις, διαστάσεις που κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1, 1 και 2 ή μεταξύ 2 και 3. Για παράδειγμα, στο σχήμα 2.8

φαίνεται μία κανονικοποιημένη σειρά χρονικών εκτιμήσεων ροζ θορύβου<sup>1</sup> που καταρτίστηκαν με την χρονική σειρά κατά την οποία συλλέχθηκαν και είναι σημεία που συνδέονται με μια γραμμή [20]. Σαφώς, εάν κάθε διαδοχική εκτίμηση χρόνου ήταν ίδια, η σύνδεση των σημείων θα αποτελούσε μια ευθεία οριζόντια γραμμή και η σειρά θα είχε μια Ευκλείδεια διάσταση του ενός. Αλλά κάθε απόκλιση από την ιδανική μορφή μιας γραμμής αρχίζει να καταλαμβάνει ή να "διαρρέει" στην επόμενη υψηλότερη (δεύτερη, σε αυτή την περίπτωση) Ευκλείδεια διάσταση. Με αυτήν την λογική μπορεί να ειπωθεί ότι οι διακυμάνσεις των σημείων του ροζ θορύβου καταλαμβάνουν ή διαρρέουν στην επόμενη υψηλότερη ευκλείδεια διάσταση. Κατά μία έννοια, η μεταβλητότητα των σημείων του σχήματος 2.8 έχει ως αποτέλεσμα η περιοχή όπου βρίσκεται η χρονοσειρά να έχει μια διάσταση μεταξύ μιας ιδανικής μονοδιάστατης γραμμής και μιας ιδανικής περιοχής δύο διαστάσεων. Όσο πιο οδοντωτό και ακανόνιστο είναι το γράφημα, τόσο μεγαλύτερη επιφάνεια καταλαμβάνει. Αποδεικνύεται ότι αυτή η εναλλαγή των σημείων μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια μιας στατιστικής διαδικασίας που ονομάζεται ανάλυση διασποράς [20].

---

<sup>1</sup> Η οικογένεια θορύβου  $1/f$  (ή ροζ θόρυβος), αποτελεί μια οικογένεια θορύβου, της οποίας το φάσμα  $P(f)$ , ως συνάρτηση της συχνότητας  $f$ , ισούται με  $1/f^a$  όπου  $a \approx 1$ .



**Σχήμα 2.30:** Η άνω εικόνα απεικονίζει ροζ θόρυβο, ενώ η μεσαία και η κάτω αποτελούν μεγεθύνσεις της άνω και της μεσαίας εικόνας, αντίστοιχα

Η ανάλυση διασποράς καταλήγει σε μια εκτίμηση της fractal διάστασης των σημείων μιας χρονοσειράς. Η fractal διάσταση χαρακτηρίζει τη δομή της εγγενούς μεταβλητότητας στην χρονοσειρά. Οι συμβατικές στατιστικές αναλύσεις

Άννα Ντέτς

προϋποθέτουν ότι η εγγενής μεταβλητότητα είναι λευκός θόρυβος, ο οποίος υπολογίζεται ότι έχει μία fractal διάσταση του 1,5, επειδή οι διαδοχικές παρατηρήσεις είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτή η fractal διάσταση δείχνει επί της ουσίας το βαθμό στον οποίο ο λευκός θόρυβος καταλαμβάνει δισδιάστατο χώρο. Σε αντίθεση με τον λευκό θόρυβο, οι διαδοχικές παρατηρήσεις του ροζ θορύβου τείνουν να έχουν θετική συσχέτιση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια λιγότερο οδοντωτή χρονοσειρά και χαμηλότερες διαστάσεις fractal που εμπίπτουν στο διάστημα μεταξύ 1 και 1,5 [20].

Προκειμένου να μετρηθεί η fractal διάσταση, η βασική ιδέα είναι να καλυφθεί το fractal με στοιχεία διάστασης  $\varepsilon$ , όπως π.χ. σφαίρες με διάμετρο  $\varepsilon$  ή κύβοι με ακμή  $\varepsilon$ . Εάν  $N(\varepsilon)$  είναι το πλήθος περιοχών διάστασης  $\varepsilon$  που χρειάζεται για να καλυφθεί το σύνολο των σημείων ενός fractal αντικειμένου όταν αυτό εμβαπτίζεται σε χώρους  $R^n$  υψηλότερης διάστασης από την αμέσως υψηλότερη ακέραια διάσταση από την κλασματική του διάσταση, τότε το  $N(\varepsilon)$  είναι αντιστρόφως ανάλογο προς το  $\varepsilon^n$ , έτσι ώστε να ισχύει  $N(\varepsilon) = c\varepsilon^{-n}$  για κάποια σταθερά  $c$ . Λύνοντας ως προς  $n$  και θεωρώντας ότι  $\varepsilon \rightarrow 0$ , προκύπτει η fractal διάσταση  $D$  (ή διάσταση Hausdorff) ως ακολούθως [21]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)} \quad (30)$$

Προκύπτει ότι  $D \leq n$ , ενώ, όπως προαναφέρθηκε, το  $D$  δεν είναι απαραίτητως ακέραιος και δίνει ένα μέτρο του πόσο μεταβάλλεται η πυκνότητα του fractal αντικειμένου σε σχέση με την κλίμακα του μήκους. Στην συνέχεια εφαρμόζεται η σχέση (30) για κάποια από τα γνωστά fractal αντικείμενα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, προκειμένου να καθοριστεί η διάστασή τους [6].

Για το σύνολο Cantor, σε κάθε βήμα  $n$ , ένα ευθύγραμμο τμήμα αντικαθίσταται από δύο τμήματα τα οποία έχουν το  $1/3$  του μήκους του προηγούμενου τμήματος.

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει  $N(\varepsilon) = 2^n$  και  $\varepsilon = (\frac{1}{3^n})$ . Συνεπώς το σύνολο

Cantor για  $n$  βήματα κατασκευής θα έχει διάσταση η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^n}{\ln (1/3^n)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309 \quad (31)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι ένα σημείο έχει μηδενική διάσταση, ενώ μία γραμμή μοναδιαία διάσταση, προκύπτει ότι το σύνολο Cantor είναι πιο πυκνό από ένα σημείο αλλά λιγότερο πυκνό από μία γραμμή.

Κατά την κατασκευή της καμπύλης του Koch, ένα τμήμα αντικαθίσταται από τέσσερα τμήματα, κάθε ένα εκ των οποίων έχει κλίμακα  $1/3$ . Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει  $N(\varepsilon) = 4^n$  και  $\varepsilon = (\frac{1}{3^n})$ . Συνεπώς η καμπύλη του Koch για  $n$  βήματα κατασκευής θα έχει διάσταση η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2619 \quad (32)$$

Άρα η καμπύλη του Koch είναι πυκνότερη από μία γραμμή αλλά λιγότερο πυκνή από ένα επίπεδο (διάσταση 2).

Στο τετράγωνο του Koch, το οποίο κατασκευάζεται σε κάθε βήμα από 5 ευθύγραμμα τμήματα μήκους  $1/3$  το καθένα, θα ισχύει ότι:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 5^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.4650 \quad (33)$$

Επομένως το τετράγωνο του Koch είναι μεγαλύτερης διάστασης από την καμπύλη Koch αλλά είναι λιγότερο πυκνό από ένα επίπεδο.

Στο τρίγωνο του Sierpinski το κάθε τρίγωνο αντικαθίσταται από τρία τρίγωνα, το μήκος των πλευρών του καθενός εκ των οποίων είναι  $1/2$  (σε σχέση με το αρχικό τρίγωνο). Άρα σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει ότι η διάσταση για  $n$  βήματα κατασκευής είναι:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5850 \quad (34)$$

## Θεωρία του Χάους

Φαίνεται λοιπόν ότι το τρίγωνο του Sierpinski έχει την μεγαλύτερη διάσταση σε σχέση με τα ανωτέρω παραδείγματα και επομένως και την μεγαλύτερη πυκνότητα.

Προχωρώντας, στο χαλί του Sierpinski το κάθε τετράγωνο αντικαθίσταται με 8 μικρότερα τετράγωνα σε ένα πλέγμα 3 προς 3. Επομένως εδώ ισχύει:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.8928 \quad (35)$$

Το χαλί του Sierpinski έχει επομένως ακόμη μεγαλύτερη διάσταση, πλησιάζοντας αυτή του επιπέδου.

Στο σφουγγάρι Menger ο κάθε κύβος αντικαθίσταται με 20 νέους σε κάθε βήμα, ο καθένας εκ των οποίων έχει μήκος ακμών  $1/3$  του αρχικού. Η διάσταση του σφουγγαριού Menger είναι κατά συνέπεια ίση με:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 20^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268 \quad (36)$$

Φαίνεται ότι το σφουγγάρι Menger έχει διάσταση λίγο μικρότερη από ένα κανονικό τρισδιάστατο αντικείμενο.

### 3. ΣΥΝΟΛΑ JULIA

#### 3.1 Εισαγωγή στα σύνολα Julia

Τα σύνολα Julia, τα οποία πήραν το όνομά τους από τον Gaston Julia (1893-1978), ο οποίος το 1919 δημοσίευσε ένα άρθρο που αφορούσε συγκεκριμένους τύπους σύμμορφων μιγαδικών απεικονίσεων (αυτές που διατηρούν το μέγεθος και το πρόσημο των γωνιών), οι εικόνες των οποίων δεν μπορούσαν να σχεδιαστούν εκείνη την εποχή καθότι δεν υπήρχαν οι δυνατότητες σχεδιασμού των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Τα σύνολα Julia προέρχονται από την ανάλυση της δυναμικής των μιγαδικών συναρτήσεων. Αρχικά καθορίζεται μια μιγαδική πολυωνυμική συνάρτηση  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  και στη συνέχεια εξετάζεται η τοπική συμπεριφορά της  $f$  γύρω από τα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο. Με  $f^n(z)$  συμβολίζεται η  $n$ -σύνθεση της  $f$ , δηλαδή  $f(f(\dots))$   $n$  φορές. Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται ότι εμφανίζει ευαίσθητη εξάρτηση σε ένα σημείο  $z \in \mathbb{C}$  εάν υπάρχει μια σταθερά  $\delta > 0$ , τέτοια ώστε, ανεξάρτητα από το πόσο μικρή γειτονιά του  $z$  έχει θεωρηθεί, να υπάρχει ένα σημείο  $w$  σε αυτή τη γειτονιά ώστε οι εικόνες των  $z$  και  $w$  της  $f$  απέχουν τουλάχιστον κατά  $\delta$ . Αρχικά δίδονται κάποιοι ορισμοί, προκειμένου στην συνέχεια να γίνει κατανοητό πως προκύπτουν και τι είναι τα σύνολα Julia [22].

Δεδομένου μιας συνάρτησης  $f$ , ένα σημείο  $z \in \mathbb{C}$  καλείται σταθερό σημείο εάν ισχύει  $f(z) = z$ , ενώ καλείται περιοδικό σημείο περιόδου  $n$  εάν  $f^n(z) = z$  για κάποιον θετικό ακέραιο  $n$ . Ο μικρότερος θετικός ακέραιος  $n$  για τον οποίον είναι  $f^n(z) = z$  καλείται περίοδος του  $z$ , ενώ το σύνολο  $\{z, f(z), \dots, f^{n-1}(z)\}$  καλείται τροχιά του  $z$  περιόδου  $n$ . Εάν θεωρηθεί ότι  $\rho = (f^n)'(z)$  είναι η ιδιοτιμή του περιοδικού σημείου  $z$ , τότε το  $\rho$  δεν εξαρτάται από το  $z$  παρά μόνο από την τροχιά του  $z$ . Τα περιοδικά σημεία κατατάσσονται ως εξής [23]:

- Απωστικά εάν  $|\rho| > 1$
- Ελκυστικά εάν  $0 < |\rho| < 1$

## Θεωρία του Χάους

- Υπερελκυστικά εάν  $|\rho|=0$
- Ρητώς αδιάφορα εάν  $\rho=e^{2\pi i\theta}$ , όπου  $\theta$  ρητός αριθμός
- Αρρήτως αδιάφορα εάν  $\rho=e^{2\pi i\theta}$ , όπου  $\theta$  άρρητος αριθμός

Σε περίπτωση που το  $w$  αποτελεί ένα σταθερό ελκυστικό σημείο της  $f$ , τότε το σύνολο  $A(w)=\left\{z \in C : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)=w\right\}$  καλείται λεκάνη έλξης του  $w$ , ενώ το σύνολο

$A(\infty)=\left\{z \in C : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z)=\infty\right\}$  καλείται λεκάνη έλξης του  $\infty$ . Επειδή αποδεικνύεται ότι τα περιοδικά σημεία που είναι ελκυστικά και αδιάφορα (ρητώς ή αρρήτως) αποτελούν πεπερασμένο σύνολο, στην παρούσα περίπτωση ενδιαφέρουν τα απωστικά περιοδικά σημεία.

Υπάρχουν πολλοί χαρακτηρισμοί ως προς το τι ονομάζεται ένα σύνολο Julia. Το πρώτο είναι ότι το σύνολο Julia  $J(f)$  μιας συνάρτησης  $f$  είναι το σύνολο όλων των σημείων  $z$  στο  $C$ , έτσι ώστε το  $f$  να εμφανίζει ευαίσθητη εξάρτηση στο  $z$ . Με άλλα λόγια, το  $J(f)$  είναι το σύνολο όλων των χαοτικών σημείων του  $f$ . Ενώ ο ορισμός αυτός επιτρέπει την μελέτη των αυθαίρετων συναρτήσεων  $f:C \rightarrow C$ , θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι μιγαδικώς διαφοροποιήσιμες για κάθε  $z \in C$  [22].

Ένα άλλο χαρακτηριστικό ενός συνόλου Julia βασίζεται στην ταξινόμηση των σημείων του στο μιγαδικό επίπεδο σύμφωνα με τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά τους υπό επανειλημμένη εφαρμογή του  $f$ . Γίνεται διάκριση μεταξύ των σημείων  $z$  για τα οποία το  $f^n(z)$  παραμένει φραγμένο καθώς  $n \rightarrow \infty$  και των σημείων για τα οποία το  $f^n(z)$  αποκλίνει. Το σύνολο Julia ορίζεται στη συνέχεια ως το όριο μεταξύ αυτών των δύο τύπων συμπεριφοράς. Αυτό που κάνει το σύνολο Julia ενδιαφέρον είναι ότι, παρότι προέρχεται από φαινομενικά απλές επαναληπτικές διαδικασίες, μπορεί να είναι πολύ «σθεναρό» και συχνά fractal στην φύση του. Στην συνέχεια ορίζεται το πλήρες σύνολο Julia, το σύνολο Julia και το σύνολο Fatou, το οποίο ονομάστηκε έτσι από τον Pierre Fatou (1878-1929) [22]:

- Το πλήρες σύνολο Julia της συνάρτησης  $f$  ορίζεται ως το φραγμένο σύνολο  $K(f)$  των απωστικών περιοδικών σημείων της  $f$ :

$$K(f)=\left\{z \in C : f^k(z) \rightarrow \infty\right\} \quad (37)$$

- Το σύνολο Julia της συνάρτησης  $f$  ορίζεται ως το όριο του  $K(f)$  ως εξής:



$$J(f) = \partial K(f) \quad (38)$$

- Το σύνολο Fatou της συνάρτησης  $f$  ορίζεται ως το συμπλήρωμα του  $K(f)$  ως εξής:

$$F(f) = \text{C}\ddot{\iota}(f) \quad (39)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα σύνολα Julia  $J(f)$  είναι αμετάβλητα υπό την  $f$ . Αυτή είναι μια χρήσιμη ιδιότητα και αποδεικνύει το γεγονός ότι τα σύνολα Julia είναι απωστικά, επειδή τα ίδια είναι αμετάβλητα υπό την  $f$ , αλλά τα σημεία λίγο έξω από το  $J(f)$  θα κινηθούν μακριά από το  $J$  είτε προς το  $\infty$  (αν ανήκουν στο σύνολο Fatou), είτε προς κάποιο σταθερό σημείο  $f(z)$  (αν ανήκουν στο πλήρες σύνολο Julia). Μια σημαντική πτυχή στην θεωρία συνόλων Julia είναι ότι δεν απαιτείται η χρήση πολύπλοκων συναρτήσεων  $f$  για να προκύψουν παραδείγματα όπου το  $J(f)$  είναι ένα ενδιαφέρον και περίπλοκο σύνολο. Για τον λόγο αυτό θα γίνει στην συνέχεια μνεία στα σύνολα Julia των συναρτήσεων της μορφής  $f_c(z) = z^2 + c$  για κάποια μιγαδική σταθερά  $c$ . Αυτή η απλή οικογένεια πολυωνυμικών απεικονίσεων φαίνεται αρχικά να περιορίζει την ανάλυση, αλλά στην πραγματικότητα τα σύνολα Julia που προκύπτουν από αυτές τις απεικονίσεις διαθέτουν τις περισσότερες, αν όχι όλες, ιδιότητες που απαιτούνται για την κατανόηση του θέματος [22].

### 3.2 Απεικονίσεις συνόλων Julia

Έστω λοιπόν η τετραγωνική απεικόνιση της μορφής:

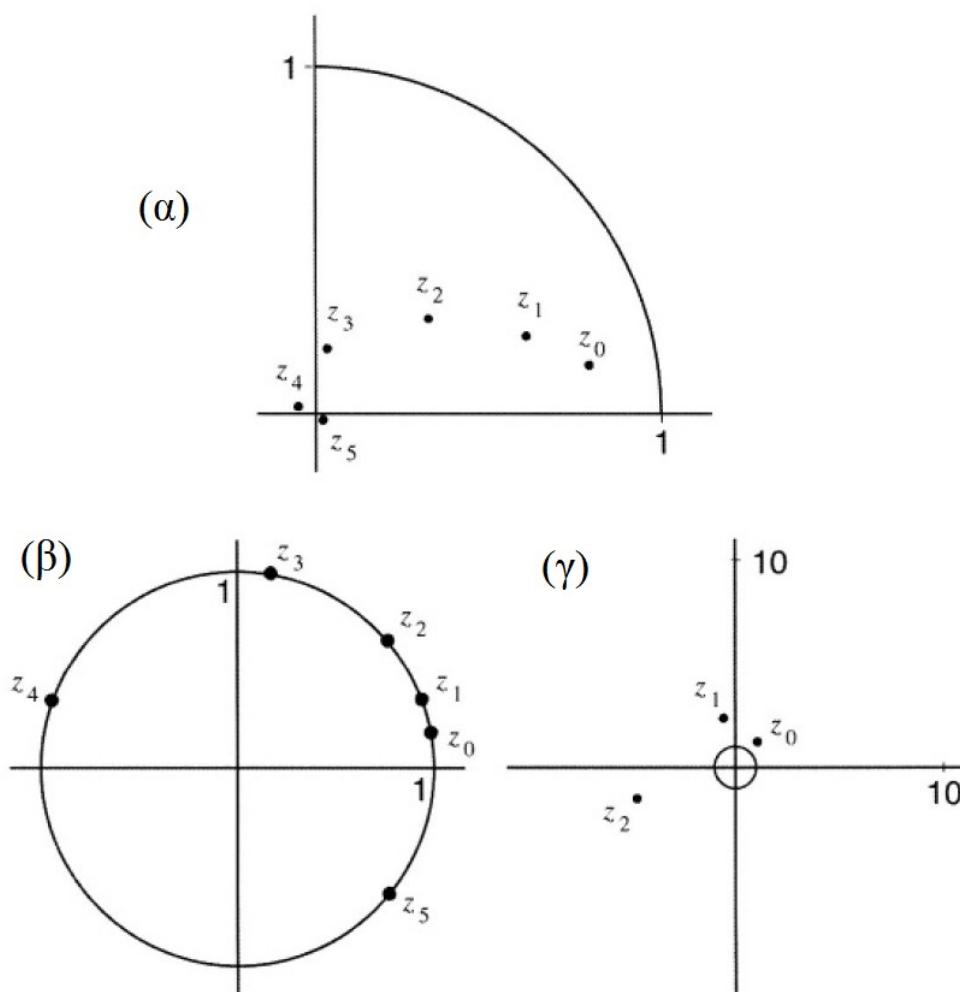
$$z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c, \quad \text{με } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

όπου  $z_0, c \in \mathbb{C}$ . Αν και η παραπάνω εξίσωση είναι αρκετά απλή, διαθέτει δυναμική που μπορεί να οδηγήσει σε περίπλοκα σύνολα και αποτελέσματα. Η συμπεριφορά του συνόλου  $z_n$  με βάση την (36) εξαρτώνται από τα  $z_0, c$ . Αν στην εξίσωση (36) θεωρηθεί ότι  $c = 0$ , τότε προκύπτουν απεικονίσεις της μορφής:

$$z_{n+1} = z_n^2, \quad \text{με } n=0,1,2,3, \dots \quad (41)$$

Σε σχέση με το αρχικό σημείο  $z_0$  της απεικόνισης, διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις [6]:

- 1) Το αρχικό σημείο  $z_0$  βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου και ισχύει  $|z_0| < 1$ . Στην περίπτωση αυτή οι επαναλήψεις της (41) θα τείνουν στο σημείο (0,0). Αυτό συμβαίνει επειδή είναι  $z_0 = |z_0| e^{i\theta_0}$  και οι επαναλήψεις δίνουν  $z_1 = z_0^2 = |z_0|^2 e^{2i\theta_0}$ , ...,  $z_n = z_0^{2^n} = |z_0|^{2^n} e^{2^n i\theta_0}$ . Επομένως,  $|z_n| = |z_0|^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (Σχήμα 3.1α).
- 2) Το αρχικό σημείο  $z_0$  βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και ισχύει  $|z_0| = 1$ . Τότε προκύπτει ότι  $|z_n| = |z_0|^{2^n} = 1$  και κατά συνέπεια οι επαναλήψεις της (34) θα περιστρέφονται γύρω από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου ευρισκόμενοι συνεχώς πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 3.1β).
- 3) Το αρχικό σημείο  $z_0$  βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου και ισχύει  $|z_0| > 1$ . Στην περίπτωση αυτή οι επαναλήψεις της (41) θα τείνουν προς το άπειρο επειδή ισχύει ότι  $|z_n| = |z_0|^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  (Σχήμα 3.1γ)



**Σχήμα 3.31:** Απεικόνιση της τροχιάς του  $z$  για τις περιπτώσεις όπου το αρχικό σημείο  $z_0$  βρίσκεται (α) εντός του μοναδιαίου κύκλου, (β) πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και (γ) εκτός του μοναδιαίου κύκλου

Για την  $f(z)=z^2$  τα σταθερά σημεία προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση  $z^2=z$ , οπότε προκύπτουν τα σημεία  $z_\alpha=0$  και  $z_\beta=1$ . Επειδή ισχύει ότι  $f'(z)=2z$ , είναι  $i$  και  $-i$ . Άρα το  $z_\alpha$  είναι υπερελκυστικό σημείο, ενώ το  $z_\beta$  είναι απωστικό. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου αποτελεί ένα απλό παράδειγμα συνόλου Julia, επειδή αποτελεί το όριο του φραγμένου συνόλου του σταθερού περιοδικού απωστικού σημείου  $z_\beta$ . Επιπλέον, η περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου αποτελεί το σύνορο της λεκάνης έλξης του σημείου  $z_\alpha$ , καθώς τα σημεία του πλήρους συνόλου Julia τείνουν προς αυτό για άπειρες επαναλήψεις. Φαίνεται επίσης ότι τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου είναι ασταθή, καθώς η ελάχιστη μετατόπιση από τα σημεία αυτού οδηγούν σε τροχιές  $\{z, z_1, \dots, z_n\}$  που απομακρύνονται γρήγορα από το σύνορο αυτό. Το σύνολο Julia της  $f(z)=z^2$  απεικονίζεται στο σχήμα 3.3 [24].

Άννα Ντέτς

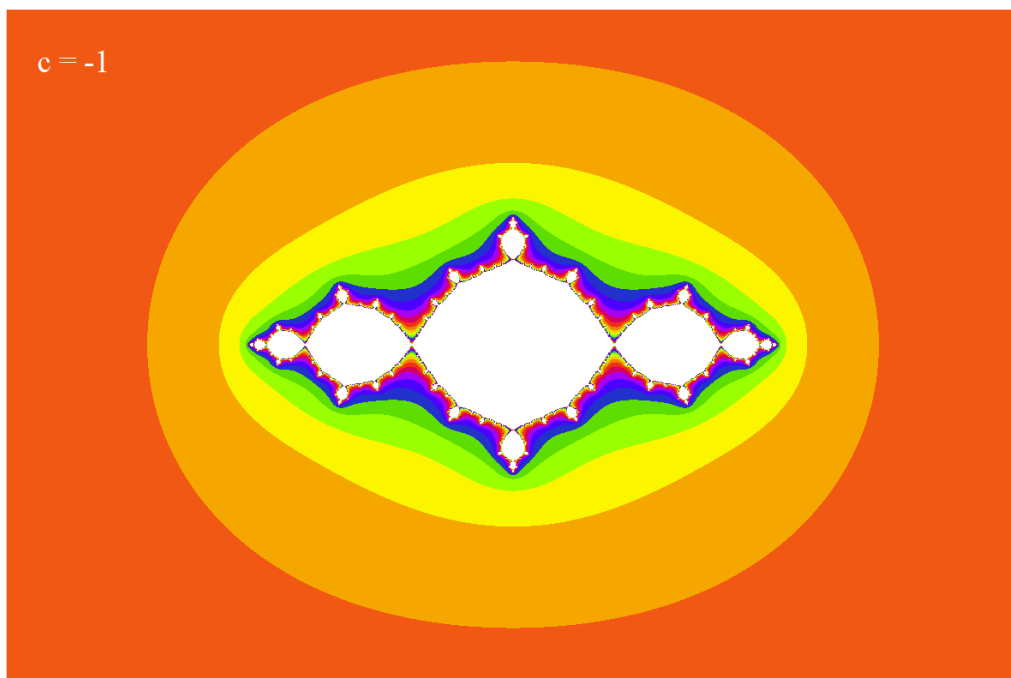
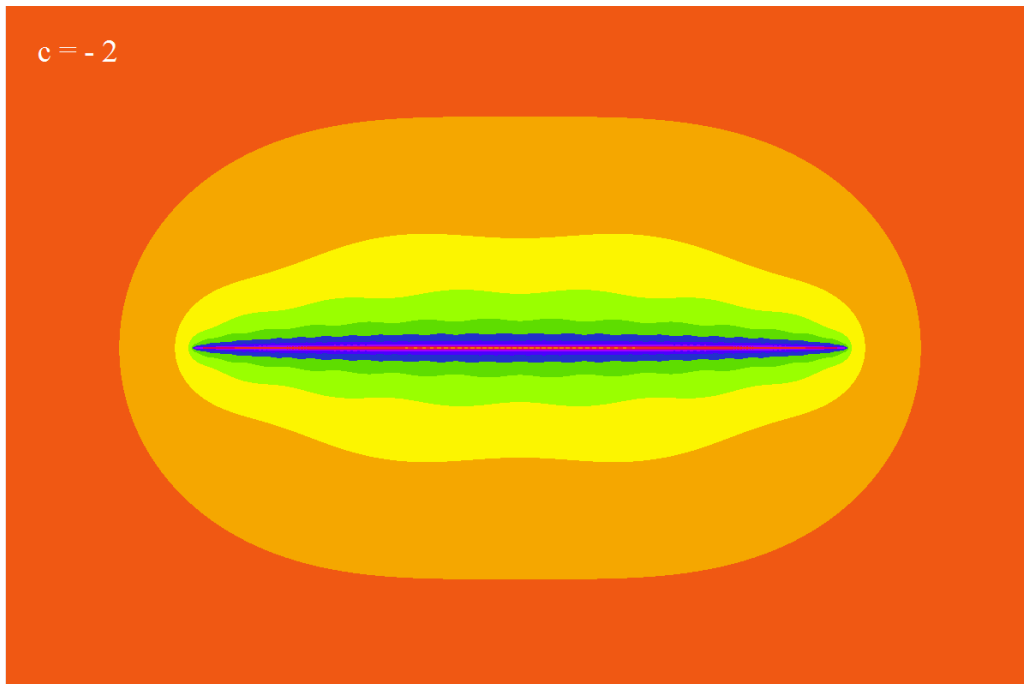
Στα σχήματα 3.2-3.4 φαίνονται τα πλήρη σύνολα Julia (με λευκό χρώμα) για ακέραιες πραγματικές τιμές του  $c \in [-2, 3]$ , κατασκευασμένες με την βοήθεια του Matlab [25]. Στα σχήματα αυτά, τα χρώματα πέραν του λευκού ανήκουν στο σύνολο Fatou και χωρίζονται από τις ισοδυναμικές γραμμές, οι οποίες προσδιορίζονται από την εξίσωση  $p(z) = \log|z|$ . Για σχεδόν κάθε  $c$ , η απεικόνιση του συνόλου Julia αποτελεί ένα φράκταλ. Το προκύπτον σύνολο, ωστόσο, δεν είναι fractal για  $c = -2$  και  $c = 0$ , αν και δεν φαίνεται να είναι γνωστό εάν αυτές οι δύο είναι οι μοναδικές εξαιρέσεις. [26].

Για  $c = -1$  (σχήμα 3.2), το σύνολο Julia αυτό είναι γνωστό ως η βασιλική, λόγω της ομοιότητάς του με την βασιλική του Αγ. Πέτρου. Για την συνάρτηση  $f(z) = z^2 - 1$  τα σταθερά σημεία προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση  $z^2 - z - 1 = 0$ , οπότε προκύπτουν τα σημεία  $z_\alpha = 1,618$  και  $z_\beta = -0,618$ . Επειδή ισχύει ότι  $f'(z) = 2z$ , είναι  $\dot{z}$  και  $\dot{z}$  και συνεπώς τα σημεία είναι απωστικά (δεν υπάρχουν σταθερά σημεία έλξης). Εντούτοις, αν ληφθεί η  $f^2(z) = (z^2 - 1)^2 - 1$ , προκύπτει ότι υπάρχουν δύο επιπλέον σταθερά σημεία, τα 0 και -1. Για αυτά ισχύει  $|(f^2)'(0)| = 0$  και  $|(f^2)'(-1)| = 0$ , επειδή  $(f^2)' = 4z(z^2 - 1)$ , και συνεπώς το  $\{0, 1\}$  αποτελεί υπερελκυστικός κύκλος περιόδου 2 [27].

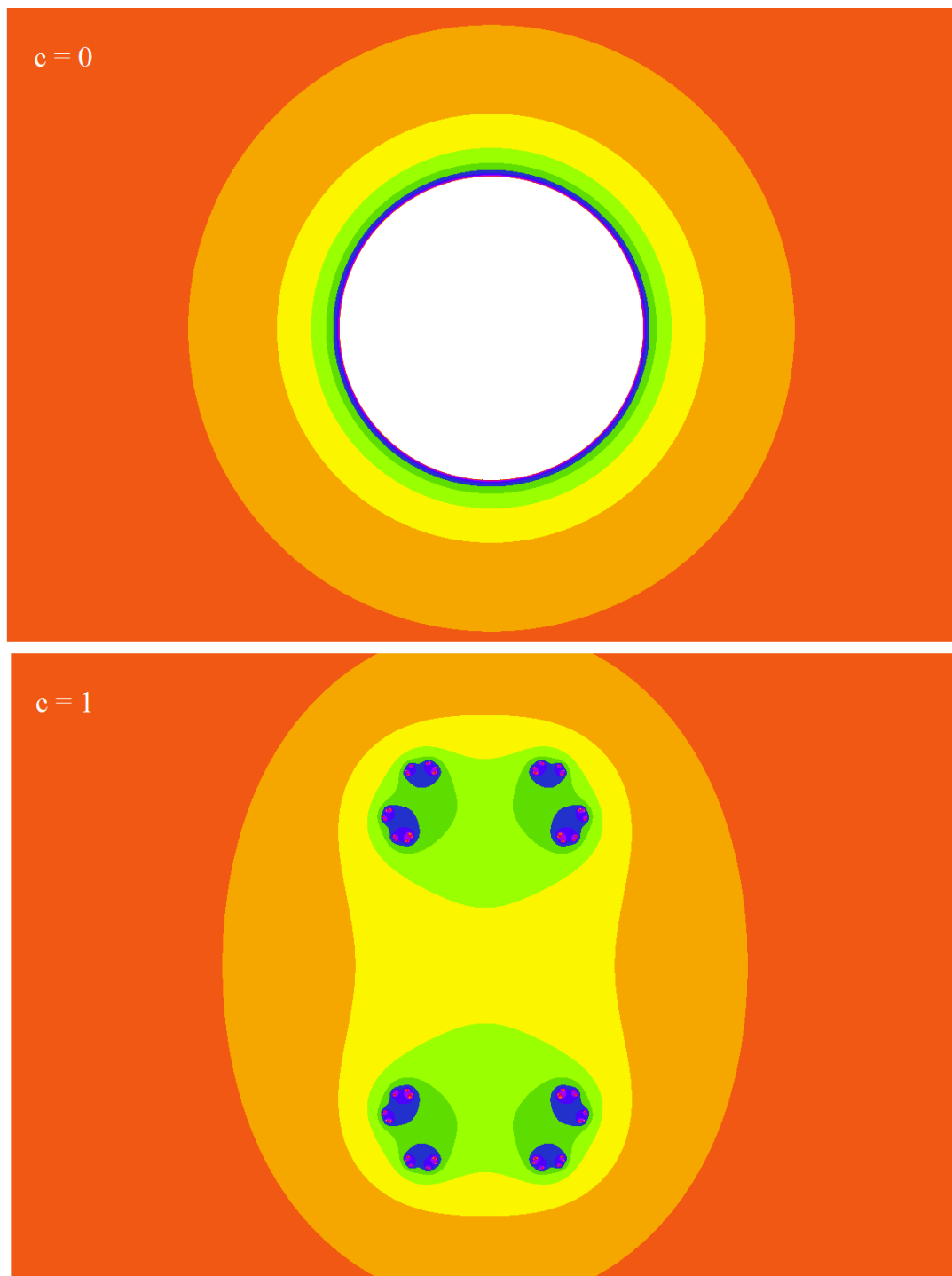
Για την συνάρτηση  $f(z) = z^2 - 2$ , της οποίας το σύνολο Julia φαίνεται στο σχήμα 3.2, παρόλο που μπορεί να μην είναι προφανές, το σύνολο Julia δεν έχει ελκυστές κανενός είδους. Επομένως, σχεδόν κάθε τροχιά της  $f$  διαφεύγει στο άπειρο. Ωστόσο, η  $f$  εξακολουθεί να έχει μερικές φραγμένες τροχιές, καθώς δύο σημεία της αποτελούν σταθερά σημεία. Αν και κανένα σταθερό σημείο δεν είναι ελκυστικό, οι τροχιές των σταθερών σημείων παραμένουν φραγμένες και συνεπώς ανήκουν στο γεμάτο σύνολο Julia. Ομοίως, μπορεί να φανεί ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ένα κύκλο περιόδου 2, δύο κύκλους περιόδου 3, τρεις κύκλους περιόδου 4 και ούτω καθεξής, όλοι εκ των οποίων είναι απωστικοί. Όλα αυτά τα περιοδικά σημεία βρίσκονται στο πλήρες σύνολο Julia. Αποδεικνύεται ότι το πλήρες σύνολο Julia για την  $f$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα  $[-2, 2]$  στον άξονα των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2. Αυτό το τμήμα γραμμής απεικονίζεται στον εαυτό του λόγω της συνάρτησης  $f$ , έτσι ώστε κάθε τροχιά που εκκινεί σε αυτό το τμήμα να παραμένει σε αυτό. Κάθε τροχιά που δεν αρχίζει στο ευθύγραμμο αυτό τμήμα διαφεύγει στο άπειρο [27].

## Θεωρία του Χάους

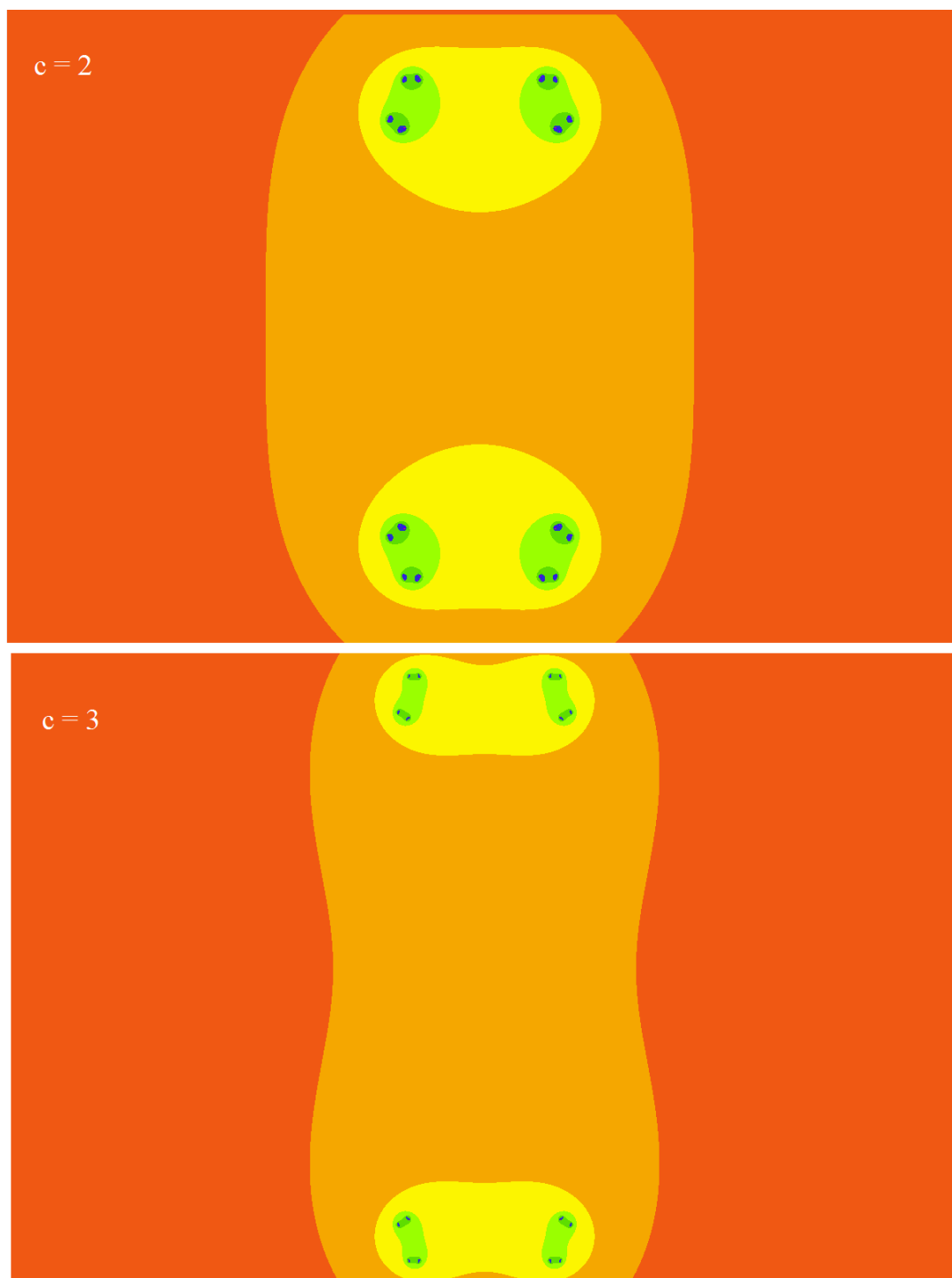
Στην περίπτωση που στην (36) επιλεγούν  $c$  με μεγαλύτερο μέτρο ( $|c| > 1$ ), τότε τα σύνολα Julia θα μικραίνουν όσο το  $|c|$  αυξάνεται, όπως φαίνεται στα σχήματα 3.2 και 3.4, όπου  $|c|=2$  και  $|c|=\{2,3\}$ , αντίστοιχα. Για αρκετά μεγάλο  $|c|$  αποδεικνύεται ότι  $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$  [24].



**Σχήμα 3.32:** Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του  $c$  [25]



**Σχήμα 3.33:** Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του  $c$  [25]



**Σχήμα 3.34:** Απεικόνιση των πλήρων συνόλων Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για ακέραιες τιμές του  $c$  [25]

### 3.3 Αλγόριθμος κατασκευής συνόλων Julia

Έστω και πάλι η τετραγωνική απεικόνιση της μορφής της εξίσωσης (40). Στην προηγούμενη παράγραφο περιγράφηκαν οι περιπτώσεις για  $c=0$  και  $c$  ακέραιος. Αν επιλεγεί  $c \in \mathbb{C}$ , τότε προκύπτουν διάφορες περίεργες και όμορφες απεικονίσεις του συνόλου Julia. Ας ληφθεί το παράδειγμα του  $c=-0.5+0.5i$ . Τότε προκύπτει το πλήρες σύνολο Julia που φαίνεται στο σχήμα 3.5 (α). Στα 3.5 (β) και (γ) φαίνονται διαδοχικές μεγεθύνσεις του τμήματος εντός του ορθογωνίου στο (α), όπως αυτά κατασκευάστηκαν με το Matlab [25]. Όπως είναι εμφανές, οι μεγεθύνσεις έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με το αρχικό πλήρες σύνολο Julia, το οποίο αποτελεί fractal.

Το κλειδί για τον υπολογισμό του συνόλου Fatou (σημεία διαφυγής) είναι η παρατήρηση ότι τα σημεία μιας τροχιάς θα διαφύγουν στο άπειρο με βεβαιότητα μόλις η απόλυτη τιμή τους γίνει αρκετά μεγάλη. Αυτό είναι εμφανές επειδή το τετράγωνο ενός μεγάλου αριθμού είναι πολύ μεγαλύτερο και η προσθήκη της σταθεράς  $c$  είναι μάλλον ασήμαντη. Ως αποτέλεσμα, στις επαναλήψεις για τα μεγάλα  $z$  η σταθερά  $c$  μπορεί να παραμεληθεί και η απεικόνιση αποκτά την μορφή  $z \rightarrow z^2$ , η οποία έχει ήδη περιγραφεί. Ωστόσο υπάρχει το ερώτημα πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το  $z_n$ , ώστε η τροχιά του με βεβαιότητα να τείνει στο άπειρο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από μία παράμετρο  $r(c)$ , η οποία εξαρτάται από την σταθερά  $c$ . Αποδεικνύεται η παράμετρος  $r(c)$  προκύπτει ως το μέγιστο μεταξύ της απόλυτης τιμής του  $c$  και τον αριθμό 2 [28]:

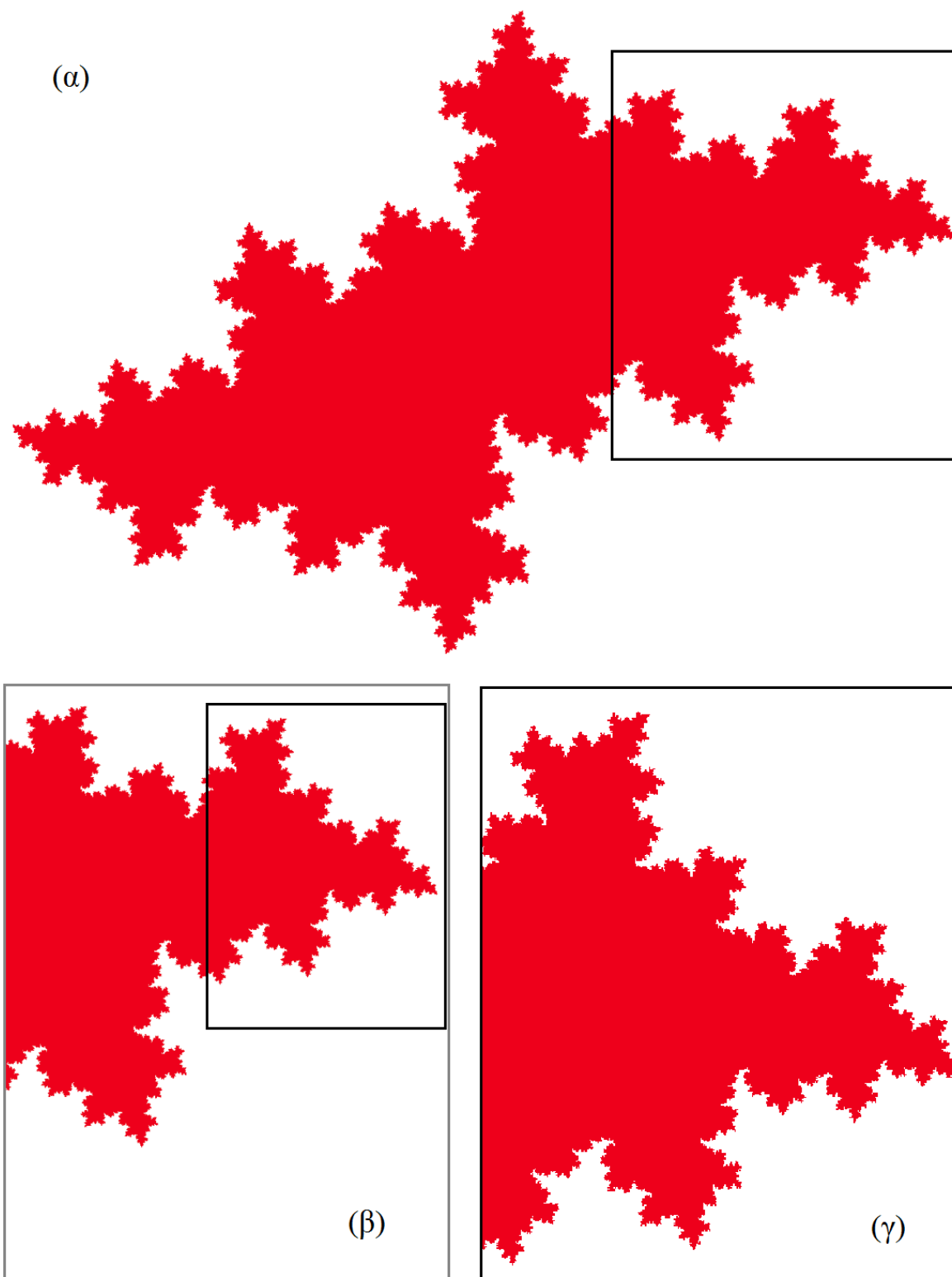
$$r(c) = \max(|c|, 2) \quad (42)$$

Συνεπώς, εάν το  $|z_n|$  υπερβεί το  $r(c)$ , τότε με βεβαιότητα η τροχιά τείνει προς το άπειρο. Ο αλγόριθμος που κατηγοριοποιεί ένα αρχικό σημείο ως μέλος του συνόλου Fatou έχει ως εξής. Εάν η απόλυτη τιμή του  $z$  υπερβεί σε κάποια επανάληψη  $z_n$  το  $r(c)$ , ο αλγόριθμος τερματίζει και επιστρέφει το αποτέλεσμα ότι το αρχικό σημείο



## Θεωρία του Χάους

βρίσκεται στο σύνολο Fatou. Είναι προφανές ότι η τιμή της απεικόνισης  $|z_n|$  ενός αρχικού σημείου  $z_0$  που διαφεύγει στο άπειρο πρέπει να υπερβαίνει το μέγεθος  $r(c)$  σε κάποια επανάληψη. Διαφορετικά, τα σημεία της τροχιά δεν θα μπορούσαν ποτέ να κινηθούν μακριά και το αρχικό σημείο θα έπρεπε να ανήκει στο πλήρες σύνολο Julia.



**Σχήμα 3.35:** (α) Απεικόνιση του πλήρους συνόλου Julia για  $c = -0.5 + 0.5i$ , καθώς και διαδοχικές μεγεθύνσεις τμημάτων αυτού στα (β) και (γ)

Επομένως, το κριτήριο αυτό καταγράφει όντως όλα τα σημεία διαφυγής. Ωστόσο, στην πράξη μπορεί να χρειαστούν πολλές επαναλήψεις έως ότου η τροχιά να διαφύγει από έναν δίσκο ακτίνας  $r(c)$ . Έτσι, χρησιμοποιείται ένας μέγιστος αριθμός επαναλήψεων  $k$ . Αν το  $z_k$  δεν υπερβεί κατ' απόλυτη τιμή έως την επανάληψη  $k$  την τιμή  $r(c)$ , τότε πρέπει να υποθεθεί (λαμβάνοντας υπόψιν την ακρίβεια του αλγορίθμου) ότι το αρχικό σημείο  $z_0$  δεν ανήκει στο σύνολο Fatou, αλλά στο σύνολο Julia [28].

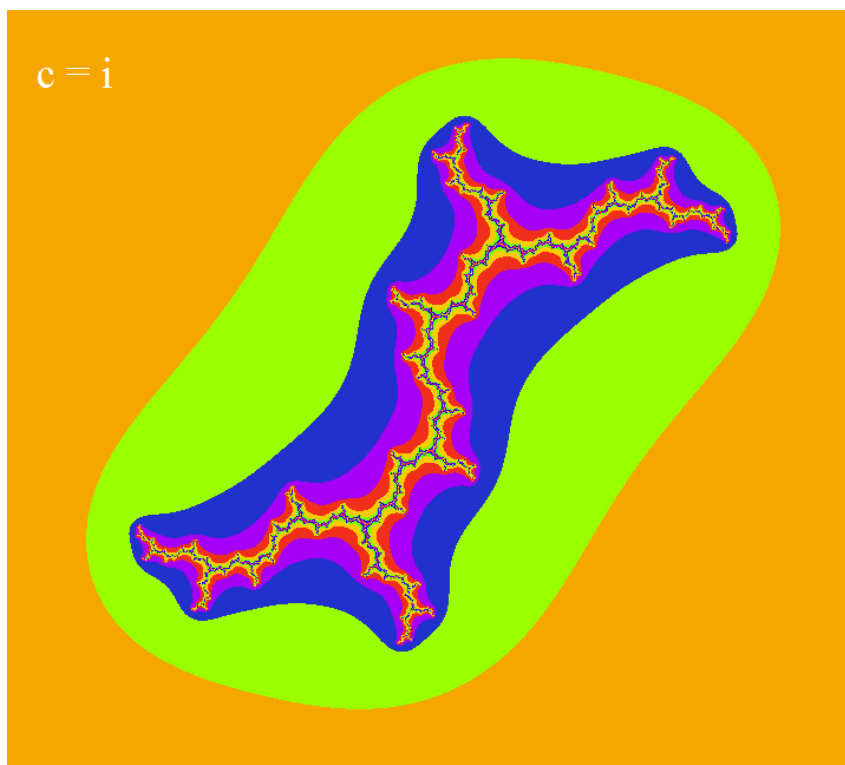
### 3.4 Συνεκτικότητα των συνόλων Julia

Ένας τοπολογικός χώρος  $X$  λέγεται ότι είναι συνεκτικός (connected) αν δεν είναι ένωση δύο διαφορετικών (ξένων) μη κενών υποσυνόλων του (τα οποία είναι ανοιχτά και κλειστά στην τοπολογία του συνόλου), δηλαδή δεν υπάρχουν υποσύνολα  $U$  και  $V$  του  $X$ , έτσι ώστε  $U \neq \emptyset \neq V$ ,  $U \cup V \neq \emptyset \wedge X = U \cup V$ . Ένα υποσύνολο  $A \subseteq X$  λέγεται ότι είναι συνεκτικό αν είναι συνεκτικό ως υπόχωρος του  $X$ , δηλαδή, το  $A$  εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία είναι συνεκτικός χώρος. Στον χώρο  $X$ , συνεκτική συνιστώσα του  $x \in X$  ονομάζεται το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το  $x$ , ενώ ο χώρος  $X$  καλείται ολικά μη συνεκτικός εάν για κάθε ζεύγος σημείων  $p, q \in X$ , υπάρχει μία κλειστή καμπύλη, η οποία θέτει το  $p$  εντός της καμπύλης και το  $q$  εκτός αυτής [27, 29].

Εκτός των ανωτέρω υπάρχουν αρκετές άλλες μαθηματικές έννοιες της συνεκτικότητας. Για παράδειγμα, ένα σύνολο ονομάζεται συνεκτικό κατά τόξα (pathwise) με την προϋπόθεση ότι δυο από τα σημεία του μπορούν να συνδεθούν μέσω μιας συνεχούς διαδρομής, η οποία είναι εξ ολοκλήρου εντός του συνόλου. Η συνεκτικότητα δεν έχει την ίδια έννοια με τη συνεκτικότητα κατά τόξα [28].

Έστω η τετραγωνική απεικόνιση της μορφής της εξίσωσης (40). Για  $c = -1$  (σχήμα 3.2) προκύπτει ένα συνεκτικό (ένα τεμάχιο) σύνολο Julia που είναι το κοινό όριο δύο λεκανών έλξης: η λεκάνη του απείρου ελκυστή και η λεκάνη ενός σταθερού ελκυστή, η οποία στην περίπτωση αυτή είναι ο κύκλος περιόδου 2 :  $(-1, 0, -1, 0, \dots)$ . Στις άλλες

περιπτώσεις των σχημάτων 3.2 και 3.3 δεν υπάρχει σταθερός ελκυστής, ενώ το πλήρες σύνολο Julia δεν έχει εσωτερικά σημεία και είναι ίσο με το σύνολο Julia. Για το  $c=1$ ,  $c=2$  και  $c=3$  το πλήρες σύνολο Julia έχει διαλυθεί σε σημεία σκόνης (είναι δηλαδή ολικά μη συνεκτικό), ενώ για  $c=i$  (το οποίο φαίνεται στο σχήμα 3.6) και για  $c=-2$  (σχήμα 3.2) παρατηρούνται οριακές περιπτώσεις: το σύνολο Julia είναι ένα ενιαίο συνεκτικό σύνολο. Επομένως, φαίνεται και από τα παραδείγματα που παρατέθηκαν, αλλά και αποδεικνύεται ότι το σύνολο Julia  $J$  μίας συνάρτησης της μορφής της εξίσωσης (40) είναι είτε συνεκτικό είτε ολικά μη συνεκτικό (μεμονωμένα σημεία με μορφή σκόνης) [27, 28].



**Σχήμα 3.36:** Απεικόνιση συνόλου Julia και των ισοδυναμικών γραμμών για  $c=i$ , γνωστό ως fractal δενδρίτης [25]

### 3.5 Ιδιότητες και παραδείγματα συνόλων Julia

Οι ιδιότητες ενός συνόλου Julia περιλαμβάνει τα ακόλουθα [6]:

- Το σύνολο Julia είναι απωθητής.
- Το σύνολο Julia είναι αναλλοίωτο, δηλαδή ισχύει  $f(J)=J$ .

- Μια τροχιά στο σύνολο  $J$  είναι είτε περιοδική είτε χαοτική.
- Όλα τα ασταθή περιοδικά σημεία βρίσκονται πάνω στο  $J$ .
- Το σύνολο  $J$  είναι είτε ολικά συνεκτικό είτε ολικά μη συνεκτικό.
- Το σύνολο  $J$  έχει σχεδόν πάντα φράκταλ δομή.

Τα λιγοστά παραδείγματα που παρατέθηκαν αποτελούν μόνο ένα ελάχιστο ποσοστό από τις πιθανές απεικονιστικές μορφές που μπορούν να πάρουν τα σύνολα Julia, ακόμη και μόνο μέσω της χρήσης μιας τετραγωνικής εξίσωσης της μορφής της εξίσωσης (40). Στο σχήμα 3.7 φαίνονται κάποια πλήρη σύνολα Julia για συγκεκριμένες τιμές της μεταβλητής  $c$  [25]. Το 3.7(γ), μάλιστα, καλείται κουνέλι του Douady προς τιμήν του μαθηματικού Adrien Douady. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο Julia δεν αποτελεί έναν απλό παραμορφωμένο κύκλο, αλλά αποτελείται από άπειρο αριθμό παραμορφωμένων κύκλων που επίσης αποτελούν ένα συνεκτικό σύνολο. Το εσωτερικό του πλήρους συνόλου Julia έλκεται από έναν ελκυστικό κύκλο περιόδου 3, και πιο συγκεκριμένα τα 3 σταθερά σημεία εντός του συνόλου που φαίνονται με μαύρες τελείες στο σχήμα 3.7(γ).

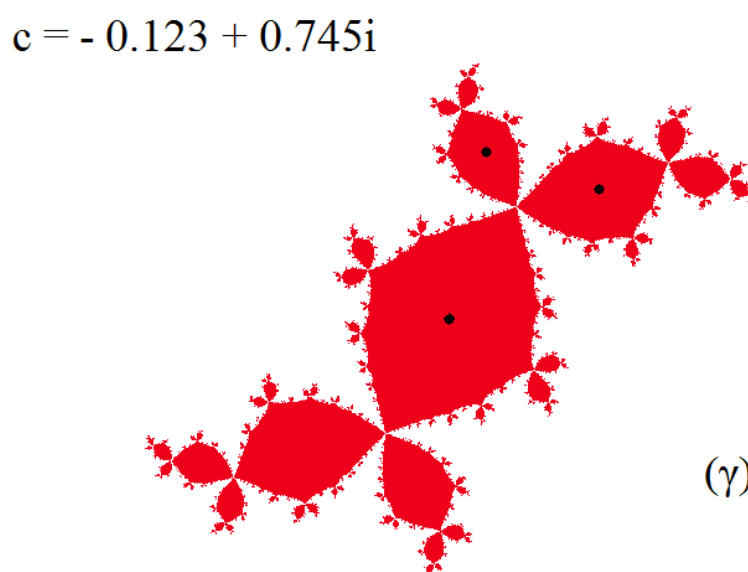
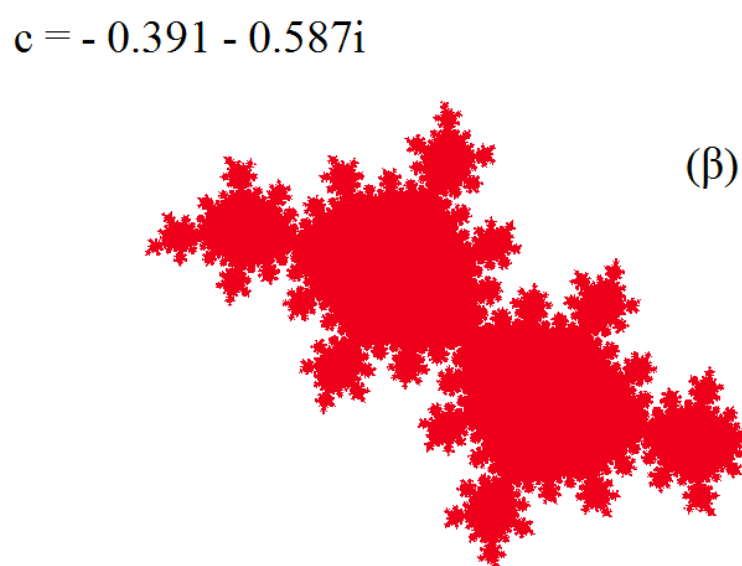
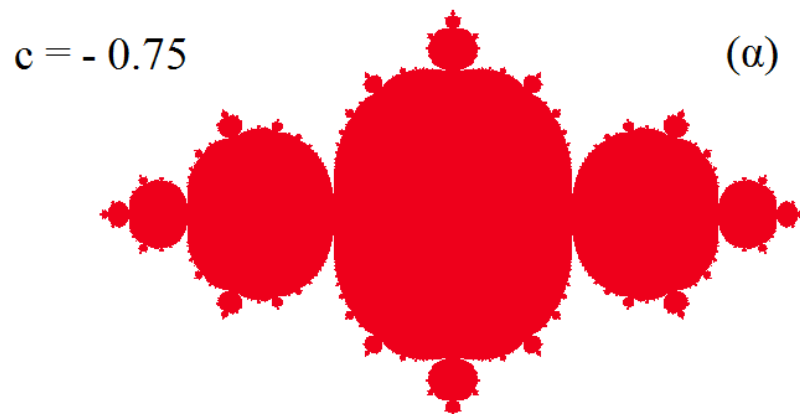
Παραδείγματα άλλων όμορφων απεικονίσεων σε διάφορες χρωματικές αποχρώσεις που προέρχονται από κώδικα σε Matlab φαίνονται στα σχήματα 3.8 – 3.11 [30]. Έτσι δίνεται μία μικρή ένδειξη των πιθανών μορφών που δύνανται να πάρουν τα σύνολα Julia συναρτήσει της μεταβλητής  $c$ . Σε περίπτωση δε, που χρησιμοποιηθούν εξισώσεις πέραν της (40), μπορούν να προκύψουν και περαιτέρω απεικονίσεις. Για παράδειγμα, η εξίσωση:

$$z_n = \frac{z^2 + c}{z^2 - c} \quad (43)$$

με  $c=0,7$  οδηγεί στο πλήρες σύνολο Julia που φαίνεται στο σχήμα 3.12(α) [30], ενώ η εξίσωση:

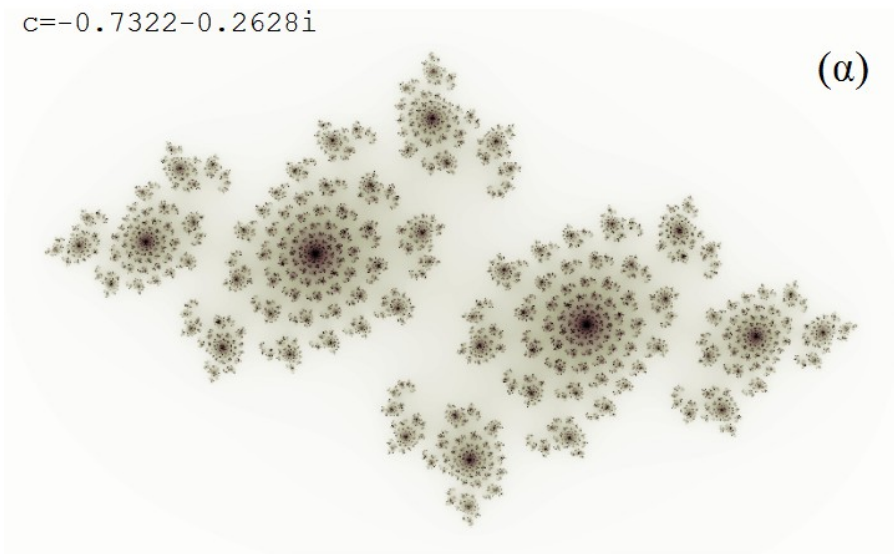
$$z_n = z^3 + d \times z, \text{ με } d = 1,01 e^{0,1i} \quad (44)$$

οδηγεί στο πλήρες σύνολο Julia που φαίνεται στο σχήμα 3.12(β) [30].



Σχήμα 3.37: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του  $c$  [25]

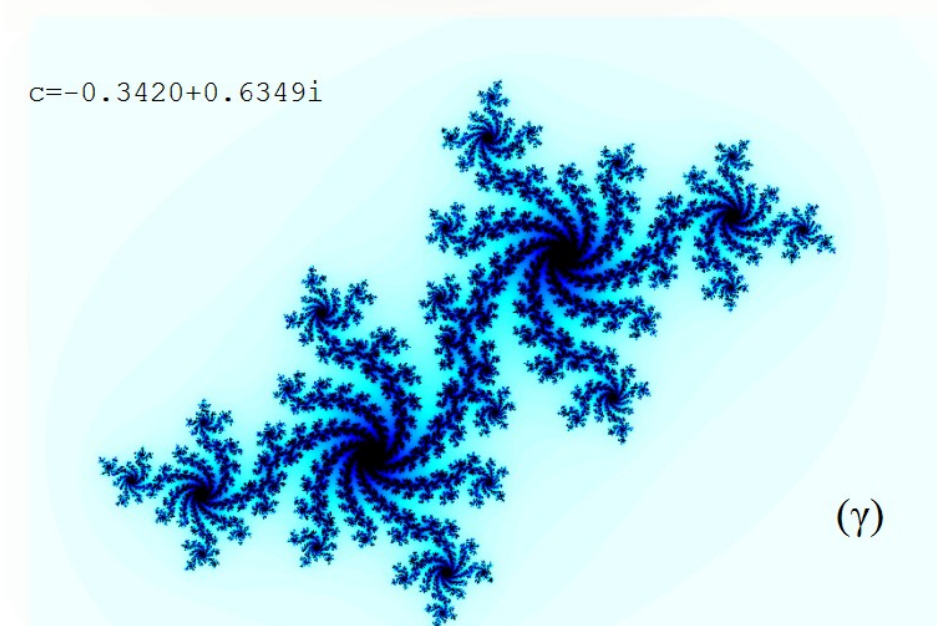
$$c = -0.7322 - 0.2628i$$



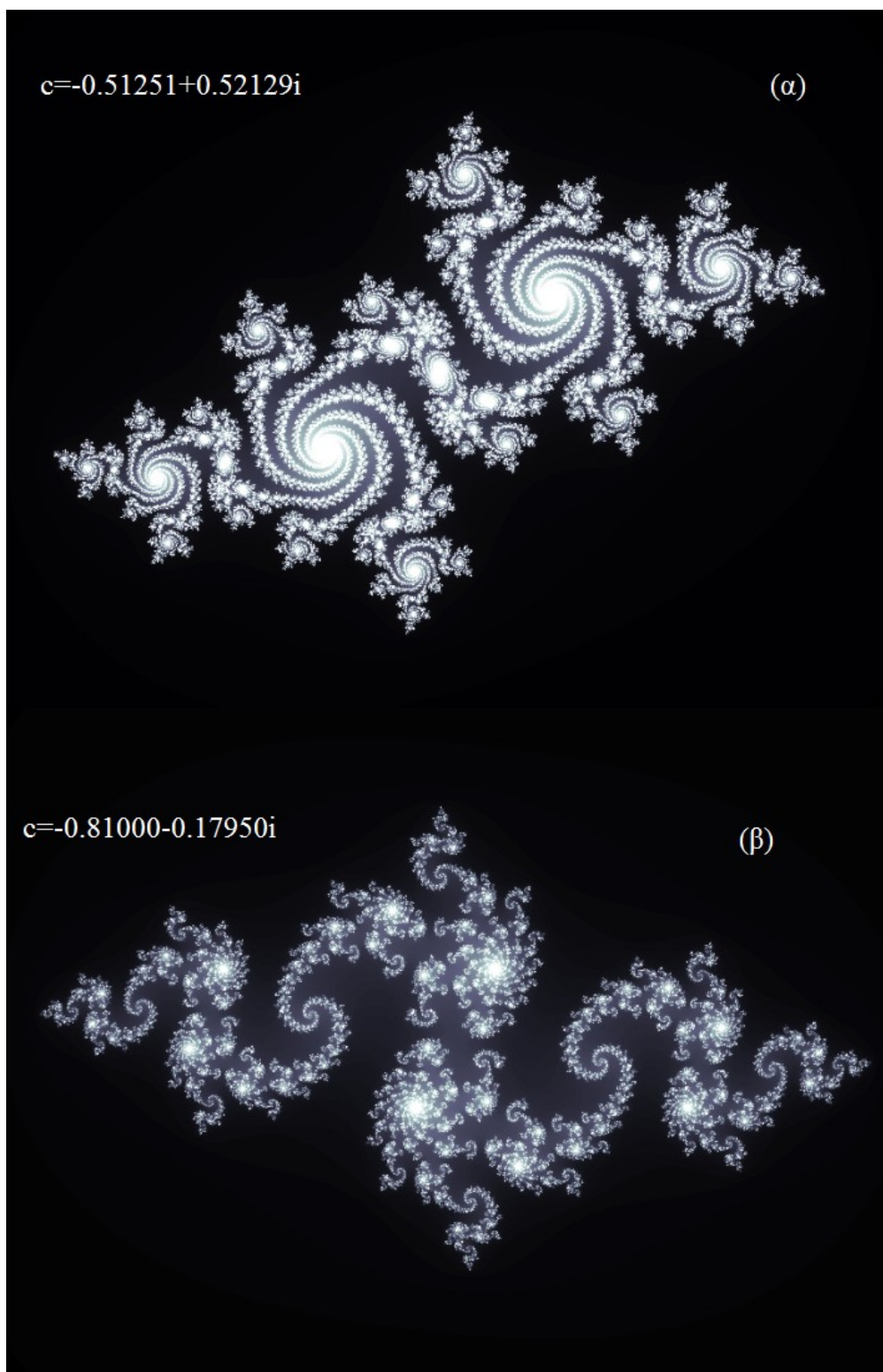
$$c = -0.79543 + 0.17308i$$



$$c = -0.3420 + 0.6349i$$

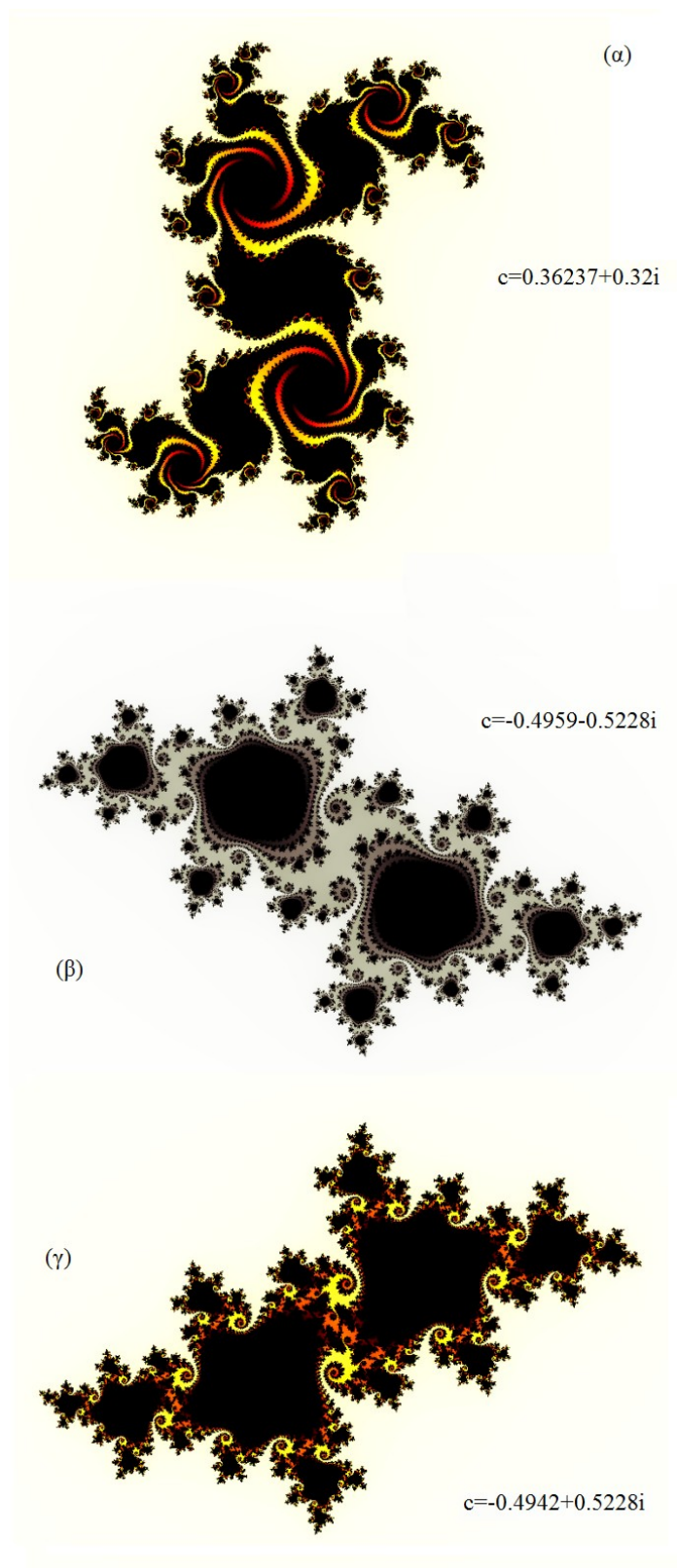


**Σχήμα 3.38:** Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του  $c$  [30]



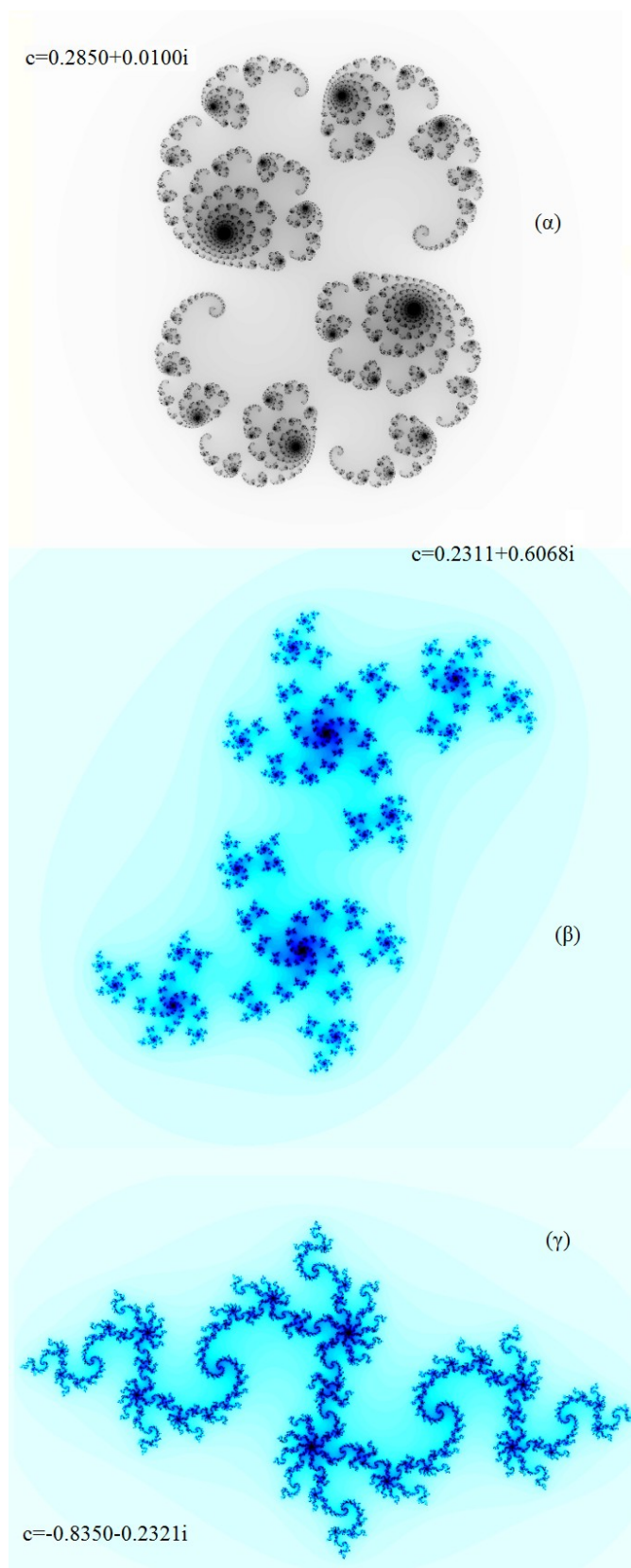
**Σχήμα 3.39:** Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του  $c$  [30]



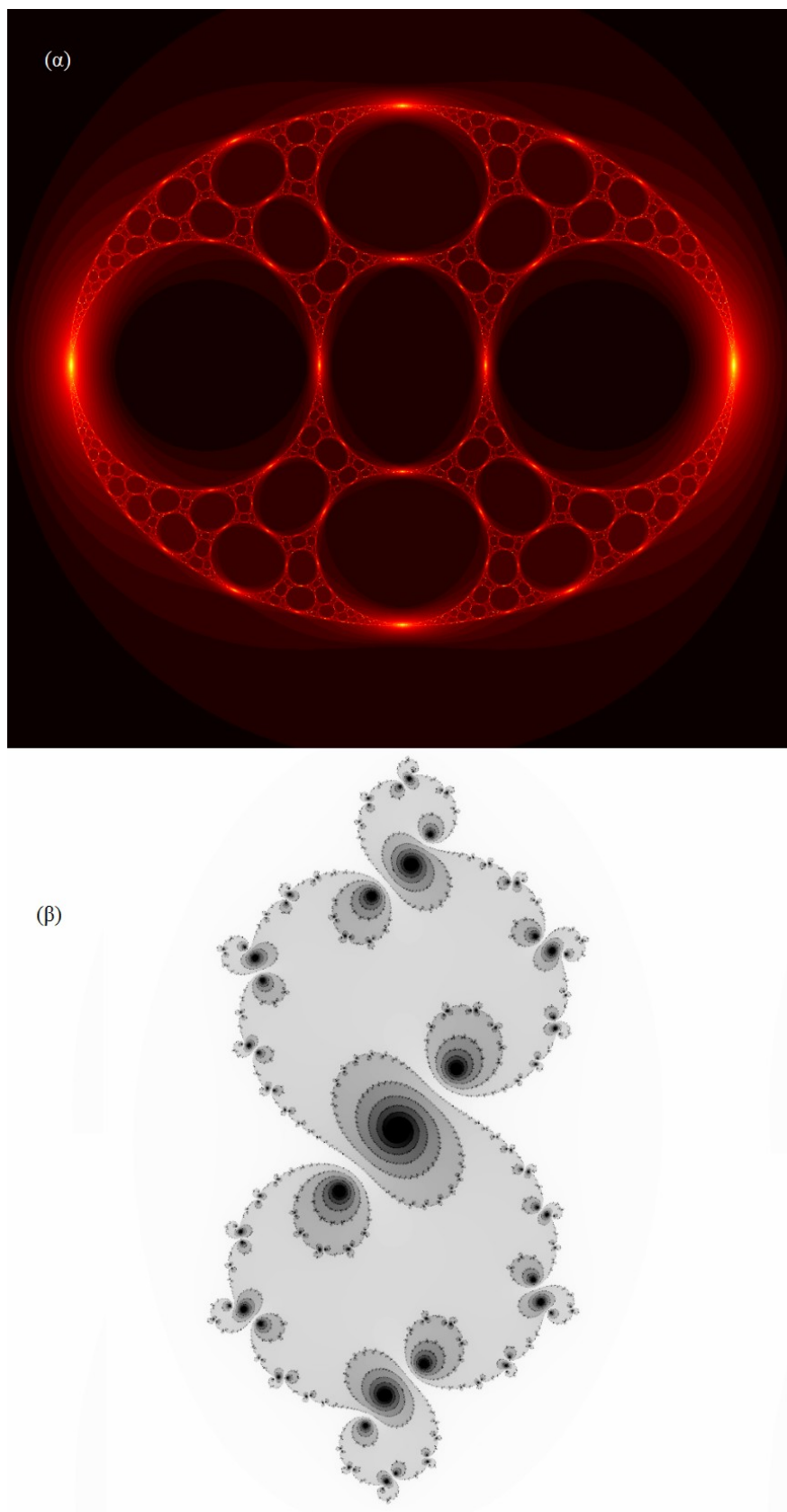


**Σχήμα 3.40:** Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του  $c$  [30]





Σχήμα 3.41: Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συγκεκριμένες τιμές του  $c$  [30]



**Σχήμα 3.42:** Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia για συναρτήσεις διαφορετικές της (40) [30]

## 4. ΣΥΝΟΛΟ MANDELBROT

### 4.1 Εισαγωγή στο σύνολο Mandelbrot

Καθώς τα σύνολα Julia των πολυωνυμικών εξισώσεων είναι πολύπλοκα, οι περισσότερες έρευνες έχουν εστιάσει στα τα σύνολα Julia των πολυωνυμικών εξισώσεων τετραγωνικής μορφής (εξίσωση (40)). Ενώ αυτή η πρακτική φαίνεται περιοριστική, αποδεικνύεται ότι το σύνολο Julia για κάθε πολυώνυμο τετραγωνικής μορφής πρέπει να έχει παρόμοια δυναμική με το σύνολο Julia για κάποιο μέλος της τετραγωνικής οικογένειας. Συνεπώς έχει λογική η εξέταση των συνόλων Julia για εξισώσεις τετραγωνικής μορφής [27].

Το σύνολο Mandelbrot πρωτοεισήχθη από τον μαθηματικό Benoit Mandelbrot το 1979. Ο Mandelbrot, ως επισκέπτης καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Χάρβαρντ, ο άρχισε να μελετά fractals που προέρχονταν από σύνολα Julia, και τα οποία ήταν αμετάβλητα υπό ορισμένους μετασχηματισμούς στο μιγαδικό επίπεδο. Με βάση την προηγούμενη δουλειά των Gaston Julia και Pierre Fatou, ο Mandelbrot χρησιμοποίησε έναν υπολογιστή για να σχεδιάσει εικόνες συνόλων Julia. Εξετάζοντας την τοπολογία αυτών, επινόησε έναν τρόπο να διαχωρίζονται εκείνα τα σύνολα Julia, τα οποία είναι ολικώς συνεκτικά, από εκείνα τα οποία δεν είναι και αποτελούνται από άπειρο πλήθος ξένων συνιστωσών. Επιπλέον, ο διαχωρισμός γίνεται με βάση την τροχιά που εκκινεί από το μηδέν ( $z_0=0$ ), ενώ η τροχιά του μηδενός καθορίζει τη δομή όλων των φραγμένων τροχιών. Συνεπώς, ο Mandelbrot χρησιμοποίησε το γεγονός ότι το σύνολο Julia  $J$  είναι συνεκτικό εάν και μόνον εάν η τροχιά, η οποία παράγεται από την απεικόνιση της τετραγωνικής μορφής των εξισώσεων (40) ( $z_{n+1}=f_c(z_n)=z_n^2+c, c \in \mathbb{C}$ ), είναι συνεκτική [6].

Το σύνολο Mandelbrot ορίζεται ως το σύνολο των τιμών της μεταβλητής  $c \in \mathbb{C}$  της εξίσωσης (40), για τις οποίες το πλήρες σύνολο Julia της  $f_c(z_n)$  είναι συνεκτικό [27]:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c(z_n)) \text{ συνεκτικό}\} \quad (45)$$

Συνεπώς θα ισχύει ότι:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| < k \text{ για } n \text{ ακέραιος και } k > 0\} \quad (46)$$

δηλαδή το  $M$  είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών  $c$  για τους οποίους η τροχιά

$f_c^n(0)$  είναι φραγμένη και  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| \rightarrow l \neq \infty$ .

Με βάση το θεώρημα της βασικής διχοτόμησης, για την  $f(z) = z^2 + c$  ισχύει μία από τις δύο παρακάτω προτάσεις [6]:

- Η τροχιά για  $z_0 = 0$  διαφεύγει στο άπειρο, οπότε το πλήρες σύνολο Julia αποτελείται από άπειρο σε πλήθος ξένων συνιστωσών.
- Η τροχιά για  $z_0 = 0$  είναι φραγμένη, οπότε το πλήρες σύνολο Julia είναι συνεκτικό.

## 4.2 Αλγόριθμος κατασκευής συνόλου Mandelbrot

Με βάση το κεφάλαιο 3.3, ένας αλγόριθμος κατασκευής του συνόλου Mandelbrot βασίζεται στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

- Το κριτήριο διαφυγής στο άπειρο μίας τροχιάς της  $f_c$  είναι η τιμή της μεταβλητής  $c \in \mathbb{C}$ : Εάν  $|c| > 2$ , τότε η τροχιά της  $f_c^n(0)$  διαφεύγει στο άπειρο. Συνεπώς, το σύνολο Mandelbrot βρίσκεται εντός του κύκλου με ακτίνα 2 στο μιγαδικό επίπεδο
- Με βάση το παραπάνω, για  $|c| \leq 2$  ελέγχεται η τιμή της  $|f_c^n(0)|$ :
  - Εάν  $|f_c^n(0)| > 2$ , τότε η τροχιά διαφεύγει στο άπειρο
  - Εάν  $|f_c^n(0)| \leq 2$ , τότε η τροχιά είναι φραγμένη

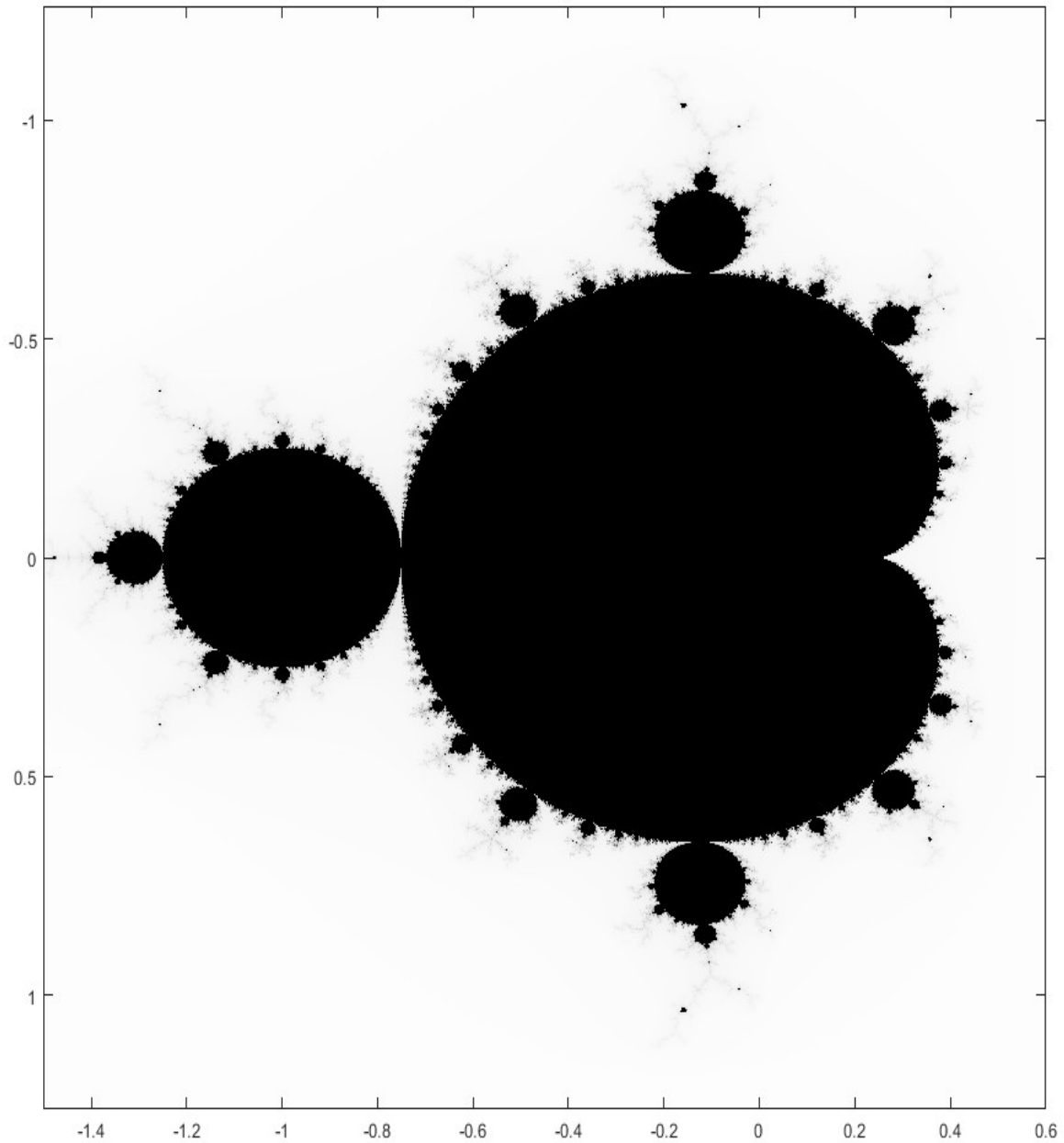
Επομένως, για την απεικόνιση του συνόλου Mandelbrot επιλέγεται ένας μιγαδικός χώρος με ακτίνα τουλάχιστον 2 και καθορίζεται ένας μέγιστος αριθμός επαναλήψεων  $N$ . Για κάθε σημείο  $c \in \mathbb{C}$  του πλέγματος υπολογίζονται τα  $N$  πρώτα σημεία της τροχιάς της  $f_c^n(0)$  και εφαρμόζεται το ακόλουθο κριτήριο:

- Εάν  $|f_c^n(0)| > 2$  για  $n \leq N$ , τότε οι επαναλήψεις σταματούν, το σημείο θεωρείται ότι δεν ανήκει στο  $M$  και χρωματίζεται ανάλογα (πχ. λευκό)
- Εάν  $|f_c^n(0)| \leq 2$  για κάθε  $n \leq N$ , τότε το σημείο θεωρείται ότι ανήκει στο  $M$  και χρωματίζεται ανάλογα (πχ. μαύρο)

Σημειώνεται ότι ο αλγόριθμος αυτός προσφέρει τόση ακρίβεια, όσες επαναλήψεις επιλέξει κανείς, καθώς μπορούν να απαιτούνται περισσότερες από  $N$  επαναλήψεις

## Θεωρία του Χάους

για να διαπιστωθεί εάν το κάθε σημείο διαφεύγει στο άπειρο ή όχι. Με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο, κατασκευάστηκε το σύνολο Mandelbrot με την χρήση του Matlab και απεικονίζεται στο σχήμα 4.1 για  $N=400$  επαναλήψεις [30].



**Σχήμα 4.43:** Απεικόνιση του συνόλου Mandelbrot για  $N=400$  επαναλήψεις του αλγορίθμου κατασκευής [30]

### 4.3 Χαρακτηριστικά και ιδιότητες του συνόλου Mandelbrot

Για την εύρεση των σταθερών σημείων περιόδου 1 του συνόλου Mandelbrot, λύνεται η εξίσωση  $f(z_n) = z_n \Leftrightarrow z_n^2 + c = z_n$ , για κάθε  $n$ . Αυτό ισοδυναμεί με την λύση της:

$$z^2 - z + c = 0, c \in \mathbb{C} \quad (47)$$

από όπου προκύπτουν οι δύο λύσεις:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

Η ευστάθεια των σημείων περιόδου 1 καθορίζεται από την παράγωγο:

$$\frac{df}{dz} = 2z = r e^{i\theta}, \text{ με } r > 0 \text{ και } 0 < \theta < 2\pi \quad (48)$$

Αντικαθιστώντας την (44) στην (43) προκύπτει ότι:

$$c = \frac{r e^{i\theta}}{2} - \frac{r^2 e^{i2\theta}}{4} \quad (49)$$

Τα σταθερά σημεία είναι ευσταθή εάν ισχύει:

$$\left| \frac{df(z_{1,2})}{dz} \right| < 1 \Leftrightarrow |2z_{1,2}| < 1 \Leftrightarrow |z_{1,2}| < 1/2 \quad (50)$$

Επειδή αποδεικνύεται ότι το πολύ ένα από τα  $z_{1,2}$  είναι ελκυστικό (έστω το  $z_1$ ), το σύνολο  $\{c \in \mathbb{C} : c = z_1 - z_1^2 \text{ με } |z_1| < 1/2\}$  εκφράζει τα σταθερά σημεία με τροχιές περιόδου 1 και προκύπτει από τις (48) και (49) ότι το σύνορο του συνόλου αυτού είναι το

$c = \frac{e^{i\theta}}{2} - \frac{e^{i2\theta}}{4}$ , το οποίο αποτελεί το μεγάλο κεντρικό καρδιοειδές που φαίνεται στο

σχήμα 4.1 [6].

Για την εύρεση των σταθερών σημείων περιόδου 2 του συνόλου Mandelbrot, λύνεται η εξίσωση  $f^2(z_n) = z_n \Leftrightarrow (z_n^2 + c)^2 + c = z_n$ , για κάθε  $n$ . Αυτό ισοδυναμεί με την λύση της εξίσωσης:

$$z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = 0, c \in \mathbb{C} \quad (51)$$

Καθώς τα σημεία περιόδου 1 επαναλαμβάνονται σε κάθε δεύτερη επανάληψη, τα σημεία  $z_{1,2}$  ικανοποιούν την εξίσωση (51) και αυτή γίνεται:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z^2 + z + c = 1) = 0 \quad (52)$$

Η (52) έχει δύο επιπλέον ρίζες, τις ακόλουθες:

$$z_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4c}}{2}$$

Η δεύτερη παράγωγος που καθορίζει την ευστάθεια είναι:

$$\frac{d^2 f}{dz} = 4z^3 + 4cz = 4z(z^2 + c) \quad (53)$$

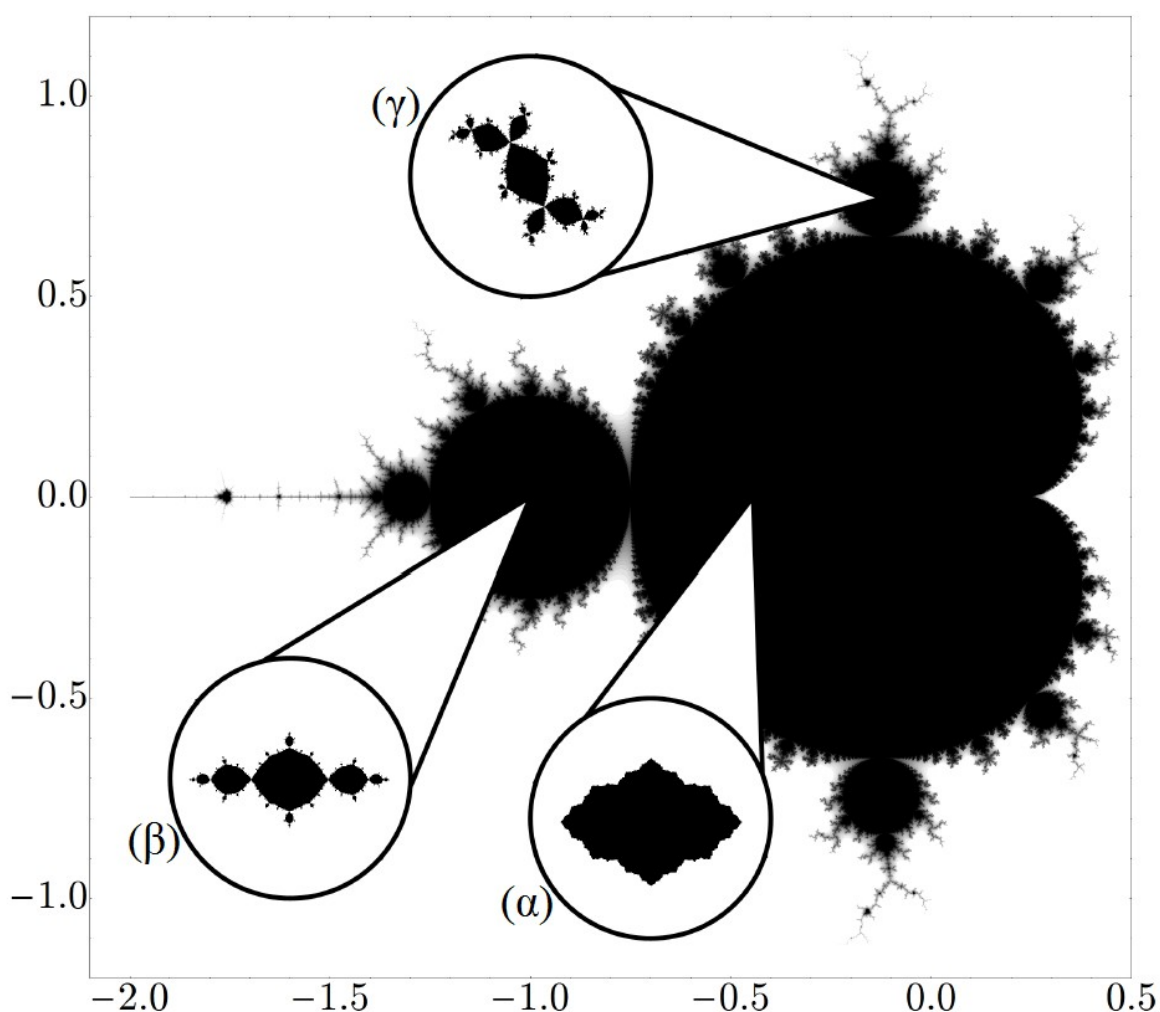
Αντικαθιστώντας τις ρίζες στην (53) προκύπτει ότι για να είναι ευσταθή τα σταθερά σημεία θα πρέπει να ισχύει:

$$\left| \frac{d^2 f(z_{3,4})}{dz} \right| < 1 \Leftrightarrow |4 + 4c| < 1 \Leftrightarrow |1 + c| < 1/4 \quad (54)$$

Συνεπώς τα σταθερά σημεία περιόδου 2 βρίσκονται εντός μιας καμπύλης, που εν προκειμένω είναι κύκλος με κέντρο το σημείο  $(-1, 0)$  και ακτίνα  $1/4$ . Στο σχήμα 4.1 φαίνεται αυτός ο κύκλος ακριβώς αριστερά του καρδιοειδούς [6].

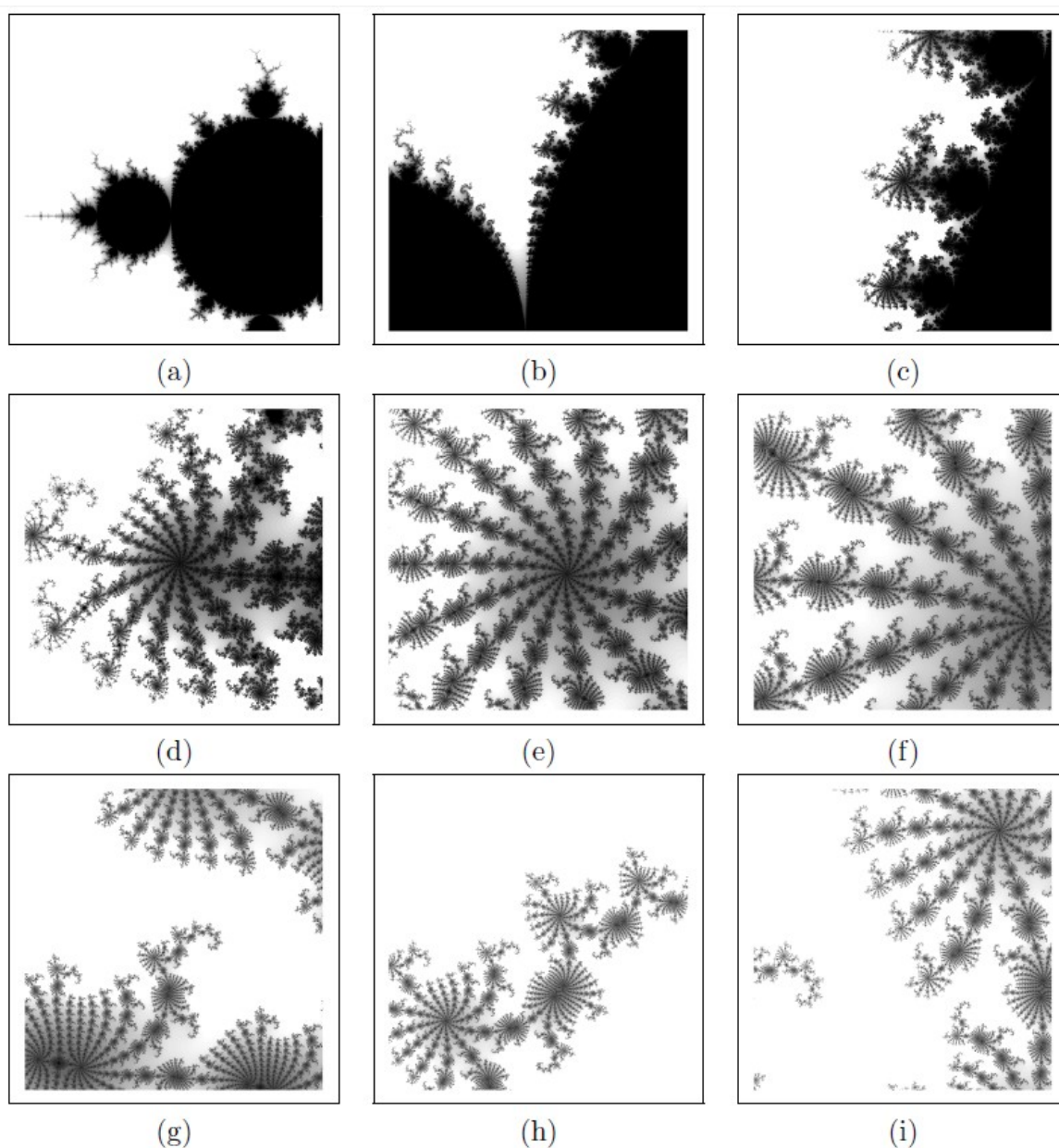
Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε σημείο στο σχήμα 4.1 αντιστοιχεί σε ένα πλήρες σύνολο Julia, με τα μαύρα σημεία να απεικονίζουν συνεκτικά σύνολα Julia και τα λευκά σημεία μη συνεκτικά σύνολα Julia. Το σχήμα 4.2 δείχνει πλήρη σύνολα Julia που αντιστοιχούν σε τρία εσωτερικά σημεία του συνόλου Mandelbrot [27]. Σε

αντίθεση με άλλα fractals που παρατέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, η δομή του συνόλου Mandelbrot δεν είναι παρόμοια. Αντιθέτως, έχει εντελώς διαφορετικές τοπικές δομές σε διαφορετικά σημεία. Το Σχήμα 4.3 δείχνει τα διαδοχικά στάδια μίας μεγέθυνσης στο σύνολο Mandelbrot, με κάθε σειρά να αντιπροσωπεύει δύο τάξεις μεγέθους [27]. Όπως φαίνεται, αποκαλύπτεται νέα δομή σε κάθε κλίμακα και το πρότυπο δεν φαίνεται να επαναλαμβάνεται. Το ίδιο θα συνέβαινε σχεδόν σε οποιοδήποτε σημείο της ομάδας Mandelbrot, με διαφορετικές δομές να αποκαλύπτονται σε κάθε σημείο [27].



**Σχήμα 4.44:** Απεικόνιση πλήρων συνόλων Julia ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) για τρία σημεία εντός του συνόλου Mandelbrot





**Σχήμα 4.45:** Απεικόνιση διαδοχικών μεγεθύνσεων του συνόλου Mandelbrot

Το σύνολο Mandelbrot χωρίζεται σε εμφανείς θαλάμους (σχήμα 4.1). Η μεγάλη περιοχή με σχήμα καρδιάς που περιέχει την προέλευση αναφέρεται ως το κύριο καρδιοειδές, ενώ οι μικρότερες κυκλικές περιοχές συνήθως αναφέρονται ως εξογκώματα. Κάθε ένα από αυτά τα εξογκώματα έχει ακόμα μικρότερα εξογκώματα, τα οποία «φυτρώνουν» από αυτά και στη συνέχεια στα μακρινά άκρα του συνόλου Mandelbrot φαίνονται μικρές τρίχες να εκτείνονται στο μιγαδικό επίπεδο. Τα σύνολα Julia που αντιστοιχούν στα σημεία σε κάθε μία από αυτές τις διακριτές περιοχές έχουν πολύ διαφορετικές δομές [22]:

Άννα Ντέτς

- Αν το  $c \in \mathbb{C}$  βρίσκεται στο κύριο καρδιοειδές του συνόλου Mandelbrot τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι το σύνολο Julia είναι μια απλή κλειστή καμπύλη. Ως παράδειγμα φαίνεται το αντίστοιχο πλήρες σύνολο Julia ( $\alpha$ ) στο σχήμα 4.2.
- Αν το  $c \in \mathbb{C}$  βρίσκεται σε ένα από τα εξόγκωματα το σύνολο Julia δεν είναι απλό και αποτελείται στην πραγματικότητα από τροχιές διαφόρων περιόδων, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από το εξόγκωμα και την θέση του στο σύνολο Mandelbrot. Για παράδειγμα, το πλήρες σύνολο Julia ( $\beta$ ) στο σχήμα 4.2 είναι γνωστό ως βασιλική (βλ. Κεφ. 3.2), αντιστοιχεί στο κύριο εξόγκωμα αριστερά του καρδιοειδούς και οι τροχιές του είναι περιόδου 2. Αντίστοιχα, το πλήρες σύνολο Julia ( $\gamma$ ) στο σχήμα 4.2 είναι το κουνέλι Douady (βλ. Κεφ. 3.5), αντιστοιχεί στο εξόγκωμα ακριβώς άνω του καρδιοειδούς και οι τροχιές του είναι περιόδου 3.
- Αν το  $c \in \mathbb{C}$  βρίσκεται σε μία από τις τρίχες (ή κεραίες), τότε θα είναι ίσο με το σύνολο Fatou ( $F(f_c)$ ) και τόσο λεπτό στη δομή του που η αφαίρεση ενός μόνο σημείου θα το κάνει μη συνεκτικό. Σε αυτή την περίπτωση το  $J_c$  ονομάζεται δενδρίτης (βλ. σχήμα 3.6).

Η τομή του συνόλου Mandelbrot με τον πραγματικό άξονα είναι ακριβώς το διάστημα  $[-2, 1/4]$ . Οι παράμετροι κατά μήκος αυτού του διαστήματος μπορούν να τοποθετηθούν σε μία αντιστοίχιση ένα προς ένα με εκείνες της λογιστικής απεικόνισης [1]:

$$z \rightarrow \lambda z(1-z), \lambda \in [1,4] \quad (55)$$

Η αντιστοίχιση δίνεται από τον τύπο:

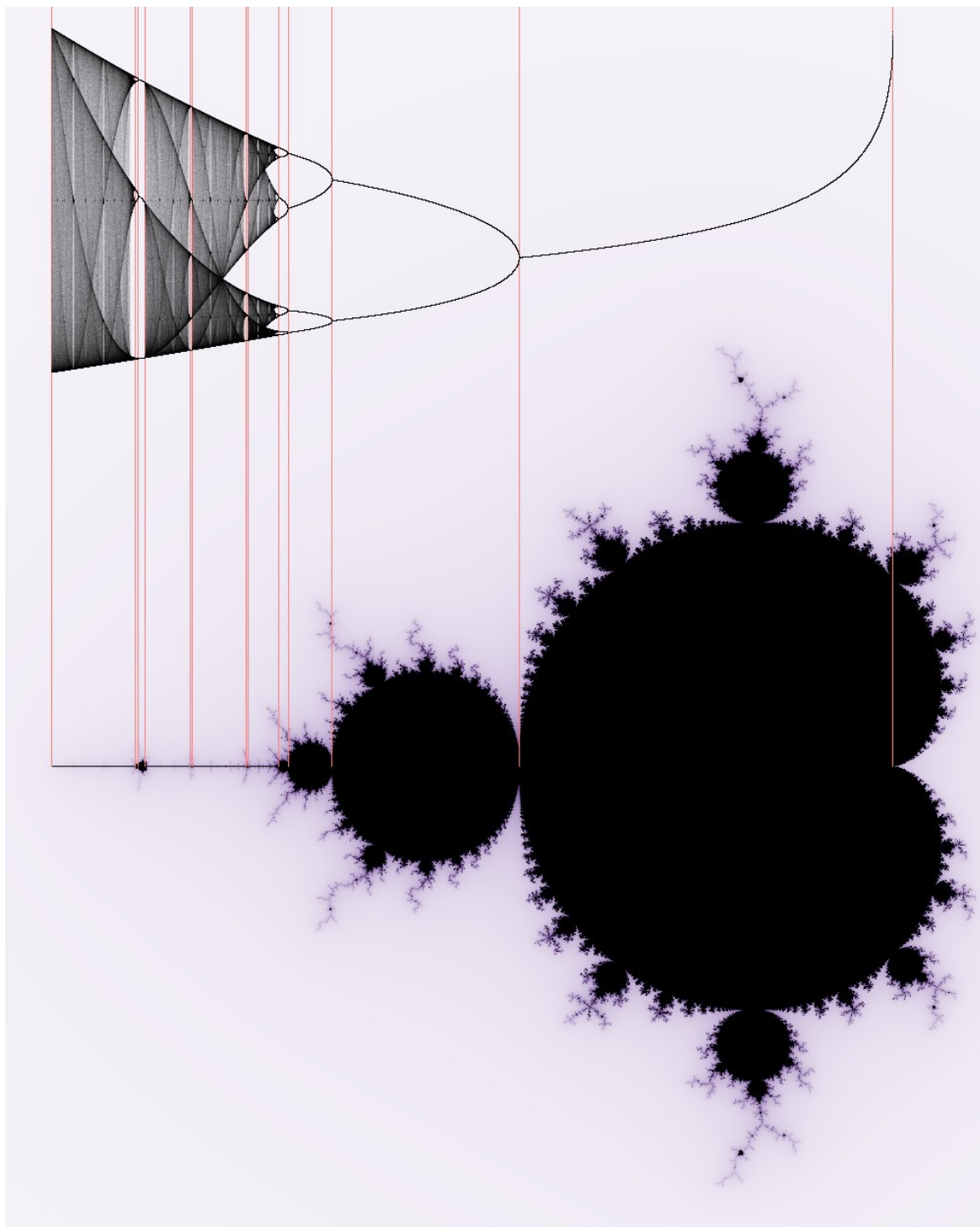
$$c = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \quad (56)$$

και φαίνεται στο σχήμα 4.4. Τα σημεία των διακλαδώσεων της λογιστικής απεικόνισης αντιστοιχούν στους θαλάμους του συνόλου Mandelbrot. Το καρδιοειδές που εμφανίζεται για  $c \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$  αντιστοιχεί σε τιμές  $\lambda \in [0,3]$ , ενώ το μεγάλο

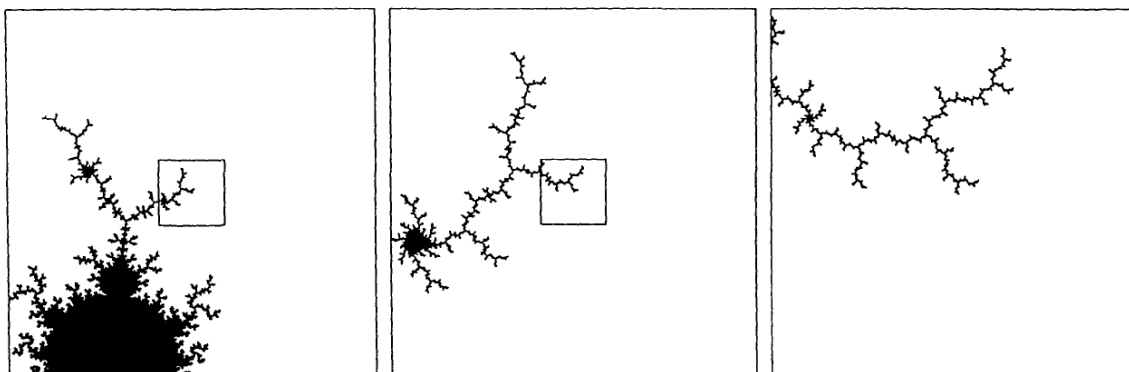
εξόγκωμα (περιόδου δύο) με  $c \in [-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}]$  στον πραγματικό άξονα αντιστοιχεί σε τιμές  $\lambda \in [3, 3,4495]$  της λογιστικής απεικόνισης. Το σημείο  $c = -2$  αποτελεί το τέλος της κεραίας του M και αντιστοιχεί στην τιμή  $\lambda = 4$  στην λογιστική απεικόνιση. Φαίνεται επίσης ότι τα περιοδικά παράθυρα που διακόπτουν το χάος στην λογιστική απεικόνιση αντιστοιχούν σε μικρά αντίγραφα του Mandelbrot που βρίσκονται στην κεντρική κεραία του. Η σταθερά Feigenbaum  $\delta = 4,6692$  παρατηρείται επίσης στο σύνολο Mandelbrot και υπολογίζεται ως ο λόγος των διαμέτρων των διαδοχικών κύκλων πάνω στον πραγματικό άξονα της απεικόνισης του συνόλου Mandelbrot [1].

Μία άλλη ιδιότητα του συνόλου Mandelbrot είναι ότι παρουσιάζει αυτο-ομοιότητα σε συγκεκριμένα σημεία, τα οποία καλούνται σημεία Misiurewicz. Ένα σημείο  $c \in M$  ονομάζεται σημείο Misiurewicz εάν το 0 είναι τελικώς περιοδικό υπό την  $f_c(z)$  (εξίσωση (40)) αλλά όχι περιοδικό. Δηλαδή ισχύει ότι για κάποιους ακέραιους  $n > k > 0$  θα είναι  $f_c^n(0) = f_c^k(0) = 0$  αλλά  $f_c^{n-1}(0) \neq f_c^{k-1}(0)$ . Ένα χαρακτηριστικό σημείο Misiurewicz προκύπτει για  $c = i$ . Το σχήμα 4.5 δείχνει τρεις διαδοχικές μεγεθύνσεις στην γειτονιά αυτού του σημείου, οι οποίες αποκαλύπτουν χαρακτηριστική ομοιότητα με το σύνολο Julia για  $c = i$  (δενδρίτης, βλ. σχήμα 3.4) [23].

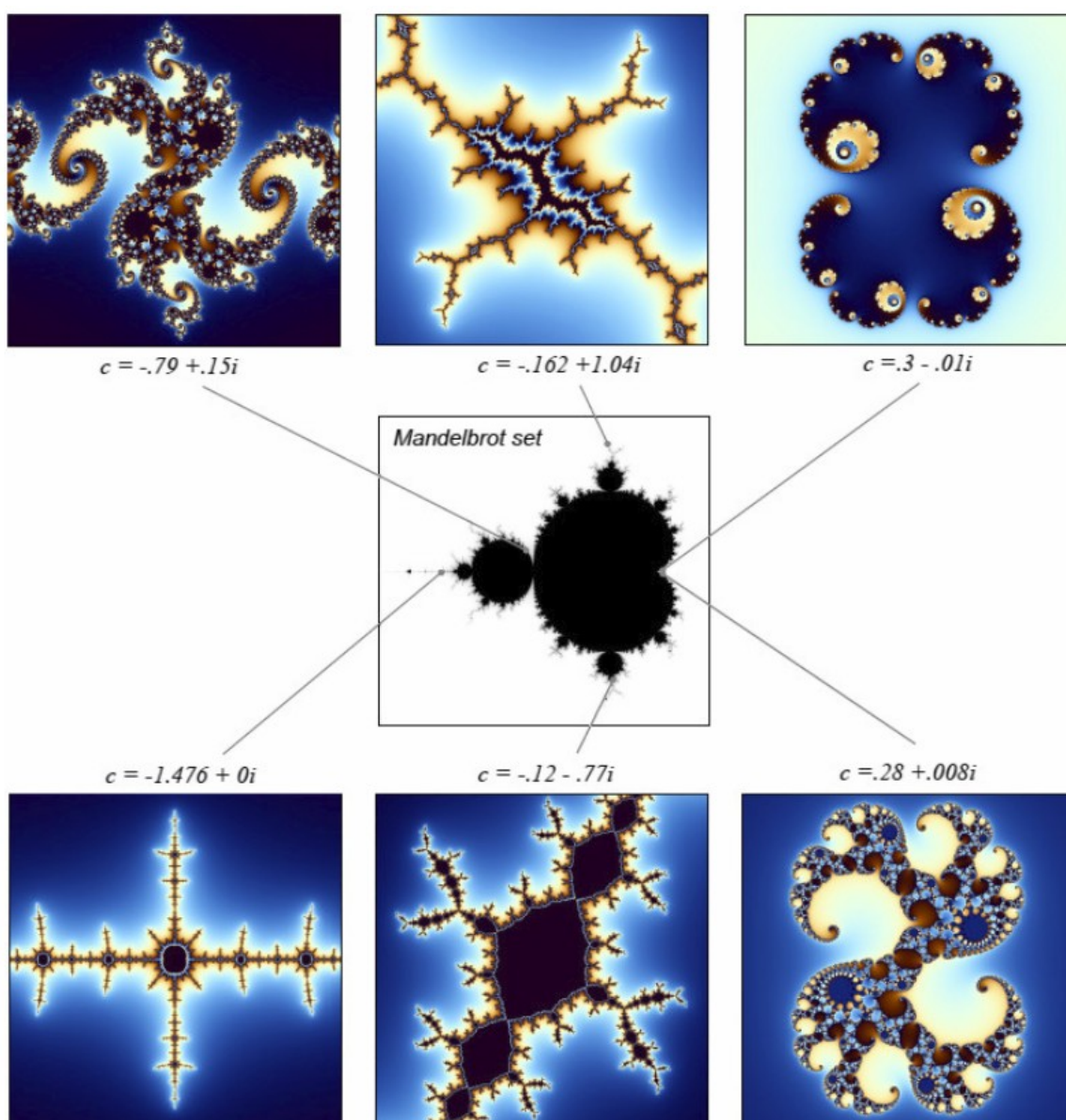
Γενικώς ισχύει ότι τα πιο ενδιαφέροντα σύνολα Julia εμφανίζονται στις άκρες του συνόλου Mandelbrot. Στο σχήμα 4.6 απεικονίζονται μερικά σύνολα Julia που αντιστοιχούν σε τέτοια σημεία στο σύνολο Mandelbrot [31].



**Σχήμα 4.46:** Αντιστοίχιση μεταξύ λογιστικής απεικόνισης και συνόλου Mandelbrot



Σχήμα 4.47: Διαδοχικές μεγεθύνσεις της γειτονιάς του M για  $c=i$  [Similarities]



Σχήμα 4.48: Σύνολα Julia ευρισκόμενα στις άκρες του συνόλου Mandelbrot

## 5. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

### 5.1 Εισαγωγή στην κβαντική μηχανική

Η κβαντική μηχανική αποτελεί τον κλάδο της Φυσικής που μελετά τα φυσικά συστήματα του μικροκόσμου (μόρια, άτομα, κλπ) και αναπτύχθηκε στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα από επιστήμονες, όπως ο Planck, ο Bohr, ο Heisenberg, ο Schrödinger και άλλοι, με σκοπό να περιγράψει και να εξηγήσει τα ανεξήγητα από την κλασική φυσική φυσικά φαινόμενα, όπως για παράδειγμα την ακτινοβολία του μέλανος σώματος και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Έκτοτε η κβαντική μηχανική επαληθεύτηκε σε σχετικά πειράματα που διεξήχθησαν και αποτέλεσε το σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη τεχνολογικών εφαρμογών, όπως οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, οι τηλεπικοινωνίες, και η επιστήμη υλικών. Η κβαντική μηχανική στηρίζεται στα ακόλουθα βασικά αξιώματα [32]:

1. Η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από ένα κυματοδιάνυσμα  $|\Psi\rangle$  που εξαρτάται από τη θέση και το χρόνο και ανήκει σε έναν διανυσματικό χώρο που λέγεται χώρος του Hilbert.
2. Κάθε παρατηρήσιμο μέγεθος στην κλασική μηχανική αντιστοιχεί σε έναν Ερμιτιανό τελεστή στην κβαντική μηχανική.
3. Εάν μετρηθεί μια ποσότητα που περιγράφεται από έναν τελεστή  $A$ , τότε το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με μια εκ των ιδιοτιμών  $a$  του τελεστή  $A$ , οι οποίες υπολογίζονται από την εξίσωση  $A|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$ .
4. Η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας που περιγράφεται από τον τελεστή  $A$  είναι:  $\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle$ .
5. Η χρονική εξέλιξη του κυματοδιανύσματος καθοδηγείται από την χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger:  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ , όπου  $H$  η Χαμιλτονιανή και  $E$  η ολική ενέργεια του συστήματος. Στην εξίσωση Schrödinger το σύστημα θεωρείται απομονωμένο από το περιβάλλον του και η εξέλιξη του δεν συνοδεύεται από απώλεια της πληροφορίας του συστήματος για οποιοδήποτε χρόνο  $t$ .
6. Η εξίσωση Schrödinger είναι πρωτοτάξια ως προς το χρόνο. Συνεπώς, εάν είναι γνωστή η κυματοσυνάρτηση (δηλαδή το κυματοδιάνυσμα υπό συγκεκριμένη μετρητική βάση) σε μια δεδομένη στιγμή, τότε είναι γνωστή η

εξέλιξή της για κάθε χρόνο  $t$ . Αν η  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  είναι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger, τότε λύση αποτελεί και η  $\Psi = \sum_n c_n \Psi_n$ , με  $\sum_n |c_n|^2 = 1$ . Τότε η  $\Psi$  βρίσκεται σε κβαντική υπέρθεση των  $\Psi_n$ . Ο συντελεστής  $|c_n|^2$  είναι η πιθανότητα να μετρηθεί η  $\Psi$  στην κατάσταση  $\Psi_n$ , ενώ  $c_n \in \mathbb{C}$ .

Τα παραπάνω αξιώματα σε συνδυασμό με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, σύμφωνα με την οποία δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη γνώση της θέσης και της ορμής ενός κβαντικού συστήματος, συγκροτούν την επονομαζόμενη καθιερωμένη ή ορθόδοξη κβαντική μηχανική (SQM ή Standard Quantum Mechanics). Η κβαντική μηχανική στηρίζεται σε δύο βασικές έννοιες [32]:

- 1) τις παρατηρήσιμες ποσότητες, δηλαδή αυτές που μπορούν να μετρηθούν
- 2) τις μετρήσεις αυτών των ποσοτήτων

## 5.2 Εισαγωγή στο κβαντικό χάος

Το κβαντικό χάος είναι ένας κλάδος της φυσικής που μελετά πώς τα χαοτικά κλασικά δυναμικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν ιδωμένα από την μεριά της κβαντικής θεωρίας. Το πρωταρχικό ερώτημα που το κβαντικό χάος προσπαθεί να απαντήσει είναι εάν υπάρχει κβαντικό ανάλογο του κλασικού χάους και πώς αυτό ορίζεται. Σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας, η συμπεριφορά των συστημάτων που περιγράφονται από τη θεωρία της κβαντικής μηχανικής αναπαράγει την κλασική φυσική στο όριο μεγάλων κβαντικών αριθμών. Συνεπώς, για μεγάλες τροχιές και για μεγάλες ενέργειες, οι κβαντικοί υπολογισμοί πρέπει να συμφωνούν με τους κλασικούς υπολογισμούς. Με αυτή την έννοια η Κλασική Φυσική ουσιαστικά θεωρείται σαν οριακή περίπτωση της Κβαντομηχανικής [1].

Συνέπεια της Αρχής της αντιστοιχίας είναι και η διαπίστωση πως όσα μεγέθη διατηρούνται στην Κλασική Μηχανική, αναγκαστικά διατηρούνται και στην Κβαντομηχανική (π.χ. ορμή, στροφορμή κλπ). Επομένως θα πρέπει να υπάρχουν κβαντικοί μηχανισμοί που κρύβουν το κλασικό χάος. Εάν η κβαντική μηχανική αποδείξει μια εκθετική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, τότε μπορεί να προκύψει εκθετική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες στο κλασικό χάος, το οποίο πρέπει να είναι το όριο της αρχής της αντιστοιχίας της κβαντικής μηχανικής. Για την αντιμετώπιση των παραπάνω ζητημάτων στο κβαντικό χάος, έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες προσεγγίσεις [1]:

Άννα Ντέτς



- Ανάπτυξη μεθόδων για την επίλυση κβαντικών προβλημάτων όπου η διαταραχή δεν μπορεί να θεωρηθεί μικρή στη θεωρία διαταραχών και όπου οι κβαντικοί αριθμοί είναι μεγάλοι
- Συσχέτιση στατιστικών περιγραφών ιδιοτιμών (ενεργειακών επιπέδων) με την κλασική συμπεριφορά της Χαμιλτονιανής ( $H$ ) του συστήματος.
- Ημικλασικές μέθοδοι, όπως η θεωρία της περιοδικής τροχιάς που συνδέει τις κλασικές τροχιές του δυναμικού συστήματος με τα κβαντικά χαρακτηριστικά.
- Άμεση εφαρμογή της αρχής της αντιστοιχίας

Η χαοτική συμπεριφορά είναι ιδιότητα των συστημάτων που παρουσιάζουν τοπική αστάθεια. Εφόσον αποδειχθεί η ύπαρξη κβαντικών συστημάτων με τοπική αστάθεια, θα πρέπει το ενεργειακό φάσμα να μεταβάλλεται με κάθε μικρή μεταβολή της Χαμιλτονιανής  $H$ , και επομένως μπορεί να δοθεί μια στατιστική περιγραφή του φάσματος. Η πληθώρα των αποτελεσμάτων που αναφέρονται στην βιβλιογραφία για το κβαντικό χάος συγκλίνουν στα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα [33]:

- Σε συστήματα που παρουσιάζουν χαοτική συμπεριφορά στο κλασικό όριο, η κατανομή των ενεργειακών διαφορών των γειτονικών κβαντικών επιπέδων είναι η ίδια με τις διακυμάνσεις των ιδιοτιμών τυχαίων μητρών.
- Κβαντική χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται σε υψηλότερες ενέργειες διέγερσης, από ό,τι στο κλασικό χάος.

Η θεωρία των τυχαίων μητρών έχει χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία των πολύπλοκων φασμάτων των ατομικών πυρήνων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η Χαμιλτονιανή θεωρείται ως μια  $N \times N$  στοχαστική μήτρα. Το σύνολο όλων των τυχαίων μητρών καθορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ( $P(H), d(H)$ ) και υπολογίζονται οι διακυμάνσεις των ιδιοτιμών αυτών των μητρών στο όριο όπου το  $N$  είναι αρκετά μεγάλο. Εάν η Χαμιλτονιανή είναι αντιστρεπτή ως προς το χρόνο και ισοτροπική στον χώρο, τότε οι Χαμιλτονιανές μήτρες είναι συμμετρικές και πραγματικές. Η στατιστική των διακυμάνσεων των ιδιοτιμών σε αυτήν την περίπτωση αναφέρεται ως Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE), ενώ παρουσία μαγνητικών πεδίων, η Χαμιλτονιανή χάνει τη συμμετρία ως προς τον χρόνο και η στατιστική αναφέρεται τότε ως Gaussian Unitary Ensemble (GUE). Όσον αφορά την συνάρτηση κατανομής των ενεργειακών διαφορών των γειτονικών



κβαντικών επιπέδων, έχει βρεθεί ότι για GOE συστήματα η κατανομή αυτή είναι τύπου Wigner [33]:

$$p(x) = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2} \quad (57)$$

όπου  $x$  είναι η κανονικοποιημένη απόσταση των γειτονικών επιπέδων. Από την κατανομή αυτή φαίνεται ότι για  $x=0 \Rightarrow p=0$ , το οποίο ισοδυναμεί με τον κανόνα της μη διασταύρωσης των επιπέδων που έχουν την ίδια συμμετρία. Σημειώνεται ότι καταστάσεις που αντιστοιχούν σε κανονικές τροχιές στο όριο της Κλασικής Μηχανικής ακολουθούν την κατανομή Poisson:

$$p(x) = e^{-x} \quad (58)$$

Επειδή ο φασικός χώρος παρουσιάζει συνήθως κανονικές και χαοτικές περιοχές, η κατανομή των γειτονικών επιπέδων αναμένεται να είναι ένας συνδυασμός των δύο οριακών κατανομών. Πράγματι, έχει αποδειχθεί ότι σε Χαμιλτονιανά συστήματα η κατανομή των φασματικών διακυμάνσεων είναι η υπέρθεση της κανονικής κατανομής Poisson με ένα σχετικό βάρος  $\mu$  (το ποσοστό του φασικού χώρου που καταλαμβάνουν οι κανονικές τροχιές) και της κατανομής GOE με ένα σχετικό βάρος  $\bar{\mu}$  (το ποσοστό των χαοτικών τροχιών), ενώ ισχύει ότι  $\mu + \bar{\mu} = 1$ . Τότε η γενικευμένη κατανομή που προκύπτει γράφεται ως εξής [33]:

$$p(x) = \mu^2 e^{-\mu x} \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2} \quad (59)$$

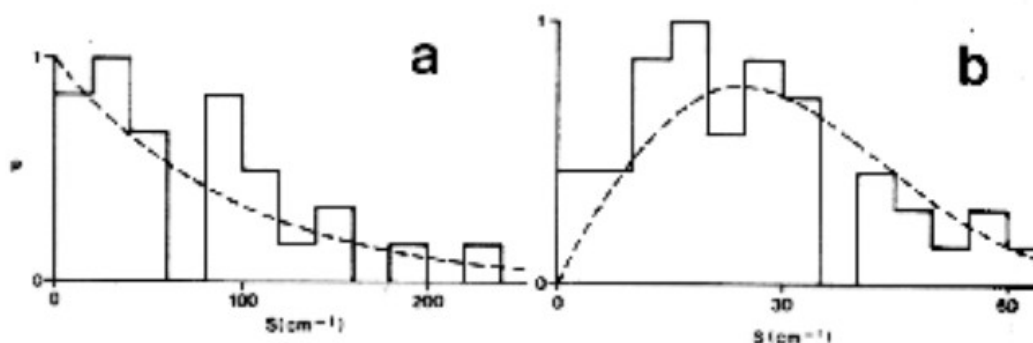
### 5.3 Παραδείγματα κβαντικού χάους

Σύμφωνα με πειράματα που έχουν γίνει σε μόρια KCN, LiCN και HCN όσον αφορά την συμπεριφορά τους υπό διάφορες ενεργειακές καταστάσεις, προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα [33]:

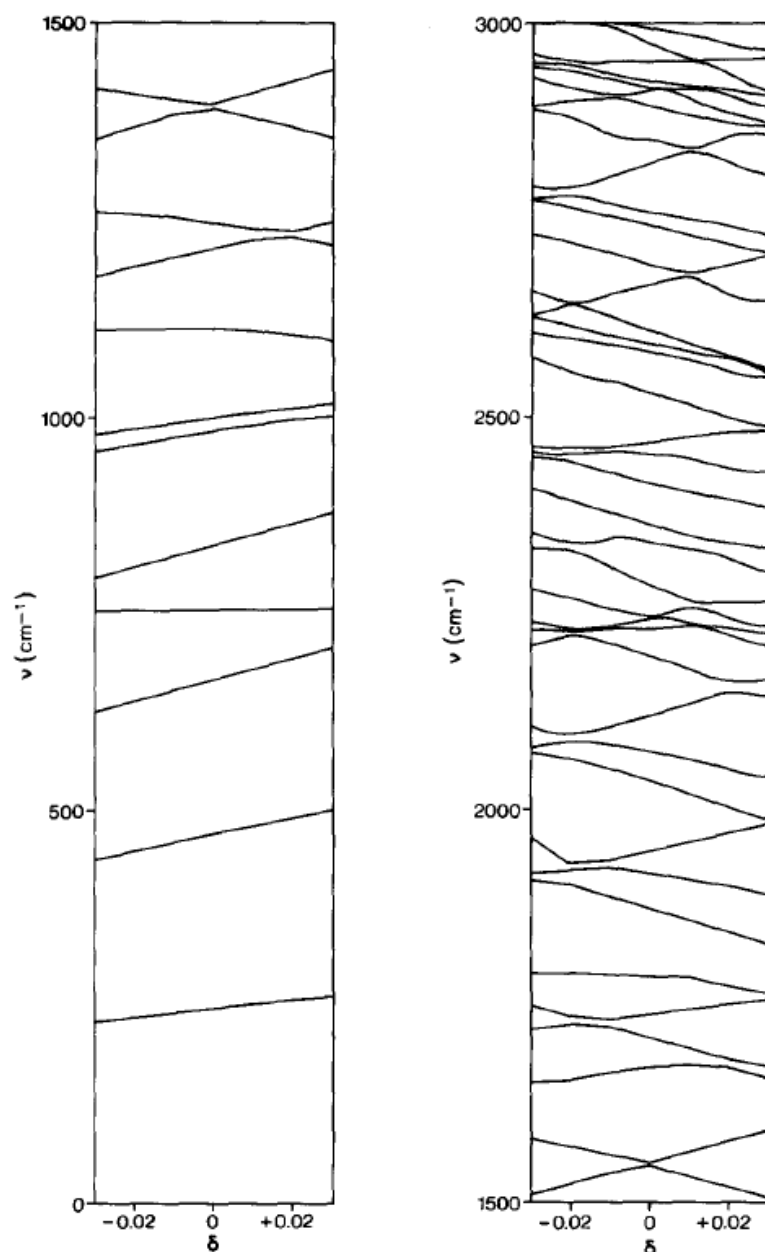
- Το KCN δείχνει χαοτική συμπεριφορά σχεδόν για όλες τις ενέργειες.

- Το LiCN δείχνει την τυπική εικόνα ενός μορίου, δηλαδή σε χαμηλές ενέργειες οι καταστάσεις είναι κανονικές και η κατανομή των φασματικών διακυμάνσεων είναι τύπου Poisson, ενώ σε υψηλές ενέργειες η χαστική κλασική συμπεριφορά αντιστοιχεί στην κατανομή Wigner των κβαντικών καταστάσεων.
- Στο HCN ο φασικός χώρος καταλαμβάνεται σε μεγάλο ποσοστό από κανονικές τροχιές, παρόλο το υψηλό ποσοστό διέγερσης.

Το σχήμα 5.1 δείχνει ιστογράμματα των ενεργειακών διαφορών για το LiCN, όπου στην περίπτωση χαμηλών ενεργειακών επιπέδων (περίπτωση (a)) φαίνεται ότι ακολουθείται μια κατανομή Poisson (διακεκομμένη γραμμή), ενώ στην περίπτωση (b) υψηλών ενεργειακών επιπέδων φαίνεται ότι ακολουθείται μια κατανομή Wigner (εξίσωση (57)) και συνεπώς υποδηλώνεται χάος. Το σχήμα 5.2 παρουσιάζει την ευαισθησία των ιδιοτιμών του LiCN για μικρές διαταραχές  $\delta$  της Χαμιλτονιανής [33]. Σύμφωνα με τον κανόνα της μη-διασταύρωσης των ενεργειακών επιπέδων (ο οποίος αποτελεί δείκτη εντοπισμού κβαντικού χάους), τα επίπεδα απωθούν το ένα το άλλο, ενώ φαίνεται ότι στις περιοχές άνω των  $2000 \text{ cm}^{-1}$  παρατηρούνται πολλαπλές διασταυρώσεις των ενεργειακών επιπέδων συναρτήσει της διαταραχής  $\delta$ , το οποίο υποδηλώνει κβαντικό χάος [33].



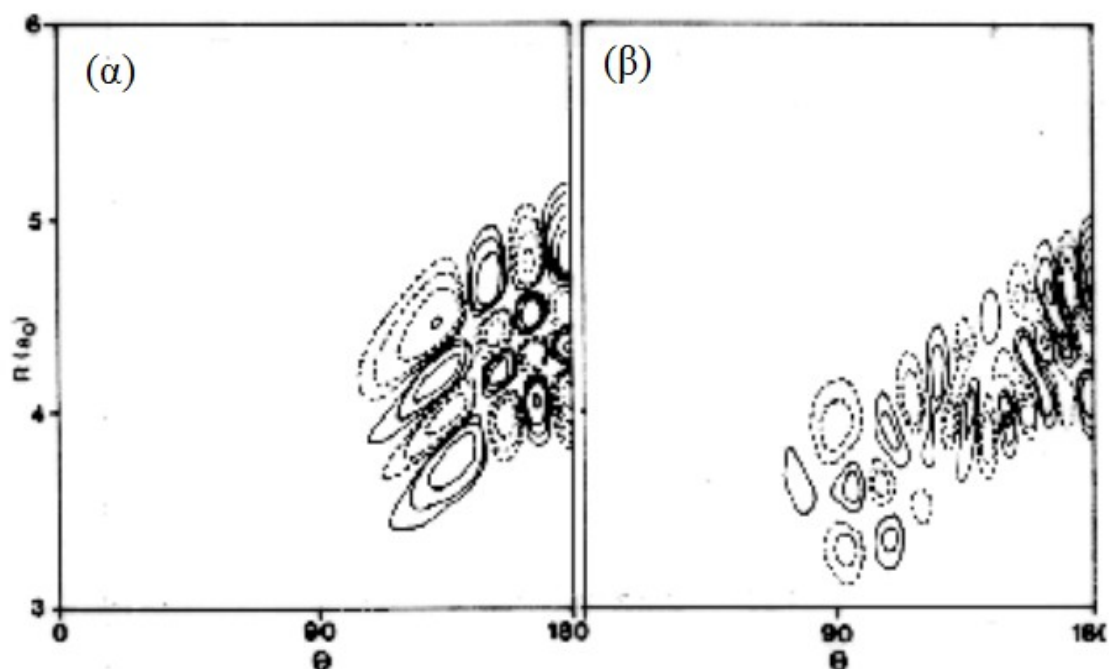
**Σχήμα 5.49:** Ιστογράμματα κατανομής των ενεργειακών διαφορών γειτονικών επιπέδων στο μόριο του LiCN για (a) τα 29 χαμηλότερα επίπεδα και (b) τα επίπεδα 30-80



**Σχήμα 5.50:** Μεταβολές των δονητικών συχνοτήτων του LiCN ως προς τη διαταραχή της Χαμιλτονιανής

Όσον αφορά την κυματοσυνάρτηση, η απεικόνιση αυτής είναι εφικτή με τη μορφή ισοϋψών καμπυλών για συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας, αλλά γίνεται δυσκολότερη καθώς οι διαστάσεις αυξάνονται διότι κάποιες μεταβλητές πρέπει να αγνοηθούν. Το σχήμα 5.3 δείχνει δύο κυματοσυναρτήσεις του LiCN, όπου οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν σε θετικές τιμές της κυματοσυνάρτησης, και οι διακεκομμένες σε αρνητικές. Συνεπώς, μεταξύ μιας διακεκομμένης και μιας συνεχούς καμπύλης η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται και έχει έναν κόμβο. Η μορφή των κόμβων στο σχήμα 5.3 διαχωρίζει την κανονική από την χαοτική συμπεριφορά και

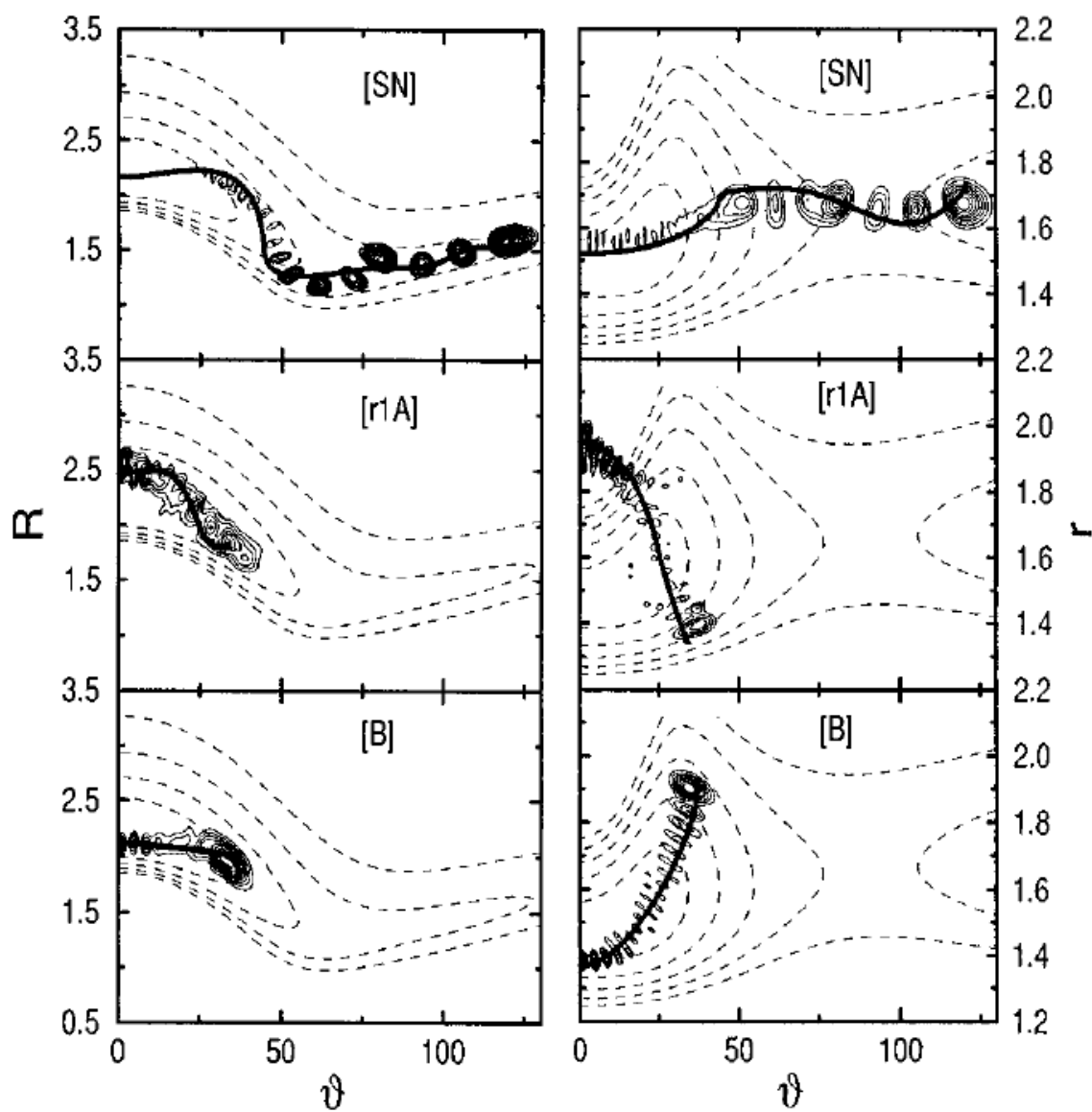
επομένως οι κυματοσυναρτήσεις χαρακτηρίζονται ως κανονική και χαοτική στο σχήμα 5.3(α) και 5.3(β), αντίστοιχα. Έχει διαπιστωθεί ότι κανονικές κυματοσυναρτήσεις δεν εξαπλώνονται σε όλο τον ενεργειακά διαθέσιμο χώρο (έτσι συμπεριφέρονται και οι ημιπεριοδικές τροχιές), ενώ οι χαοτικές κυματοσυναρτήσεις τείνουν να καταλάβουν τον μεγαλύτερο επιτρεπτό χώρο, γεγονός που επιτρέπει τον διαχωρισμό και εντοπισμό τους [33].



**Σχήμα 5.51:** Η δομή των κόμβων δύο κυματοσυναρτήσεων του LiCN: (α) κανονική και (β) χαοτική.

Εξίσου ενδιαφέρον είναι και η ανακάλυψη του εντοπισμού των κυματοσυναρτήσεων κατά μήκος περιοδικών τροχιών με σχετικά μικρή περίοδο σε υψηλές ενέργειες. Επιπλέον, στην κβαντική μηχανική έχει παρατηρηθεί εντοπισμός κυματοσυναρτήσεων ακόμα και σε περιοχές με έντονο κλασικό χάος και συνεπώς, σε αυτές τις περιοχές οι περιοδικές τροχιές είναι ασταθείς. Ενδεικτικά, το Σχήμα 5.4 δείχνει αποτελέσματα από υπολογισμούς για το μόριο HCP σε τρεις βαθμούς ελευθερίας [34]. Εκεί απεικονίζονται 3 αντιπροσωπευτικά παραδείγματα συναρτήσεων κυματομορφών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές οικογένειες περιοδικών τροχιών. Έχει σχεδιαστεί το τετράγωνο του μέτρου της κυματομορφής πολλαπλασιασμένο με το στοιχείο όγκου  $rR \sin \theta$ , ενώ οι παχιές συμπαγείς γραμμές

αντιπροσωπεύουν τις περιοδικές τροχιές με περίπου την ίδια ενέργεια. Οι αποστάσεις μετρώνται σε Å και η γωνία δίνεται σε μοίρες [34].



Σχήμα 5.52: Κβαντικές καταστάσεις σε αντιστοιχία με περιοδικές τροχιές για το μόριο HCP [farantos1996]

## 6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μερικοί από τους τομείς της επιστήμης, στους οποίους μπορούν να βρουν εφαρμογή η θεωρία του χάους και οι συνιστώσες αυτής, όπως αναλύθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Από τις εφαρμογές αυτές εξαιρούνται οι κλάδοι των μαθηματικών και της φυσικής, καθώς οι εφαρμογές είναι πιο προφανείς σε σχέση με τους υπόλοιπους τομείς.

### 6.1 Εφαρμογές σε φυσιολογία και ιατρική

Το κύριο ίσως χαρακτηριστικό ενός υγιούς βιολογικού ιστού είναι η ικανότητα αυτοπροσαρμογής σε απότομα και απροσδόκητα περιβαλλοντικά ερεθίσματα. Οι περισσότεροι βιολογικοί ιστοί είναι δομικά μεν fractals, λειτουργικά δε χαοτικοί παράξενοι ελκυστές. Τα συστήματα αυτά έχουν το χαρακτηριστικό της ασυμπτωματικής ευστάθειας, δηλαδή έχουν την ιδιότητα εξελισσόμενα από διαφορετικά υποσύνολα αρχικών συνθηκών να καταλήγουν σε συνυπάρχοντες πολλαπλούς ελκυστές, καθένας των οποίων δρα ως αφαίρεση ενός πεπερασμένου υποσυνόλου αρχικών συνθηκών, ήτοι της λεκάνης έλξης. Οι συνυπάρχοντες ελκυστές ενός τέτοιου μη διατηρητικού χαοτικού συστήματος μπορούν να παίξουν τον ρόλο συνεπτηγμένων κατηγοριών ή μνημών στις οποίες το υπό εξομοίωση γνωστικό σύστημα διαμερίζει ένα αρχικά αδιαφοροποίητο σύνολο αρχικών συνθηκών ή εξωτερικών ερεθισμάτων [35].

Οι περισσότεροι βιολογικοί ιστοί (το βρογχοπνευμονικό δένδρο, ο προστάτης, ο εγκεφαλικός φλοιός, το εσωτερικό τοίχωμα του λεπτού εντέρου, το κυκλοφορικό σύστημα των αρτηριών και φλεβών κλπ. καθώς και όλες οι πρωτεΐνες) έχουν fractal δομή. Είναι αξιοσημείωτο ότι όταν μια fractal δομή διεγερθεί από ένα παλμικό ερέθισμα παρουσιάζει μη διατηρητική χαοτική λειτουργία με απλούς ή πολλαπλούς συνυπάρχοντες ελκυστές. Η χαοτική δομή εξασφαλίζει σε ένα βιολογικό ιστό τα ακόλουθα πλεονεκτήματα [35]:

- Σε πολύ μικρούς όγκους εμπεριέχονται τεράστιες επιφάνειες, για παράδειγμα ο βρογχοπνευμονικός ιστός του ανθρώπου καταλαμβάνει όγκο περίπου 0.1 lt αλλά, αν η επιφάνειά του απλωθεί σε μια στρώση πάχους

μιας κυτταρικής διαμέτρου, καταλαμβάνει την έκταση περίπου ενός γηπέδου αντισφαίρισης.

- Σε ένα σύνηθες ευκλείδειο στερεό ή επιφάνεια ο βαθμός διαχυτότητας μιας ουσίας υπό την επίδραση τυχαίων διακυμάνσεων (θορύβου) είναι ευθέως ανάλογος του χρόνου  $t$ . Αποδεικνύεται ότι σε fractal δομές ο βαθμός διαχυτότητας αυξάνεται ταχύτερα ως δύναμη του  $t$ . Ετσι, π.χ. στους πνεύμονες ή στον προστάτη η fractal δομή επιτρέπει ταχύτερη και αποτελεσματικότερη μείξη αερίων και υγρών αντίστοιχα (υπερ-διάχυση).
- Μια fractal δομή είναι δυνατόν να κατασκευασθεί σε μικρό χρόνο από έναν απλό αλγόριθμο, ο οποίος επαναλαμβάνει τον εαυτό του σε πολλές κλίμακες ταυτόχρονα χωρίς ουσιώδεις αλλαγές. Ετσι ο γενετικός αλγόριθμος για παράδειγμα χρειάζεται για την κατασκευή ενός βιολογικού ιστού πολύ μικρότερο χρόνο από αυτόν που θα απαιτούσε η κατασκευή ενός ευκλείδειου ιστού.
- Επειδή μια fractal δομή εμπεριέχει πολλαπλές κλίμακες, επιτρέπει βραδεία αύξηση του λεγομένου «μορφογεννητικού σφάλματος», δηλαδή του μοιραίου σφάλματος (λόγω μεταλλαγών) ανακατασκευής από γενιά σε γενιά ενός συγκεκριμένου ιστού.

Μια βιολογική εφαρμογή της χαοτικής δυναμικής εντοπίζεται στην περιοχή της κλινικής καρδιολογίας. Ενώ θεωρείτο ότι η υγιής καρδιά παρουσιάζει αυστηρή περιοδικότητα, δηλαδή η ασυμπτωματικά ευσταθής δυναμική της είναι ένας οριακός κύκλος, κλινικές και επιδημιολογικές σπουδές φαίνεται να δείχνουν το αντίθετο. Ειδικότερα, έρευνες δείχνουν ότι η λειτουργία του υγιούς κοιλιακού μυοκαρδίου οφείλει να είναι ως έναν βαθμό «θορυβώδης», ώστε να καθιστά το άτομο ικανό να προσαρμόζεται σε ερεθίσματα (π.χ. συγκινήσεις ή μυϊκή καταπόνηση) που απαιτούν μικρό χρόνο χαλάρωσης (δηλαδή, υψηλές συχνότητες). Η ασυμπτωματική ευσταθής τροχιά (ο ελκυστής) μιας τέτοιας χρονοσειράς δεν είναι οριακός κύκλος αλλά ένας χαοτικός ελκυστής με διάσταση της τάξεως του 5,2. Σημειώνεται ότι αυτή η χαοτική λειτουργική συμπεριφορά του (υγιούς) κοιλιακού μυοκαρδίου είναι απότοκος της fractal δομής ενός δενδριτικού σχηματισμού κυτταρικών αξόνων του μυοκαρδίου, μέσω του οποίου ο παλμός του κατωτέρου καρδιακού βηματοδότη μεταβιβάζεται στο κοιλιακό μυοκάρδιο. Τυχόν τοπολογική παραμόρφωση του παραπάνω δενδριτικού σχηματισμού (οφειλόμενη σε παθολογικά αίτια) τροποποιεί το

λειτουργικό φάσμα του υγιούς μυοκαρδίου, δηλαδή το «στενεύει», με αποτέλεσμα ο κάτοχός του να αδυνατεί να αντεπεξέλθει σε ξαφνικά ερεθίσματα που απαιτούν μικρούς χρόνους χαλάρωσης [35].

Αξιοσημείωτη είναι μια εφαρμογή των χαοτικών συστημάτων με πολλαπλούς ελκυστές (κατηγορίες - μνήμες) στη δυναμική του εγκεφαλικού φλοιού, η οποία ελέγχεται πειραματικά με το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα, που καταγράφει μια μονοδιάστατη προβολή (χρονοσειρά) μιας πολυδιάστατης δυναμικής διαδικασίας. Ένας νευροφυσιολογικός βηματοδότης (βρόχος ανάδρασης) είναι υπεύθυνος για την εκ περιτροπής «αναζωπύρωση» των συνυπαρχουσών μνημών - κατηγοριών - χαοτικών ελκυστών. Κατά τη διάρκεια καταστάσεων, όπως π.χ. η κατάσταση χαλάρωσης και ο ελαφρός ύπνος, η δυναμική του παραπάνω βηματοδότη είναι και αυτή ένας χαοτικός ελκυστής σχετικά μικρής διάστασης (~3-4) και η διαδικασία μεταπτώσεώς του από τη μία μνήμη στην άλλη είναι σχετικά ομοιογενής (δηλαδή, περίπου ίσος χρόνος «προσοχής» εκχωρείται σε κάθε μία από τις συνυπάρχουσες μνήμες). Κατά τη διάρκεια όμως ενεργού συμμετοχής του ατόμου σε επίλυση προβλημάτων ο νευροφυσιολογικός βηματοδότης καθίσταται ανομοιογενής, δηλαδή ο χρόνος που διατίθεται για κάθε μία από τις συνυπάρχουσες μνήμες - κατηγορίες διαφοροποιείται έτσι, ώστε λίγες μνήμες να κυριαρχούν χρονικά, ενώ οι υπόλοιπες πρακτικά παραμερίζονται. Αυτή η ανομοιογένεια συνεπάγεται την αύξηση της χαοτικής διάστασης του βηματοδότη - ελκυστή που από την τιμή 3-4 είναι δυνατόν να μεταπηδήσει στην τάξη του ~10, δείχνοντας με αυτόν τον τρόπο μια αύξηση της χωρητικότητάς του (δηλαδή των βαθμών ελευθερίας του) ως επεξεργαστή πληροφορίας. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια επιληπτικών επεισοδίων, όπου ο νευροφυσιολογικός επεξεργαστής πληροφορίας αδρανοποιείται, η διαστατικότητα του βηματοδότη πέφτει στην τιμή ~ 2. Έτσι φαίνεται ότι η χαοτική δυναμική προσφέρει ένα πειστικό πρότυπο ενός βιολογικού επεξεργαστή πληροφορίας που πρέπει να είναι αυτοπροσαρμόσιμος [35].

## **6.2 Εφαρμογές στην κοσμολογία - αστρονομία**

Μια περιοχή στο Ηλιακό σύστημα όπου εμφανίζονται, και μάλιστα αρκετά έντονα, χαοτικά φαινόμενα είναι η ζώνη των αστεροειδών. Οι τροχιές των αστεροειδών είναι περίπου κυκλικές, αλλά υπάρχουν και αστεροειδείς των οποίων οι τροχιές είναι ελλειπτικές. Το μέγεθος το οποίο καθορίζει μια ελλειπτική τροχιά είναι η



εκκεντρότητα, της οποίας οι τιμές κυμαίνονται μεταξύ του μηδενός και της μονάδας. Όσο πιο πολύ απέχει από το μηδέν η τιμή της εκκεντρότητας, τόσο πιο επιμήκης είναι η ελλειπτική τροχιά (ο κύκλος έχει μηδενική εκκεντρότητα). Στην ερώτηση εάν είναι δυνατόν ένας αστεροειδής που κινείται σε κυκλική τροχιά να αλλάξει πορεία και η τροχιά του να γίνει τόσο επιμήκης, ώστε να φθάσει μέχρι τη Γη, την απάντηση μπορεί να δώσει η θεωρία του χάους [36].

Στη ζώνη των αστεροειδών υπήρχε ένα άλυτο πρόβλημα για περισσότερο από 100 χρόνια: Είχε παρατηρηθεί ότι η κατανομή των αστεροειδών δεν είναι ομοιόμορφη, αλλά υπάρχουν κενά σε περιοχές συντονισμών με το Δία, δηλαδή σε περιοχές που ο λόγος της περιόδου περιφοράς του αστεροειδή γύρω από τον Ήλιο προς την περίοδο του Δία είναι ρητός αριθμός. Τέτοια κενά παρατηρήθηκαν στους συντονισμούς  $2/1$ ,  $3/1$ ,  $7/3$ ,  $5/2$ . Συντονισμός  $3/1$  σημαίνει ότι ο αστεροειδής εκτελεί τρεις περιφορές γύρω από τον Ήλιο, ενώ στο ίδιο διάστημα ο Δίας εκτελεί μία περιφορά. Η προέλευση των κενών αυτών δεν μπορούσε να εξηγηθεί με τις γνωστές θεωρίες, ενώ με την θεωρία του χάους αποδεικνύεται ότι στις περιοχές συντονισμού εμφανίζεται χαοτική κίνηση. Αυτό έχει ως συνέπεια ένας αστεροειδής, που αρχικά βρίσκεται σε έναν τέτοιο συντονισμό και κινείται σε σχεδόν κυκλική τροχιά, μετά από κάποιο απρόβλεπτο χρονικό διάστημα, το οποίο είναι της τάξεως μερικών εκατομμυρίων ετών, να αποκτήσει ελλειπτική τροχιά. Συνέπεια αυτής της αύξησης της εκκεντρότητας της τροχιάς του αστεροειδή είναι να έλθει ο αστεροειδής κοντά σε άλλους πλανήτες του Ηλιακού συστήματος και να απομακρυνθεί από τη θέση του συντονισμού στην οποία βρισκόταν. Θα ήταν ακόμα δυνατόν η τροχιά του αστεροειδή να γίνει τόσο επιμήκης ώστε να φθάσει μέχρι και την τροχιά της Γης και ενδεχομένως να συγκρουσθεί με αυτήν. Με τον ίδιο τρόπο ερμηνεύεται και η προέλευση των μετεωριτών που προσκρούουν στην ατμόσφαιρα της Γης, καθώς η τροχιά τους, στη ζώνη των αστεροειδών όπου αρχικά βρίσκονται, είναι σχεδόν κυκλική και κατόπιν γίνεται ελλειπτική λόγω χαοτικής κίνησης, με αποτέλεσμα να φθάνει έως την Γη [36].

Μια άλλη περίπτωση όπου έχουμε χαοτική κίνηση στο Ηλιακό σύστημα είναι η κίνηση του Υπερίωνα, ο οποίος είναι ένας μικρός φυσικός δορυφόρος του Κρόνου. Έχει παρατηρηθεί ότι η διεύθυνση του άξονα περιστροφής του και η γωνιακή του ταχύτητα εκτελούν χαοτική κίνηση. Θεωρητική μελέτη της κίνησης αυτής δείχνει ότι η εκδήλωση της χαοτικής κίνησης είναι συνέπεια του γεγονότος ότι ο Υπερίων

προσπαθεί να ταλαντωθεί μεταξύ δύο συντονισμών (πρόκειται για τους συντονισμούς  $3/2$  και  $1/1$  μεταξύ περιστροφής περί τον άξονά του και περιφοράς περί τον Κρόνο) και η επικάλυψη αυτή των συντονισμών είναι ένας από τους μηχανισμούς δημιουργίας χάους. Η περίπτωση του Υπερίωνα είναι χαρακτηριστική περίπτωση όπου υπάρχει άμεση παρατήρηση χαοτικής κίνησης στο Ηλιακό σύστημα [36].

Έχει αποδειχθεί επίσης ότι η ύπαρξη της Σελήνης παίζει σταθεροποιητικό ρόλο στην κίνηση του άξονα περιστροφής της Γης. Βρέθηκε ότι υπάρχει μια ευρεία χαοτική περιοχή, όσον αφορά την κίνηση του άξονα περιστροφής της Γης, που οφείλεται σε επικάλυψη συντονισμών. Ο άξονας της Γης αποφεύγει αυτή τη χαοτική περιοχή λόγω υπάρξεως της Σελήνης, η οποία μέσω της βαρυτικής επιδράσεώς της στη Γη κρατάει τη θέση του άξονα περιστροφής έξω από τη χαοτική περιοχή. Έτσι η θέση του άξονα της Γης εκτελεί οργανωμένη κίνηση, με συνέπεια τη σταθερότητα του κλίματος.

Το ηλιακό σύστημα στην ολότητά του αποτελεί επίσης ένα χαοτικό σύστημα. Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατό να γίνουν προβλέψεις για την κίνηση των πλανητών και των λοιπών σωμάτων στο ηλιακό σύστημα, όπως άλλωστε και σε κάθε άλλο φυσικό σύστημα. Το χρονικό όμως διάστημα που απαιτείται για να γίνει αισθητή η παρουσία του χάους στο Ηλιακό σύστημα είναι μεγάλο, με τα μέτρα της καθημερινής ζωής. Η θέση της Σελήνης, των πλανητών, των κομητών, δύνανται ωστόσο βραχυπρόθεσμα να υπολογιστούν με μεγάλη ακρίβεια, παρά την ύπαρξη του χάους [36].

### **6.3 Εφαρμογές στην οικονομία**

Η ιδέα της άμεσης προβλεψιμότητας και των σύνθετων δυναμικών ιδιοτήτων φαίνεται να προσφέρει ισχυρές δυνατότητες εφαρμογής στην οικονομία. Αρχίζοντας από τις προβλέψεις των κινήσεων στις αγορές συναλλάγματος και χρηματιστηριακών αγορών, για την κατανόηση των διεθνών επιχειρηματικών κύκλων, η θεωρία του χάους στα οικονομικά είχε ένα ευρύ φάσμα πιθανών χώρων εφαρμογής. Αυτό το άνοιγμα οδήγησε σε μια σημαντική προσπάθεια εύρεσης πιθανής χαοτικής συμπεριφοράς σε όλους τους τύπους οικονομικών χρονοσειρών. Ωστόσο, οι αρχικές μελέτες βρήκαν ελάχιστες ή καθόλου ενδείξεις για την εμφάνιση χάους σε οικονομικές χρονοσειρές, αλλά αυτό το αποτέλεσμα δεν οδήγησε σε

μείωση της έρευνας, δεδομένου ότι αναδείχθηκαν ανεξήγητες μη γραμμικές δομές σε πολλές οικονομικές χρονοσειρές [37].

Οι ερευνητές που επικεντρώνονται σε μακροοικονομικές χρονοσειρές αντιμετωπίζουν ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι καθιστούν την πιθανότητα να βρεθούν χαοτικά αποτελέσματα λιγοστή. Στη μακροοικονομία, το πρόβλημα των σύντομων και θορυβωδών χρονοσειρών, οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε ένα σύστημα του οποίου η δυναμική και η ανάλυση των μετρήσεων μπορεί να αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, εμποδίζει την ικανότητα να εκτιμηθούν με ακρίβεια οι μη γραμμικές δυναμικές. Τελικά υπήρξαν δύο διαφορετικές πορείες έρευνας σε αυτόν τον τομέα [37].

Οι πρώτες δοκιμές για τη χαοτική δυναμική των μακροοικονομικών σειρών χρησιμοποίησαν διάφορους διαγνωστικούς ελέγχους. Αρκετές δοκιμές περιελάμβαν την εφαρμογή του αλγόριθμου εκτίμησης της διάστασης Grassberger-Procaccia και οι περισσότερες κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι χρονοσειρές δεν ήταν πιθανώς ντετερμινιστικό χάος, αλλά πολλές έδειξαν στοιχεία μη γραμμικής δομής.

Το δεύτερο σκέλος της έρευνας οδήγησε στην άμεση προσαρμογή των μη γραμμικών προδιαγραφών στα μακροοικονομικά δεδομένα. Αυτή η προσέγγιση έχει γενικώς μεγαλύτερη επιτυχία στην εξεύρεση ισχυρών στοιχείων για μη γραμμικότητες σε αυτές τις χρονοσειρές. Ωστόσο, αυτή ενισχύει την εικασία ότι οι κύκλοι του επιχειρείν συμπεριφέρονται διαφορετικά κατά τη διάρκεια περιόδων ανάπτυξης και περιόδων ύφεσης. Σε μακροοικονομικές σειρές τα μεγαλύτερα επιτεύγματα έχουν προέλθει από την προσαρμογή μη γραμμικών μοντέλων που δεν αποτελούν μέρος ενός γραμμικού πλαισίου. Ως αποτέλεσμα, η δεύτερη προσέγγιση έχει συχνά εντοπίσει ενδιαφέρουσες μη γραμμικές ιδιότητες που χάθηκαν όταν χρησιμοποιούνταν μόνο οι διαγνωστικές δοκιμές [37].

Όσον αφορά τις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές, είναι γνωστό ότι αυτές αποτελούν μακρύτερες και με λιγότερο θόρυβο χρονοσειρές και προσφέρονται περισσότερο για εκτίμηση και δοκιμές. Αυτές οι δοκιμές είναι οι ίδιες με εκείνες που χρησιμοποιούνται σε μακροοικονομικές χρονοσειρές. Τα αποτελέσματα αυτών συχνά αποκαλύπτουν ισχυρές ενδείξεις για μη γραμμική εξάρτηση, αλλά δεν υπάρχουν ισχυρές αποδείξεις για τη χαοτική δυναμική. Το ζήτημα αν μια χρηματοοικονομική χρονοσειρά είναι πράγματι χαοτική μπορεί να μην έχει μεγάλη σημασία για έναν χρηματοοικονομικό παράγοντα που ενδιαφέρεται μόνο για την

προσαρμογή των δυναμικών στρατηγικών διαπραγμάτευσης σύμφωνα με την προφανή προβλεψιμότητα των χρονοσειρών. Ωστόσο, φαίνεται να υπάρχουν ενδιαφέρουσες ενδείξεις πιθανής προβλεψιμότητας σε πολλές από αυτές τις χρονοσειρές.

Σε αυτό το σημείο και δεδομένης της θέσης για κάποιο είδος μη γραμμικής δομής στις οικονομικές χρονοσειρές, το ζήτημα του χάους εξακολουθεί να φαίνεται ενδιαφέρον. Ωστόσο, οι προβλέψεις υψηλής ακρίβειας (ποιότητας) μπορεί να είναι παράλογες για τις οικονομικές χρονοσειρές, αν ληφθεί υπόψιν το υψηλό κόστος. Ως αποτέλεσμα, για τις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές μπορεί να υπάρχει ένα εξαιρετικά μεγάλο χάσμα μεταξύ της επιτυχούς μη γραμμικής πρόβλεψης και της πραγματικής αναγνώρισης της χαοτικής δυναμικής σε μια χρηματοπιστωτική αγορά [37].

#### **6.4 Εφαρμογές στην φιλοσοφία και λογική**

Η ανακάλυψη του χάους έχει προσφέρει αποδείξεις στο ότι το ερώτημα για το εάν μια φαινομενικά τυχαία συμπεριφορά είναι στοχαστική ή ντετερμινιστική μπορεί να μην έχει μία βέβαιη απάντηση, καθώς και τα δύο μοντέλα περιγράφουν τις παρατηρήσεις εξίσου καλά. Μερικά ενδιαφέροντα θέματα που αφορούν τον υπολογισμό των fractals έχουν επίσης ενδιαφέρον για την φυσική και την λογική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το σύνολο Mandelbrot, το οποίο αποτελεί ένα επαναληπτικό σύνολο που στην ουσία δεν είναι επαναληπτικό. Φαίνεται πως δεν υπάρχει γνωστός αλγόριθμος που να αποφασίζει εάν ένα σημείο στο όριο του καρδιοειδούς παραμένει φραγμένο υπό την απεικόνιση της εξίσωσης (36). Συνεπώς, το όριο του συνόλου Mandelbrot δεν είναι υπολογίσιμο και το ορατό σύνολο Mandelbrot αποτελεί μόνο μία προσέγγιση. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι στο όριο του συνόλου αυτού γεννώνται πολύπλοκες δομές και εμφανίζονται fractals [21].

Η χρήση της λογικής μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα πως η ύπαρξη του χάους σε κβαντομηχανικό επίπεδο (κβαντικό χάος) πιθανόν να είναι απατηλή. Το κλασικό χάος υποκρύπτει fractal ελκυστές (δομές σε όλες τις κλίμακες), ενώ στην κβαντομηχανική οι δομές δεν υφίστανται σε κλίμακα μικρότερη από αυτήν της σταθεράς του Planck. Ενδεχομένως κάποια ημέρα η κβαντομηχανική να αντικαταστήσει την πιθανοτική συνάρτηση κυματομορφής με μία ντετερμινιστική

αλλά χαοτική συνάρτηση. Η δημοτικότητα της θεωρίας του χάους προσελκύει επίσης ενδιαφέρον σε ιστορικούς της επιστήμης και της φιλοσοφίας [21].

## 6.5 Άλλες εφαρμογές

Η θεωρία του χάους έχει χρησιμοποιηθεί για πολλά χρόνια στην κρυπτογραφία. Τις τελευταίες δεκαετίες, το χάος και η μη γραμμική δυναμική έχουν χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό εκατοντάδων κρυπτογραφικών αλγορίθμων. Οι αλγόριθμοι αυτοί περιλαμβάνουν αλγόριθμους κρυπτογράφησης εικόνας, λειτουργίες κατακερματισμού, γεννήτριες ψευδοτυχαίων αριθμών, το υδατογράφημα και τη στερεογραφία. Οι περισσότεροι από αυτούς τους αλγορίθμους βασίζονται σε μονοδιάστατους χαοτικές απεικονίσεις και ένα μεγάλο μέρος αυτών χρησιμοποιεί τις παραμέτρους ελέγχου και την αρχική κατάσταση των χαοτικών απεικονίσεων ως κλειδιά τους. Από μια ευρύτερη προοπτική, χωρίς απώλεια της γενικότητας, οι ομοιότητες μεταξύ των χαοτικών απεικονίσεων και των κρυπτογραφικών συστημάτων είναι το κύριο κίνητρο για το σχεδιασμό κρυπτογραφικών αλγορίθμων με βάση το χάος. Ένας τύπος κρυπτογράφησης μυστικού κλειδιού ή συμμετρικού κλειδιού βασίζεται στη διάχυση και τη σύγχυση, η οποία προσομοιώνεται επιτυχώς με τη θεωρία του χάους. Ένας άλλος τύπος υπολογισμού, ο υπολογισμός μέσω DNA, όταν συνδυάζεται με τη θεωρία του χάους, προσφέρει έναν τρόπο κρυπτογράφησης εικόνων και άλλων πληροφοριών. Ωστόσο, πολλοί από τους χαοτικούς κρυπτογραφικούς αλγορίθμους που σχεδιάζονται μέσω DNA αποδεικνύονται είτε μη ασφαλείς είτε μη εφαρμόσιμοι [38, 39, 40].

Ένας άλλος τομέας στον οποίο η θεωρία του χάους είναι χρήσιμη είναι αυτή των εταιρειών και ειδικά στην οργάνωση της λειτουργίας της. Η εφαρμογή της θεωρίας του χάους στην οργανωτική συμπεριφορά επιτρέπει στους θεωρητικούς να κάνουν ένα βήμα πίσω από τη διαχείριση των καθημερινών δραστηριοτήτων και να δουν πώς λειτουργούν οι οργανώσεις ως ενοποιημένα συστήματα. Μια οργάνωση είναι ένα κλασικό παράδειγμα ενός μη γραμμικού συστήματος (δηλ. ενός συστήματος στο οποίο μικρά γεγονότα έχουν τη δυνατότητα να προκαλέσουν σοβαρές συνέπειες ή αλυσιδωτές αντιδράσεις και οι μείζονες αλλαγές μπορεί να έχουν ελάχιστη ή καθόλου επίδραση στο σύστημα). Για να γίνει εκμετάλλευση της χαοτικής συμπεριφοράς μιας εταιρείας, πρέπει να ιδωθεί το οργανωτικό της σχήμα από απόσταση. Αντί να εντοπιστούν οι αιτίες των οργανωτικών προβλημάτων, η εταιρεία εξυπηρετείται

καλύτερα, σύμφωνα με τη θεωρία του χάους, όταν αναζητώνται οργανωτικά πρότυπα που οδηγούν σε συγκεκριμένους τύπους συμπεριφοράς μέσα στον οργανισμό [42].

Όσον αφορά την αρχιτεκτονική των μηχανικών συστημάτων, υπάρχουν πολλούς τομείς εφαρμογής της θεωρίας του χάους: η συντηρησιμότητα και η μακροχρόνια συμπεριφορά είναι δύο παραδείγματα. Προκειμένου να αξιολογηθεί η συντηρησιμότητα μιας αρχιτεκτονικής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μέτρο πολυπλοκότητας ή εντροπία ως δεδομένα χρονοσειράς. Μία τεχνική γνωστή ως «επαναλαμβανόμενα σχέδια» (Recurrence Plots), η οποία είναι προϊόν της θεωρίας του χάους, μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με εκείνα των προηγούμενων αρχιτεκτονικών με γνωστή συντηρησιμότητα για να διαπιστωθεί εάν η προκύπτουσα αρχιτεκτονική είναι αποδεκτή. Το ίδιο ισχύει και για την μακροχρόνια συμπεριφορά. Εάν κάποια συγκεκριμένη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά είναι επιθυμητή ή μη, μπορούν να συλλεχθούν δεδομένα χρονοσειράς σχετικών συμπεριφορών του συστήματος και το Recurrence Plot να συγκριθεί με τα συστήματα που εμφάνιζαν την μακροχρόνια συμπεριφορά και εκείνα που δεν την εμφάνισαν [42].

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν την μελέτη του σχηματισμού προτύπων και χάους σε δίκτυα, ως αποτέλεσμα της μετάδοσης σημάτων σε πολύπλοκα δίκτυα. Η αυτο-ομοιότητα των fractals έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση δίκτυων διύλησης που περιγράφουν διάφορες φυσικές δομές, όπως την γέλη, τα πολυμερή και τα υαλώδη υλικά. Η εφαρμογή αυτή είναι σημαντική επειδή δείχνει ότι η fractal γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για περιγραφή στατικών δομικών ιδιοτήτων αλλά και δυναμικών ιδιοτήτων fractal δικτύων. Η fractal γεωμετρία έχει ήδη καταδείξει ότι μία πληθώρα φαινομένων στον τρισδιάστατο χώρο είναι στατιστικώς αυτο-όμοια και συνεπώς προσφέρει αρωγή σε χαρτογραφικές γενικεύσεις και στην πρόβλεψη των εκτιμήσεων που προέρχονται από δεδομένα που υπόκεινται σε χωρική δειγματοληψία [21].

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η θεωρία του χάους είναι συναρπαστική επειδή κατά κάποιον τρόπο θολώνει τις μέχρι πρότινος διακριτές διαφορές μεταξύ των στοχαστικών και ντετερμινιστικών φαινομένων. Επί της ουσίας, μελετά τη συμπεριφορά ορισμένων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, τα οποία παρουσιάζουν ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. Τα συστήματα αυτά βρίσκονται διάχυτα στην φύση και την ανθρώπινη κοινωνία και περιλαμβάνουν, εκτός των άλλων, την ατμόσφαιρα, το ηλιακό σύστημα, την τεχνολογία, ακόμη και τα οικονομικά συστήματα.

Η έλλειψη προβλεψιμότητας των χαοτικών συστημάτων δεν οφείλεται σε ελλιπή γνώση των σχετικών φυσικών νόμων ή ανεπάρκεια της μαθηματικής περιγραφής τους αλλά προέρχεται κατά βάση από το γεγονός ότι τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες περιέχουν πολλές μεταβλητές που εξαρτώνται η μία από την άλλη κατά περίπλοκο τρόπο. Τέτοια μη γραμμικά συστήματα διαθέτουν μεγάλες περιοχές κατά τις οποίες η εξέλιξη μιας τροχιάς που κινείται στο σύστημα βρίσκεται σε ευαίσθητη εξάρτηση από την επιλογή των αρχικών συνθηκών. Ενώ υπάρχει αδυναμία μακροπρόθεσμης πρόβλεψης της εξέλιξης της πορείας των συστημάτων αυτών στο χρόνο, οι διαρκείς έρευνες που έχουν συντελεστεί τα τελευταία χρόνια έχουν οδηγήσει στην ανάπτυξη μιας σειράς από χρήσιμα εργαλεία, τα οποία μπορούν πιθανώς να εξηγήσουν αρκετά πολύπλοκες διεργασίες με απλά μοντέλα και χωρίς σφάλματα.

Τα πορτραίτα φάσης, οι εκθέτες Lyapunov, καθώς και τα άλλα εργαλεία που περιγράφηκαν στην παρούσα εργασία και έχουν προκύψει από την θεωρία του χάους είναι δυνητικά χρήσιμα εργαλεία για την μελέτη χαοτικών συμπεριφορών και συστημάτων. Ωστόσο, χρειάζονται περαιτέρω ανάπτυξη για να είναι πιο αξιόπιστα στην πράξη. Οι βασικοί λόγοι για τις πρακτικές δυσκολίες που εμφανίζονται κατά την χρήση τους είναι οι ακόλουθοι [43]:

- Μικρά ή/και μη αντιπροσωπευτικά σύνολα δεδομένων.
- Θόρυβος: Οι δείκτες του χάους αναπτύχθηκαν μέσω αριθμητικών πειραμάτων με σχεδόν απεριόριστες ποσότητες αθόρυβων δεδομένων. Με άλλα λόγια, οι μέθοδοι λειτουργούν καλύτερα με καθαρά και ακριβή δεδομένα και μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων (π.χ. χιλιάδες ή εκατομμύρια). Τέτοια ογκώδη και ουσιαστικά χωρίς θόρυβο σύνολα δεδομένων μπορούν να δημιουργηθούν σε

πειράματα ηλεκτρονικών υπολογιστών και μερικές φορές στο εργαστήριο. Ωστόσο, είναι πολύ σπάνια στον πραγματικό κόσμο.

- Αριθμός σημαντικών μεταβλητών: Οι μέθοδοι αναπτύχθηκαν σε χαμηλών διαστάσεων συστήματα και ως εκ τούτου λειτουργούν καλύτερα σε αυτά. Ο εντοπισμός του χάους σε συστήματα μεγάλων διαστάσεων είναι πολύ πιο δύσκολος από ότι στα χαμηλού σχήματος συστήματα.
- Αμφισβητήσιμη εκπλήρωση βασικών υποθέσεων (π.χ., ντετερμινιστικά συστήματα, μεταβατικές αλλαγές που δεν είναι πλέον συναφείς). Τέτοιες υποθέσεις μπορεί να μην ισχύουν για ένα πραγματικό σύστημα.

Για όλους αυτούς τους λόγους, η σημαντική πρακτική πτυχή του εντοπισμού του χάους σε πραγματικά δεδομένα εξακολουθεί να βρίσκεται σε σχετικά μικρή ηλικία. Λόγω των προβλημάτων που μόλις αναφέρθηκαν και άλλων, κανένα κριτήριο από μόνο του δεν είναι αρκετό ή αξιόπιστο για τον προσδιορισμό του χάους. Τα περισσότερα κριτήρια περιλαμβάνουν τον εντοπισμό και τον χαρακτηρισμό του χαοτικού (παράξενου) ελκυστή και κατά κανόνα απαιτούνται πολλές δοκιμές για να επιτευχθεί αυτό. Το πλεονέκτημα στην περίπτωση των πολλών δοκιμών είναι η περαιτέρω γνώση για το σύστημα, ακόμα κι αν εν τέλει αποδειχθεί ότι αυτό δεν είναι χαοτικό.

Τέλος, σημειώνεται ότι, παρά τις αντικειμενικές δυσκολίες, οι σημαντικές προοπτικές της θεωρίας του χάους και το μεγάλο εύρος των πιθανών εφαρμογών της, καθώς και η αντίληψη που μπορεί να προσφέρει στον ίδιο τον άνθρωπο αναφορικά με τον κόσμο στον οποίο ζει, αναμένεται να οδηγήσουν στην περαιτέρω εξέλιξή της, ώστε αυτή να γίνει πιο ακριβής και να προσφέρει ακόμη μεγαλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του κόσμου και του ανθρωπίνου περιβάλλοντος.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**



- [1] <https://en.wikipedia.org/>
- [2] [https://frnsys.com/ai\\_notes/scratch/chaos\\_theory.html](https://frnsys.com/ai_notes/scratch/chaos_theory.html)
- [3] Δ. Ζέρβας, Α. Μαλάκος, “Χάος και fractals”, Εργασία για το Μάθημα “Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία ΙΙ”, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 2004-2005.
- [4] <https://et-in-arcadia-ego8.webnode.gr/χαος-και-πολυπλοκοτητα/h-δυναμικη-ασταθεια-του-henr/>
- [5] Γ.Π. Παύλος, Ντετερμινιστικά Συστήματα – Στοιχεία Χαστικής Ανάλυσης Χρονοσειρών, Εργαστήριο Πολυπλοκότητας, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, ανακτημένο από: [http://utopia.duth.gr/gpavlos/deterministic\\_systems.pdf](http://utopia.duth.gr/gpavlos/deterministic_systems.pdf)
- [6] Δ. Σούρλας, Δυναμικά συστήματα και εφαρμογές με τη χρήση του Maple, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Φυσικής, Πάτρα 2012.
- [7] Σ. Πνευματικός, Α. Μπούνη, Δυναμικά Συστήματα, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2010, ανακτημένο από: [https://www.math.upatras.gr/~bountis/files/dynamical\\_systems.pdf](https://www.math.upatras.gr/~bountis/files/dynamical_systems.pdf)
- [8] Γ.Π. Παύλος, Μ. Αθανασίου, Εισαγωγή στην Θεωρία της Πολυπλοκότητας και στα Πολύπλοκα Συστήματα, Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης, Ξάνθη 2002, ανακτημένο από: [http://utopia.duth.gr/gpavlos/introduction\\_compexity\\_theory.pdf](http://utopia.duth.gr/gpavlos/introduction_compexity_theory.pdf)
- [9] Α. Κουλούρης, Ιστορική Εισαγωγή στην Επιστήμη του Χάους, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, ανακτημένο από: [users.uoa.gr/~spapast/SynedrKozan/Praktika/07Texnes/4023ΚΟΥΛΟΥΡΗΣ.doc](http://users.uoa.gr/~spapast/SynedrKozan/Praktika/07Texnes/4023ΚΟΥΛΟΥΡΗΣ.doc)
- [10] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30066-lorenz-attactor-plot>, Copyright (c) 2011, Moiseev Igor.
- [11] <http://et-in-arcadia-ego8.webnode.gr>
- [12] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46439-the-lorenz-attactor-simulink-model>, Copyright (c) 2016, Lazaros Moysis.
- [13] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46991-simulating-chaotic-behavior-of-double-pendulum>, Copyright (c) 2014, Sathyanarayan Rao.
- [14] Γ. Βουγιατζής, Ε. Μελετίδου, Εισαγωγή στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα, ΣΕΑΒ 2015, ISBN: 978-960-603-103-8.
- [15] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/63803-lyapunov-exponent-of-logistic-map>, Copyright (c) 2017, Valentina Unakafova.

- [16] A. Jacquin, “An introduction to fractals and their applications in electrical engineering”, Nov. 1994, Journal of the Franklin Institute 331B(6):659-680, ανακτημένο από: <http://research.cs.queensu.ca/~jstewart/850/papers/IntroToFractals.pdf>
- [17] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/50417-sierpinski-fractal-triangle>, Copyright (c) 2018, Víctor Martínez.
- [18] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/282-classicalfractals-m>
- [19] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3524-sierpinski-sponge>
- [20] M.A. Riley, G.C. Van Orden, Tutorials in Contemporary NonLinear Methods for the Behavioral Sciences, 2005, ανακτημένο από: <https://www.nsf.gov/pubs/2005/nsf05057/nmbs/nmbs.pdf>
- [21] S. Chatterjee, M.R. Yilmaz, “Chaos, Fractals and Statistics”, Statistical Science Vol. 7, No. 1, 49-121, 1992, ανακτημένο από: [https://projecteuclid.org/download/pdf\\_1/euclid.ss/1177011443](https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ss/1177011443)
- [22] J. Fraser, An Introduction to Julia Sets, 2009, ανακτημένο από: [http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/fraktaly..linearni\\_system/julia.pdf](http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/fraktaly..linearni_system/julia.pdf)
- [23] T. Lei, “Similarity between the Mandelbrot Set and Julia Sets”, Commun. Math. Phys. 134, 587–617, 1990.
- [24] Introduction to Julia sets and the Mandelbrot set, ανακτημένο από: <http://www.public.iastate.edu/~swillson/JuliaSetNotes3.pdf>
- [25] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32081-julia>, Copyright (c) 2011, Andrew French.
- [26] <http://mathworld.wolfram.com/JuliaSet.html>
- [27] Julia Sets and the Mandelbrot Set, ανακτημένο από: <http://faculty.bard.edu/belk/math323/NotesJuliaMandelbrot.pdf>
- [28] HO.Peitgen, H.Jürgens, D.Saupe, Julia Sets: Fractal Basin Boundaries. In: Chaos and Fractals. Springer, New York, 2004.
- [29] A. Μανουσάκης, Ασκήσεις στην Πραγματική Ανάλυση, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, ανακτημένο από: <http://myria.math.aegean.gr/epeaek/pdfs/realanalysis-exercises.pdf>
- [30] <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/24740-mandelbrot-set-and-julia-set>, Copyright (c) 2016, Ankur Pawar.
- [31] <http://www.karlsims.com/julia.html>

- [32] Α. Τζέμος, Τάξη και Χάος στην Κβαντομηχανική Bohm, ανακτημένο από: [https://www.researchgate.net/profile/Athanasios\\_Tzemos/publication/323960906\\_Taxe\\_kai\\_Chaos\\_sten\\_Kbantomechanike\\_Bohm/links/5ab4f0ff0f7e9b68ef4be0c4/Taxe-kai-Chaos-sten-Kbantomechanike-Bohm.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Athanasios_Tzemos/publication/323960906_Taxe_kai_Chaos_sten_Kbantomechanike_Bohm/links/5ab4f0ff0f7e9b68ef4be0c4/Taxe-kai-Chaos-sten-Kbantomechanike-Bohm.pdf)
- [33] Σ.Κ. Φαράντος, Κλασικό και Κβαντικό Χάος σε Μόρια, ανακτημένο από: <http://tccc.iesl.forth.gr/education/local/ChemDyn/HTML/node6.html>
- [34] S.C. Farantos, H.M. Keller, R. Schinke, K. Yamashita, and K. Morokuma, “Normal mode and isomerization bending states in HCP: Periodic orbit assignment and spectroscopic signature”, The Journal of Chemical Physics 104, 10055, 1996.
- [35] Ι.Σ. Νικολής, Η χαοτική δυναμική στην ιατρική, ανακτημένο από: <https://www.tovima.gr/2008/11/24/opinions/i-chaotiki-dynamiki-stin-iatriki-2/>
- [36] Ι.Δ. Χατζηδημητρίου, Χάος στο Ηλιακό Σύστημα, ανακτημένο από: <http://users.auth.gr/~hadjidem/solar1.html>
- [37] L. B. Bayar, “Chaos Theory and its Importance and Applications in Economics”, Marmara University, Institute of Social Sciences, Department Of Economics, 2005, ανακτημένο από: <https://pdfs.semanticscholar.org/5c9d/deaceef0c6452ee5c547f9d4796334b3e62d.pdf>
- [38] S. Behnia, A. Akhshani, H. Mahmodi, A. Akhavan, “A novel algorithm for image encryption based on mixture of chaotic maps”, Chaos, Solitons and Fractals 35, 408–419, 2008.
- [39] A. Akhavana, A.Samsudin, A.Akhshani, “A symmetric image encryption scheme based on combination of nonlinear chaotic maps”, Journal of the Franklin Institute 348, 1797–1813, 2011.
- [40] M. Babaei, “A novel text and image encryption method based on chaos theory and DNA computing”, Nat. Comput. 12, 101–107, 2013.
- [41] <https://www.referenceforbusiness.com/management/Bun-Comp/Chaos-Theory.html>
- [42] D.M. Curry, “Practical application of chaos theory to systems engineering”, Procedia Computer Science 8, 39 – 44, 2012.
- [43] G.P. Williams, Chaos Theory Tamed, Joseph Henry Press, Washington, D.C. 1997.