

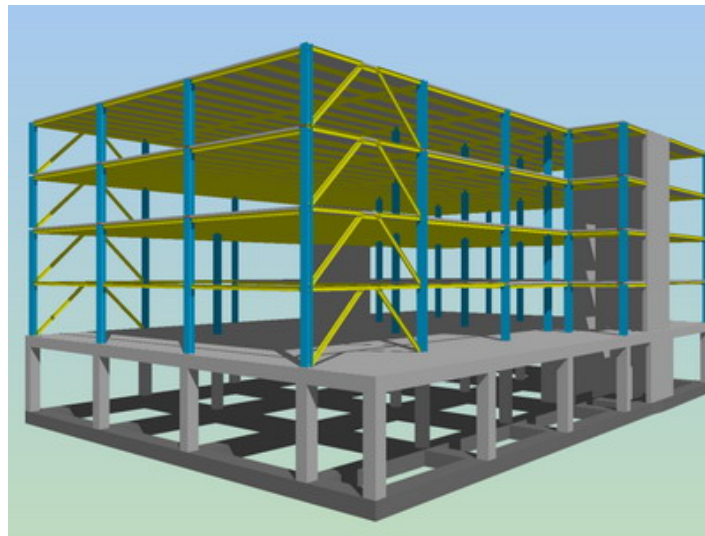


ΤΕΙ ΠΕΙΡΑΙΑ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΔΟΜΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΦΟΡΕΩΝ ΑΠΟ ΧΑΛΥΒΑ  
ΚΑΙ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ**

Πτυχιακή Εργασία

ΓΡΗΓΟΡΙΑΣ ΠΟΛΥΞΕΝΗΣ ΖΑΡΑΚΗ  
ΧΑΡΙΚΛΕΙΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ



Επιβλέπων Καθηγητής:

Γεώργιος Τσιάτας

Δρ. Πολ. Μηχανικός

Αθήνα, Οκτώβρης 2007

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ξεκίνησε το Δεκέμβριο του 2006 υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Γ.Χ. Τσιάτα στον Τομέα Δομοστατικού Σχεδιασμού του Τμήματος Πολιτικών Δομικών Έργων και ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2007.

Από τη θέση αυτή, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον Καθηγητή του ΤΕΙ Πειραιά Δρ. Γεώργιο Τσιάτα για την πολύτιμη καθοδήγησή του, για την βοήθεια του στον τομέα του προγραμματισμού και την άψογη συνεργασία που είχαμε στην εκπόνηση της εργασίας αυτής. Θα θέλαμε επίσης να ευχαριστήσουμε τους υπαλλήλους της βιβλιοθήκης του Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας για την βοήθεια τους στη συλλογή της βιβλιογραφίας.

Αιγάλεω, Οκτώβριος 2007

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ</b> .....	<b>1</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	<b>3</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>3</b>
1.1 ΓΕΝΙΚΑ .....	3
1.2 ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ .....	4
1.3 ΕΙΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ.....	12
1.3.1 Απώλεια ενέργειας λόγω αποσβέσεως.....	13
1.3.2 Ισοδύναμη ιξώδης απόσβεση.....	17
1.3.3 Υστεριτική απόσβεση.....	18
1.3.4 Απόσβεση <i>Coulomb</i> .....	21
1.4 ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΣ ΩΠΛΙΣΜΕΝΟΥ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ.....	33
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	<b>41</b>
<b>Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ</b> .....	<b>41</b>
2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ .....	41
2.2 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.....	45
2.3 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.....	48
2.4 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ .....	52
2.5 ΣΤΑΤΙΚΗ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ, ΑΝΑΓΩΓΗ GUYAN .....	57
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b> .....	<b>62</b>
<b>ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>62</b>
3.1 ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ .....	62
3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ .....	66
3.3 ΧΡΗΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ .....	69
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b> .....	<b>72</b>
<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</b> .....	<b>72</b>
4.1 ΠΛΑΙΣΙΟ 1 .....	72
4.1.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση.....	73
4.1.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση.....	77
4.1.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση .....	81
4.1.4 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση .....	85
4.1.5 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση .....	89
4.1.6 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα και σκυρόδεμα με απόσβεση .....	93
4.1.7 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με και χωρίς απόσβεση .....	97
4.1.8 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση .....	101
4.1.9 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση.....	103
4.1.10 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς και με απόσβεση των μετατοπίσεων του πρώτου ορόφου.....	106

4.2 ΠΛΑΙΣΙΟ 2.....	107
4.2.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση.....	108
4.2.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση.....	113
4.2.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση .....	118
4.2.4 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση .....	123
4.2.5 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση .....	128
4.2.6 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση .....	133
4.2.7 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με και χωρίς απόσβεση .....	138
4.2.8 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση .....	143
4.2.9 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση.....	145
4.2.10 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς και με απόσβεση των μετατοπίσεων του πρώτου ορόφου.....	148
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....</b>	<b>149</b>
<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>149</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....</b>	<b>151</b>
<b>ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ MAPLE 7.....</b>	<b>151</b>
A.1 ΚΩΔΙΚΑΣ MAPLE ΓΙΑ ΤΟ 1 <sup>ο</sup> ΠΛΑΙΣΙΟ .....	151
A.2 ΚΩΔΙΚΑΣ MAPLE ΓΙΑ ΤΟ 2 <sup>ο</sup> ΠΛΑΙΣΙΟ .....	158
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>168</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΓΕΝΙΚΑ

Οι εξελίξεις στον τομέα των κατασκευών είναι ραγδαίες. Νέα υλικά και μέθοδοι σχεδιασμού παρουσιάζονται συνεχώς. Οι σύνθετες κατασκευές είναι ήδη διαδεδομένες σε όλες τις προηγμένες χώρες, ενώ έχουν κάνει την εμφάνισή τους τα τελευταία χρόνια και στην Ελλάδα.

Το κυρίαρχο υλικό δόμησης στην Ελλάδα είναι εδώ και πολλά χρόνια το οπλισμένο σκυρόδεμα. Στην Ευρώπη και την Αμερική όμως, ο χάλυβας είναι αυτός που χρησιμοποιείται κατά κόρον. Στις σύνθετες κατασκευές τα δύο αυτά υλικά συνδυάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται η βέλτιστη εκμετάλλευση των ιδιοτήτων τους.

Τον 19<sup>ο</sup> αιώνα σημειώθηκε για πρώτη φορά η προτίμηση του χάλυβα στη γεφυροποιία και σε κτίρια προορισμένα για βιομηχανική χρήση. Αν και η εμφάνισή του είχε προηγηθεί από το 1645 σε κατασκευές υψικαμίνων, η συνέχιση της χρήσης του ήταν απαγορευτική λόγω της υψηλής τιμής του. Η βιομηχανική επανάσταση αποτέλεσε την έναρξη της προσπάθειας χρήσης νέων υλικών στις κατασκευές και έδωσε νέα ώθηση στη μεταλλουργία, η οποία άρχισε να εφοδιάζει τον κατασκευαστικό τομέα με μεγαλύτερες ποσότητες χάλυβα. Σήμερα είναι πλέον δεδομένη η χρήση του στα βιομηχανικά κτίρια αλλά και στη γεφυροποιία.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται δυναμική ανάλυση δύο δυόροφων σύνθετων πλαισίων από χάλυβα και σκυρόδεμα. Σκοπός της είναι να μελετήσει τη δυναμική συμπεριφορά τέτοιων κατασκευών λαμβάνοντας υπόψη και την επιρροή της απόσβεσης.

Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια σύντομη περιγραφή των σύνθετων δομικών στοιχείων και των αρχών λειτουργίας τους, αναφέρονται

τα είδη απόσβεσης, στοιχεία από τον Ελληνικό Κανονισμό Ωπλισμένου Σκυροδέματος.

Στο Κεφάλαιο 2 αναπτύσσεται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων για επίπεδο πλαίσιο.

Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται περιγραφή των ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται αναλυτικά οι υπολογισμοί που χρειάστηκαν για τη δυναμική ανάλυση και τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Τέλος ακολουθούν τα συμπεράσματα στο Κεφάλαιο 5.

## **1.2 ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ**

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, είναι η εξέταση του προβλήματος των σύνθετων κατασκευών. Με τον όρο αυτό εννοούνται κατασκευές αποτελούμενες από δύο μέρη, ένα κύριο που θεμελιώνεται στο έδαφος, και ένα δευτερεύον που εδράζεται επί του κύριου. Τα δύο αυτά μέρη χαρακτηρίζονται από διαφορετική απόκριση, είτε λόγω διαφορετικού υλικού, π.χ. κύριος φορέας από οπλισμένο σκυρόδεμα και δευτερεύον φορέας από χάλυβα, είτε λόγω διαφορετικού στατικού συστήματος δυσκαμψίας και/ή ενεργειακής απορρόφησης, π.χ. κύριος φορέας με διαγώνιους συνδέσμους δυσκαμψίας ή δύσκαμπτα τοιχία και δευτερεύον φορέας με πλαισιακή λειτουργία, ή και το αντίθετο, κύριος πλαισιωτός φορέας και δευτερεύον δύσκαμπτο σύστημα με διαγώνιους συνδέσμους, είτε και για τους δύο αυτούς λόγους. Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων απαντώνται πλέον πολύ συχνά στην πράξη, π.χ. στην περίπτωση προσθήκης μεταλλικού ορόφου σε υφιστάμενο κτίριο από οπλισμένο σκυρόδεμα, σε κατασκευές μεγάλων ανοιγμάτων, όπου η στέγαση, αποτελούμενη από ελαφρύτερη σχετικά μεταλλική κατασκευή, εδράζεται σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα (π.χ. τερματικοί σταθμοί έργων υποδομής), ή σε αθλητικές εγκαταστάσεις, όπου συχνά σε φορείς των κερκίδων από σκυρόδεμα εδράζονται μεταλλικοί φορείς στεγάστρων. Με την περαιτέρω εισαγωγή του δομικού χάλυβα στην πράξη καθώς και την πιεστικότερη από

πλευράς χρόνου και κόστους ανάγκη για μικτή χρήση τέτοιων συστημάτων, αναμένεται η περαιτέρω αύξηση χρήσης αυτών των κατασκευών.



**Σχήμα 1.1**



**Σχήμα 1.2**



**Σχήμα 1.3**





**Σχήμα 1.4**



**Σχήμα 1.5**



**Σχήμα 1.6**



**Σχήμα 1.6**



**Σχήμα 1.7**



**Σχήμα 1.8**

Κατασκευές αυτής της μορφής είναι δύσκολο να αντιμετωπιστούν με χρήση των υφιστάμενων διατάξεων αντισεισμικού σχεδιασμού που βασίζονται σε φάσματα σχεδιασμού και απόκρισης μονοβάθμιων συστημάτων, και είτε ισοδύναμες στατικές είτε δυναμικές φασματικές αναλύσεις. Ο κύριος λόγος είναι ότι για τον καθορισμό του ενιαίου, κατά τους Κανονισμούς, φάσματος

σχεδιασμού απαιτείται να δοθούν κατάλληλες τιμές σε μια σειρά από παραμέτρους που εξαρτώνται από το υλικό και το στατικό σύστημα και επομένως διαφέρουν μεταξύ κύριου και δευτερεύοντος φορέα.

Τέτοιες παράμετροι είναι ο συντελεστής απόσβεσης  $\zeta$  (2% για συγκολλητές και 4% για κοχλιωτές μεταλλικές κατασκευές και 5% για κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα) και ο συντελεστής συμπεριφοράς  $q$  (1.0 έως 4.0 για κατασκευές από χάλυβα, με συνηθέστερες τιμές το 4.0 για πλαίσια και το 3.0 για συστήματα διαγωνίων συνδέσμων, και 2.0 έως 3.5 για κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα, με συνηθέστερη τιμή το 3.5 για πλαίσια ή μικτά συστήματα πλαισίων-τοιχωμάτων).

Σημειώνεται ότι τα συστήματα που δεν έχουν σταθερή κατανομή απόσβεσης καθ' ύψος, έχουν μητρώο απόσβεσης, το οποίο μετά την κανονικοποίησή του με το μητρώο των ιδιόμορφων δεν είναι διαγώνιο. Ενώ δηλαδή, σε μια συνηθισμένη κατασκευή το μητρώο απόσβεσης  $C$  όπως αυτό προκύπτει από τους τύπους του Rayleigh, πολλαπλασιασμένο με το μητρώο των ιδιόμορφων και το ανάστροφό του -  $\Phi^T C \Phi$  -, θα δώσει ένα νέο μητρώο το οποίο θα είναι διαγώνιο, τώρα εκτελώντας την αντίστοιχη διαδικασία θα προκύψει ένα μη διαγώνιο μητρώο. Εν τέλει, θα καταλήξουμε σε μιγαδικές ιδιομορφές στην απόκριση της κατασκευής, κάτι που είναι πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστεί στην πράξη.

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που παρουσιάζουν οι μικτές κατασκευές, υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στη μελέτη τους. Σύμφωνα με την πρώτη, η κατασκευή μελετάται ως ενιαία, μιλάμε δηλαδή για συζευγμένη ανάλυση (coupled analysis). Η λύση αυτή, προκειμένου να μην χρειαστεί να λύσουμε ένα μιγαδικό ιδιομορφικό πρόβλημα, προϋποθέτει τη λήψη αποφάσεων για τις ενιαίες τιμές της απόσβεσης και του συντελεστή συμπεριφοράς. Κατά τη δεύτερη προσέγγιση, η κατασκευή χωρίζεται σε δύο κομμάτια, το υπόβαθρο (primary structure) που αποτελείται συνήθως από σκυρόδεμα και την υπερκατασκευή, συνήθως από χάλυβα (secondary structure), μιλάμε δηλαδή για αποζευγμένη ανάλυση (decoupled analysis) με την υπερκατασκευή να διεγείρεται πια όχι από την εδαφική κίνηση αλλά από την κίνηση του υποβάθρου. Τώρα πλέον, δεν τίθεται θέμα για την τιμή της απόσβεσης και του συντελεστή  $q$ , προκύπτει όμως το ερώτημα της

διεγέρσης που θα εφαρμοστεί στην υπερκατασκευή. Η εδαφική κίνηση, όπως αυτή προσδιορίζεται και ως προς την ένταση και ως προς τις σημαντικές της περιόδους, από το φάσμα σχεδιασμού αλλάζει, αφού πλέον υπεισέρχονται και τα δυναμικά χαρακτηριστικά του υποβάθρου. Έτσι, παρουσιάζεται η ανάγκη προσδιορισμού ενός νέου φάσματος σχεδιασμού που θα αφορά μόνο το δευτερεύων τμήμα της κατασκευής.

Σε περίπτωση που υιοθετήσουμε την συζευγμένη προσέγγιση για τη μελέτη των μικτών συστημάτων, μια πρώτη λύση θα ήταν να ληφθούν οι δυσμενέστερες τιμές για την απόσβεση και το συντελεστή συμπεριφοράς. Κάτι τέτοιο όμως είναι αντιοικονομικό, και σε περιπτώσεις μεγάλων οικοδομικών έργων επιβαρύνει το κόστος σημαντικά, ενώ είναι σίγουρα μη ρεαλιστικό, αφού σχεδιάζουμε έτσι μια κατασκευή η οποία προδιαγεγραμμένα θα έχει πολύ μεγάλα ποσοστά υπεραντοχών.

Η αποζευγμένη διαδικασία από την άλλη, μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά με τη χρήση επαναληπτικών μεθόδων. Έτσι, η χρονοϊστορία των επιταχύνσεων του υποβάθρου, θα γίνει διέγερση στην υπερκατασκευή, και στο επόμενο βήμα, το υπόβαθρο θα αναλυθεί με την εδαφική διέγερση σε συνδυασμό με τη χρονοϊστορία των δυνάμεων που δέχεται στο σημείο που είναι συνδεδεμένη η υπερκατασκευή. Η σύγκλιση επιτυγχάνεται με πολύ καλή προσέγγιση σε λίγα βήματα, στο σύνολο όμως της εδαφικής διέγερσης θα απαιτηθεί πολύς χρόνος για να ολοκληρωθεί η ανάλυση. Κάτι τέτοιο δηλαδή δεν προσφέρεται για πρακτικές εφαρμογές που θα πρέπει να συνυπολογιστεί και το υπολογιστικό κόστος.

Γενικά η αποζευγμένη ανάλυση προτιμάται στην πράξη, γιατί με μικρό τις περισσότερες φορές σφάλμα, σε περίπτωση που δεν κάνουμε την επαναληπτική διαδικασία, μας επιτρέπει να έχουμε μια πλήρη εικόνα των δράσεων που ασκούνται στα τμήματα της κατασκευής. Επιπλέον, επιτρέπει να ασχοληθούν με κάθε κομμάτι της μελέτης εξειδικευμένες μελετητικές ομάδες, κάτι που είναι πολύ σημαντικό σε μεγάλα οικοδομικά έργα. Απαιτείται όμως διαρκής επαφή μεταξύ των δύο ομάδων ώστε να προσδιοριστεί η κίνηση του υποβάθρου, το κατά πόσο η κίνηση αυτή θα επηρεαστεί ή όχι, καθώς και το σφάλμα που θα έχουμε λόγω της απόξευξης.

Το γεγονός ότι στην Ελλάδα μέχρι πρόσφατα τα μικτά συστήματα δεν απαντώνταν συχνά στην καθημερινή πρακτική του μηχανικού, καθώς και το ότι οι μικρής σχετικά κλίμακας εφαρμογές σε κατασκευές καθ' ύψος δεν έχουν ακόμη δοκιμασθεί από ισχυρό σεισμό, δεν έχει κάνει για την ώρα επιτακτική την απάντηση των ερωτημάτων που τέθηκαν παραπάνω. Πλέον όμως, είναι όλο και περισσότερες οι περιπτώσεις κτιρίων με περίσσεια συντελεστή δόμησης, στα οποία αποφασίζεται να γίνει επέκταση καθ' ύψος. Τα κτίρια αυτά κατά κανόνα έχουν μελετηθεί σύμφωνα με παλιότερους αντισεισμικούς κανονισμούς, με αποτέλεσμα ο σχεδιασμός με τον Ε.Α.Κ. να είναι αδύνατος. Μία λύση σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η κατασκευή της προσθήκης με χαλύβδινα πλαίσια και οροφή από τραπεζοειδείς διατομές, συνδυασμός που δίνει πολύ μικρά πρόσθετα φορτία στο υφιστάμενο δόμημα, καταφεύγει δηλαδή ο μηχανικός στη λύση των μικτών συστημάτων.

### **1.3 ΕΙΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ**

Η απόσβεση εμφανίζεται σ' όλα τα μηχανικά σύστημα (κατασκευές) που εκτελούν ταλαντώσεις. Αποτέλεσμά της είναι η απώλεια ενέργειας από το σύστημα. Η ενέργεια χάνεται είτε υπό μορφή θερμότητας είτε ακτινοβολείται στο περιβάλλον. Η απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας γίνεται αντιληπτή, όταν π.χ. μία μεταλλική ράβδος υποβάλλεται σε εναλλασσόμενη κάμψη. Ο ήχος που παράγεται από σώμα που κρούεται είναι απώλεια ενέργειας που διαχέεται στο περιβάλλον.

Κατά τη μελέτη των ταλαντώσεων ενδιαφερόμαστε για την απόσβεση που σχετίζεται με τη συμπεριφορά της κατασκευής. Η απώλεια ενέργειας ενός ταλαντούμενου συστήματος προκαλεί τη μείωση του εύρους της ελεύθερης ταλαντώσεως. Όταν ένα σύστημα, που υποβάλλεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, φθάσει στη φάση της μόνιμης αποκρίσεως, η απώλεια ενέργειας εξισορροπείται από την ενέργεια που προσδίδεται από τη διεγείρουσα δύναμη.

Στα ταλαντούμενα συστήματα διακρίνουμε διάφορους τύπους δυνάμεων αποσβέσεως, οι οποίες μπορεί να οφείλονται σε εσωτερική μοριακή τριβή,

σε τριβή ολισθήσεως ή σε αντίσταση του ρευστού μέσα στο οποίο κινείται το σύστημα. Εκλεπτυσμένα μαθηματικά προσομοιώματα των δυνάμεων αποσβέσεως είναι πολύπλοκα και δεν προσφέρονται για τη μελέτη των ταλαντώσεων. Για το λόγο αυτό έχουν διατυπωθεί απλοποιημένα προσομοιώματα αποσβέσεως, που στις περιπτώσεις της δυναμικής αναλύσεως των κατασκευών επιτρέπουν με επάρκεια τη μελέτη της συμπεριφοράς τους.

### 1.3.1 Απώλεια ενέργειας λόγω αποσβέσεως

Η απώλεια ενέργειας προσδιορίζεται στη φάση της μόνιμης αποκρίσεως. Η γραφική παράσταση της σχέσεως μεταξύ της δυνάμεως αποσβέσεως και της μετατοπίσεως  $F_D(u)$  παρουσιάζει μεγάλες διαφορές για διάφορους τύπους αποσβέσεως. Σ' όλες όμως τις περιπτώσεις η καμπύλη  $F_D(u)$  είναι κλειστή σε μια πλήρη ταλάντωση και περικλείει μία περιοχή η οποία ονομάζεται βρόχος υστερήσεως, το εμβαδόν του οποίου ισούται με την ενέργεια που χάνεται σε κάθε κύκλο.

Γενικώς, η απώλεια ενέργειας εκφράζεται με το ολοκλήρωμα

$$W_D = \int_0^T f_D(u) du \quad (1.3.1)$$

όπου  $T = 2\pi / \bar{\omega}$  είναι η περίοδος ταλαντώσεως στη φάση της μόνιμης απόκρισης. Η  $W_D$  εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως η θερμοκρασία, η συχνότητα ή το εύρος της ταλαντώσεως.

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε την απλούστερη μορφή απώλειας ενέργειας, δηλαδή αυτή που οφείλεται σε ιξώδη απόσβεση. Η δύναμη αποσβέσεως στην περίπτωση αυτή δίδεται από τη σχέση  $f_D = cu$  η δε μετατόπιση στη φάση της μόνιμης αποκρίσεως, που οφείλεται στη αρμονική δύναμη  $p(t) = p_o \sin \bar{\omega}t$ .

Ήτοι:

$$u(t) = p \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (1.3.2)$$

$$p = \frac{p_o}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.3.3)$$

$$\tan \theta = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \quad (1.3.4)$$

Επομένως

$$u(t) = p\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta) \quad (1.3.5)$$

Το ολοκλήρωμα (1.3.1) γράφεται

$$\begin{aligned} W_D &= \int_0^T cu^2 dt \\ &= c\bar{\omega}^{-2} p^2 \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \cos^2(\bar{\omega}t - \theta) dt \\ &= \pi c\bar{\omega} p^2 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η απώλεια ενέργειας στο συντονισμό . Τότε είναι  $\bar{\omega} = \omega = \sqrt{k/m}$ ,  $c = 2m\xi\omega = 2\xi\sqrt{km}$  και η σχέση (1.3.6) γίνεται

$$W_D = 2\xi\pi kp^2 \quad (1.3.7)$$

Εξάλλου η ενέργεια ,η οποία προσδίδεται στο σύστημα, οφείλεται στο έργο που παράγει η δύναμη  $p(t) = p_o \sin \bar{\omega}t$  σε μια πλήρη ταλάντωση. Ήτοι

$$\begin{aligned} W_p &= \int_0^T p(t) du \\ &= \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} p_o p\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta) \sin \bar{\omega}t dt \\ &= p_o p\pi \sin \theta \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι :



$$\sin \theta = \frac{2\xi\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = 2\xi\beta\rho k / p_0 \quad (1.3.9)$$

μπορούμε να γράψουμε τη (1.3.8) ως

$$W_p = \pi c \bar{\omega} \rho^2 = W_D \quad (1.3.10)$$

Πράγματι, από την ανωτέρω σχέση συμπεραίνουμε ότι κατά τη φάση της μόνιμης αποκρίσεως η ενέργεια που προσδίδει στο σύστημα η διεγείρουσα δύναμη ισούται με την ενέργεια που χάνεται συνεπεία αποσβέσεως. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, εάν εξετάσουμε το έργο που παράγουν η ελαστική και η αδρανειακή δύναμη.

Το έργο που παράγει η ελαστική δύναμη σ' ένα κύκλο είναι

$$\begin{aligned} W_s &= \int_0^T f_s(u) du \\ &= \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} k u u dt \\ &= k \bar{\omega} \rho^2 \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \cos(\bar{\omega}t - \theta) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Ομοίως το έργο που παράγει η αδρανειακή δύναμη είναι

$$\begin{aligned} W_I &= \int_0^T f_I(u) du \\ &= \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} m \ddot{u} u dt \\ &= -m \bar{\omega}^3 \rho^2 \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}t - \theta) \cos(\bar{\omega}t - \theta) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Επειδή όμως πρέπει

$$W_I + W_D + W_s = W_p \quad (1.3.13)$$

η οποία λόγω των (1.3.11) και (1.3.12) συνεπάγεται τη (1.3.10).  
από τη σχέση (1.3.5) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \dot{u}(t)^2 &= \bar{\omega}^2 \rho^2 \cos^2(\bar{\omega}t - \theta) \\ &= \bar{\omega}^2 \rho^2 [1 - \sin^2(\bar{\omega}t - \theta)] \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

$$\bar{\omega}^2 (\rho^2 - u^2)$$

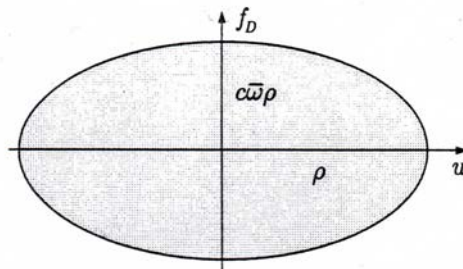
Άρα

$$\begin{aligned} f_D^2 &= c^2 \dot{u}(t)^2 \\ &= c^2 \bar{\omega}^2 (\rho^2 - u^2) \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

η οποία εύκολα μετασχηματίζεται σε

$$\left[ \frac{f_D}{c\bar{\omega}\rho} \right]^2 + \left[ \frac{u}{\rho} \right]^2 = 1 \quad (1.3.16)$$

Η ανωτέρω σχέση στο επίπεδο  $u, f_D$  παριστάνει έλλειψη με ημιάξονες  $\rho$  και  $c\bar{\omega}\rho$ , Σχ. (1.3.1).



**Σχήμα 1.3.1** Βρόχος υστερήσεως συστήματος με ιξώδη απόσβεση.

Το εμβαδόν της ελλείψεως είναι  $\pi c \bar{\omega} \rho^2$ , δηλαδή ισούται με την ενέργεια που χάνεται σ' ένα κύκλο (πλήρη ταλάντωση). Άρα ο βρόχος υστερήσεως συστήματος με ιξώδη απόσβεση είναι έλλειψη.

Οι ιδιότητες της αποσβέσεως των υλικών συστημάτων εκφράζονται με διάφορους τρόπους ανάλογα με την επιστημονική περιοχή που εφαρμόζονται. Από αυτές αναφέρουμε εδώ δύο μονάδες σχετικής ενέργειας που απαντώνται συνηθέστερα. Ως πρώτη αναφέρουμε την ειδική χωρητικότητα αποσβέσεως, η οποία ορίζεται ως

$$W_D = \frac{W_D}{U} \quad (1.3.17)$$

όπου  $U = k\rho^2 / 2$  είναι η ελαστική ενέργεια του συστήματος.

Ένα άλλο μέγεθος ορίζεται από τη σχέση

$$n = \frac{W_D}{2\pi U} \quad (1.3.18)$$

Για ιξώδη απόσβεση τα ανωτέρω μεγέθη είναι

$$W_D = \frac{\pi c \bar{\omega} \rho^2}{K \rho^2 / 2} = \frac{2\pi c \bar{\omega}}{m \omega^2} = \frac{2\pi(2m\omega\xi)\bar{\omega}}{m \omega^2} = 4\pi\xi\beta \quad (1.3.19)$$

$$n = 2\xi\beta \quad (1.3.20)$$

### 1.3.2 Ισοδύναμη ιξώδης απόσβεση

Όταν η απόσβεση δεν είναι φύσει ιξώδης, η καμπύλη  $f_D(u)$  δεν είναι γενικώς έλλειψη. Είναι όμως δυνατό να προσδιορισθεί ένας ισοδύναμος συντελεστής ιξώδους αποσβέσεως  $c_{eq}$  εξισώνοντας το εμβαδόν  $W_D$  του πειραματικώς λαμβανόμενου βρόχου αποσβέσεως με τη θεωρητική τιμή της απώλειας ενέργειας ιξώδους αποσβέσεως. Με βάση τη σχέση (1.3.6) γράφουμε

$$W_D = c_{eq} \pi \bar{\omega} \rho^2 \quad (1.3.21)$$

από την οποία ορίζουμε τον ισοδύναμο συντελεστή

$$c_{eq} = \frac{W_D}{\pi \bar{\omega} \rho^2} \quad (1.3.22)$$

Και ο αντίστοιχος λόγος αποσβέσεως προκύπτει ως

$$\xi_{eq} = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{Km}} \quad (1.3.23)$$

### 1.3.3 Υστερητική απόσβεση

Όταν η κατασκευή υποβάλλεται σε κυκλική καταπόνηση, η απώλεια της ενέργειας συντελείται στο εσωτερικό του υλικού της κατασκευής. Πειράματα που έγιναν από πολλούς ερευνητές έδειξαν ότι στα περισσότερα δομικά υλικά, όπως π.χ. ο χάλυβας και το αλουμίνιο, η απώλεια ενέργειας ανά κύκλο δεν εξαρτάται από τη συχνότητα της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης, τουλάχιστο για ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων, αλλά είναι ανάλογη του τετραγώνου του εύρους της ταλαντώσεως. Η απόσβεση αυτή ονομάζεται δομική ή υστερητική απόσβεση. Η εξίσωση κινήσεως για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με υστερητική απόσβεση είναι της μορφής

$$m\ddot{u} + f(u) = p(t) \quad (1.3.24)$$

όπου  $f(u)$  είναι μία μη γραμμική συνάρτηση της μετατοπίσεως.

Η επίλυση της εξίσωσης (1.3.24) μπορεί να γίνει με αριθμητική ολοκλήρωση.

Η δύναμη  $f(u)$  μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα δύο δυνάμεων, μιας ελαστικής δυνάμεως με μέση τιμή  $f_s = ku$  και μιας δυνάμεως αποσβέσεως.

$$f_D = \frac{nk}{\omega} \dot{u} \quad (1.3.25)$$

όπου  $n$  σταθερά της αποσβέσεως.

Η απώλεια ενέργειας σ' ένα κύκλο συνεπεία υστερητικής αποσβέσεως προκύπτει από τη σχέση (1.3.6), αν ο συντελεστής  $c$  αντικατασταθεί με  $nk / \bar{\omega}$ . Άρα

$$W_D = nk\pi\rho_h^2 \quad (1.3.26)$$

όπου  $\rho_h$  το εύρος ταλαντώσεως με υστερητική απόσβεση. Βλέπουμε ότι η απώλεια ενέργειας ανά κύκλο δεν εξαρτάται από τη συχνότητα  $\bar{\omega}$ , αλλά από το τετράγωνο του εύρους ταλαντώσεως. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$f = \frac{nk}{\omega} \dot{u} + ku \quad (1.3.27)$$

και η εξίσωση κινήσεως για αρμονική διέγερση λαμβάνει τη μορφή

$$m\ddot{u} + \frac{nk}{\omega}\dot{u} + ku = p_0 \sin \bar{\omega}t \quad (1.3.28)$$

Ορίζουμε  $c_n = nk / \bar{\omega}$ , οπότε λαμβάνουμε

$$\xi_n = c_n / 2m\bar{\omega} = n / 2\beta \quad (1.3.29)$$

Δηλαδή ο λόγος αποσβέσεως μεταβάλλεται με το  $\beta$ .

Η λύση της εξισώσεως (1.3.28) για μόνιμη απόκριση προκύπτει από τη σχέση (1.3.2) αν το  $\xi$  αντικατασταθεί με το  $\xi_n$ . Άρα

$$u(t) = p_h \sin(\bar{\omega}t - \theta_h) \quad (1.3.30)$$

όπου

$$p_n = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + n^2}} \quad (1.3.31)$$

$$\tan \theta_n = \frac{n}{1-\beta^2} \quad (1.3.32)$$

Για να προσδιορίσουμε το βρόχο υστερήσεως εργαζόμαστε όπως στην Παράγραφο 1.3.1 Από τη (1.3.30) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \dot{u}(t)^2 &= \rho_h^2 \bar{\omega}^2 \cos^2(\bar{\omega}t - \theta_h) \\ &= \rho_h^2 \bar{\omega}^2 [1 - \sin^2(\bar{\omega}t - \theta_h)] \\ &= \bar{\omega}^2 (\rho_h^2 - u^2) \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Επίσης

$$f_D^2 = (f - ku)^2 = \left(\frac{nk}{\omega}\right)^2 \dot{u}^2 \quad (1.3.34)$$

η οποία γράφεται:

$$(f - ku)^2 = n^2 k^2 (\rho_h^2 - u^2) \quad (1.3.35)$$

ή

$$\left[ \frac{f - ku}{nk\rho_h} \right]^2 + \left[ \frac{u}{\rho_h} \right]^2 = 1 \quad (1.3.36)$$

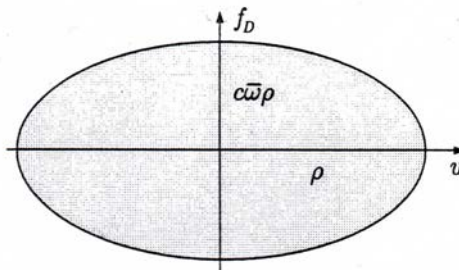
Στο επίπεδο  $u, f$  η εξίσωση (1.3.36) παραστάει λοξή έλλειψη (βλ. Σχ.1.3.2). Το εμβαδόν της ελλείψεως είναι  $nk\pi\rho_h^2$  και εκφράζει τη απώλεια ενέργειας σ' ένα κύκλο. Η εξίσωση (1.3.36) δεν περιέχει τη συχνότητα της διεγείρουσας δυνάμεως. Αυτό συνεπάγεται ότι ο βρόχος υστερήσεως μπορεί να προσδιορισθεί πειραματικά με χαμηλή συχνότητα της διεγείρουσας δυνάμεως, δηλαδή ψευδοδυναμικά, καταγράφοντας τη καμπύλη φορτίου μετατοπίσεως.

Για  $f = 0$  λαμβάνουμε τη τετμημένη της ελλείψεως στον άξονα  $u$ .

$$d = \rho_h \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \quad (1.3.37)$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή αποσβέσεως  $n$ .  
Ήτοι

$$n = \frac{d}{\sqrt{\rho_h^2 - d^2}} \quad (1.3.38)$$



**Σχήμα 1.3.2** Βρόχος υστερήσεως συστήματος με υστερητική απόσβεση.

### 1.3.4 Απόσβεση Coulomb

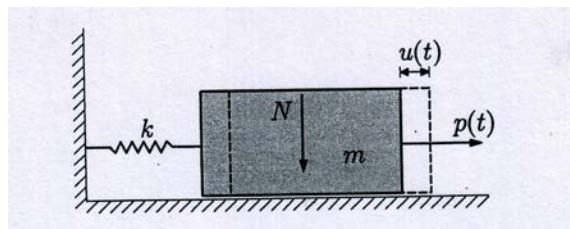
Η απόσβεση οφείλεται σε διάφορους μηχανισμούς απορροφήσεως ενέργειας που δρουν ταυτόχρονα. Το προσομοίωμα της ιξώδους αποσβέσεως ή της υστερητικής αποσβέσεως, αν και στις περισσότερες περιπτώσεις της πράξης μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά τη συμπεριφορά της κατασκευής, δεν προσφέρεται, όταν κατά την κίνηση ασκούνται δυνάμεις τριβής Coulomb. Οι δυνάμεις αυτές αναπτύσσονται στις ξηρές επιφάνειες επαφής δύο σωμάτων με σχετική ολίσθηση. Η δύναμη τριβής εκφράζεται με τη σχέση  $F = \mu N$ , όπου  $N$  είναι η κάθετη δύναμη στην επιφάνεια ολισθήσεως και  $\mu$  ο συντελεστής τριβής, ο οποίος προσδιορίζεται πειραματικά και είναι μεγαλύτερος πριν αρχίσει η σχετική ολίσθηση. Η κατεύθυνση της δυνάμεως τριβής είναι αντίθετη εκείνης, δηλαδή έχει πρόσημο αντίθετο της ταχύτητας. Επομένως μπορούμε να θέσουμε  $F = -\text{sign}(\dot{u})\mu N$ , όπου  $\text{sign}(\dot{u}) = \dot{u} / |\dot{u}|$ .

#### Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση Coulomb

Θεωρούμε το μονοβάθμιο σύστημα του Σχ. 1.3.3, το οποίο κινείται ολισθαίνοντας πάνω σε ξηρή επιφάνεια. Όταν το σώμα κινείται προς τα δεξιά η εξίσωση κινήσεως είναι

$$m\ddot{u} + ku = -F \quad (1.3.39)$$

Ενώ όταν κινείται προς τα αριστερά εξίσωση κινήσεως είναι:



- a. Σώμα ολισθαίνον επί επιπέδου με συντελεστή τριβής  $\mu$ .



b. κίνηση προς τα δεξιά  $\dot{u}/|\dot{u}|=1$     c. κίνηση προς τα αριστερά  $\dot{u}/|\dot{u}|=-1$

**Σχήμα 1.3.3**

$$m\ddot{u} + ku = F \quad (1.3.40)$$

Οι ανωτέρω δύο εξισώσεις μπορούν να συμπτυχθούν στην

$$m\ddot{u} + ku = -F \text{sign}(\dot{u}) \quad (1.3.41)$$

ή

$$m\ddot{u} + F \text{sign}(\dot{u}) + ku = 0 \quad (1.3.42)$$

Η εξίσωση (1.3.42) είναι μη γραμμική . Κατωτέρω παρουσιάζουμε αναλυτική λύση για ελεύθερη ταλάντωση που οφείλεται σε αρχικές συνθήκες  $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = 0$ .

Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά κατά  $u_0$  και εξετάζουμε την κίνηση. Το σώμα θα κινηθεί προς τα αριστερά με εξίσωση κινήσεως της (1.3.40). Μία μερική λύση της εξισώσεως αυτής είναι:

$$u_p(t) = \frac{F}{k} \quad (1.3.43)$$

Άρα η γενική λύση της εξισώσεως (1.3.40) είναι:

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F}{k} \quad (1.3.44)$$

Για τις αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = 0 \quad (1.3.45)$$



Λαμβάνουμε

$$A = u_0 - \frac{F}{k}, B = 0 \quad (1.3.46)$$

Και η μετατόπιση (1.3.44) γράφεται

$$u(t) = \left( u_0 - \frac{F}{k} \right) \cos \omega t + \frac{F}{k} \quad (1.3.47)$$

Η εξίσωση ισχύει μέχρι τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα, δηλαδή  $t = \pi / \omega$ . Τη στιγμή αυτή το σώμα θα βρίσκεται στην ακραία αριστερή θέση, όπου η μετατόπιση είναι  $u(\pi / \omega) = -(u_0 - 2F / k)$ . Το σώμα τώρα θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά με αρχικές συνθήκες

$$u\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\left(u_0 - 2\frac{F}{k}\right), \dot{u}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 \quad (1.3.48)$$

Η κίνηση διέπεται τώρα από την εξίσωση (1.3.39), η οποία έχει μερική λύση

$$u_p(t) = -\frac{F}{k} \quad (1.3.49)$$

Και γενική λύση

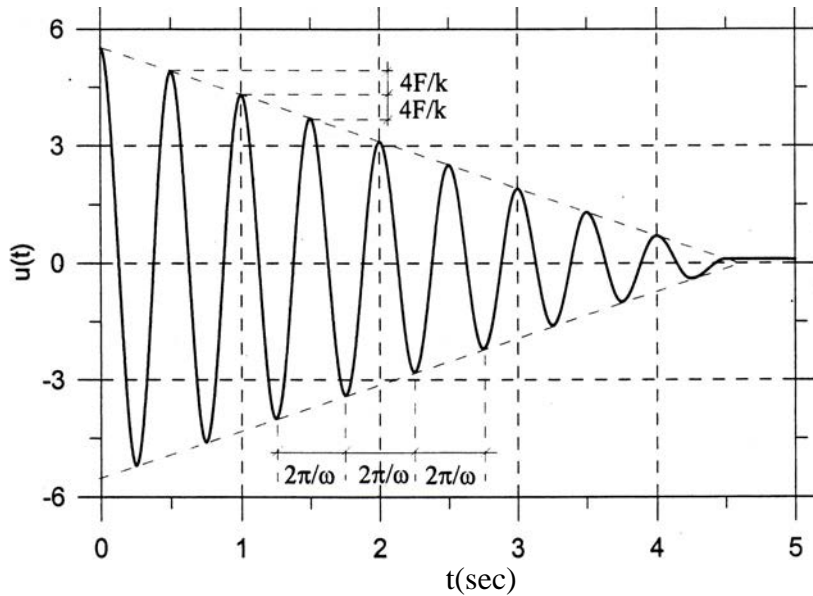
$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{F}{k} \quad (1.3.50)$$

Για τις αρχικές συνθήκες (1.3.48) λαμβάνουμε

$$A = u_0 - \frac{3F}{k}, B = 0 \quad (1.3.51)$$

Και η εξίσωση (1.3.50) γίνεται

$$u(t) = \left( u_0 - 3\frac{F}{k} \right) \cos \omega t - \frac{F}{k} \quad (1.3.52)$$



**Σχήμα 1.3.4** Ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση Coulomb.

Η εξίσωση (1.3.52) ισχύει μέχρις ότου το σώμα φθάσει στην ακραία δεξιά θέση, δηλαδή όταν τη χρονική στιγμή  $t = 2\pi/\omega$ . Τη χρονική αυτή στιγμή το σώμα έχει ολοκληρώσει μία πλήρη ταλάντωση και η μετατόπιση είναι  $u(2\pi/\omega) = -(u_0 - 4F/k)$ . Η γραφική παράσταση της μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο Σχ. 1.3.4. Η καμπύλη προέκυψε με αριθμητική ολοκλήρωση της εξισώσεως κινήσεως (1.3.42) με δεδομένα  $m = 10\text{knm}^{-1}\text{sec}^2, T = 0.5\text{sec}, F = 23.685\text{kN}, u_0 = 0.55\text{m}$ . Τα αριθμητικά αποτελέσματα ταυτίζονται με εκείνα που προκύπτουν από την ανωτέρω αναλυτική λύση. Η περίοδος της κινήσεως είναι  $T = 2\pi/\omega$ , το οποίο σημαίνει ότι η τριβή Coulomb δεν επηρεάζει την ιδιοσυχνότητα ή την ιδιοπερίοδο της ταλαντώσεως. Το εύρος της ταλαντώσεως ελαττώνεται σε κάθε κύκλο κατά  $4F/k$ . Συνεπεία τούτου οι περιβάλλουσες της καμπύλης  $u(t)$  είναι ευθείες γραμμές, εν αντιθέσει προς τις περιπτώσεις της ιξώδους ή της θστερητικής αποσβέσεως, όπου οι περιβάλλουσες είναι εκθετικές συναρτήσεις. Η κίνηση του συστήματος συνεχίζεται έως ότου η ελαστική δύναμη  $ku$  γίνει μικρότερη της δυνάμεως τριβής  $F$ .

Μέχρι τώρα δεν έγινε διάκριση μεταξύ της στατικής τριβής  $F_s = \mu_s N$  και της δυναμικής τριβής  $F_d = \mu_d N$ .

Η πρώτη αναπτύσσεται όταν το σώμα είναι ακίνητο, ενώ η δεύτερη όταν το σώμα κινείται. Γενικώς είναι  $\mu_d < \mu_s$ , άρα στην εξίσωση κινήσεως θα χρησιμοποιηθεί ο συντελεστής δυναμικής τριβής  $\mu_d$ , ενώ για το έλεγχο της στάσεως ο συντελεστής στατικής τριβής  $\mu_s$ . Στην ιζώδη ή στην υστερητική απόσβεση το σώμα θεωρητικά δεν παύει να κινείται, αφού το εύρος ταλαντώσεως ελαττώνεται εκθετικά. Τα πραγματικά συστήματα όμως σταματούν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η τριβή Coulomb συνυπάρχει και με τις άλλες μορφές αποσβέσεως και αναγκάζει τα κινούμενα συστήματα να σταματήσουν.

### **Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση Coulomb**

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση κινήσεως γίνεται

$$m\ddot{u} + F\text{sign}(\dot{u}) + ku = p(t) \quad (1.3.52)$$

Αναλυτική λύση μπορεί να επιτευχθεί διασπώντας την ανωτέρω εξίσωση σε δύο εξισώσεις. Έτσι για κίνηση προς τα δεξιά ισχύει η εξίσωση

$$m\ddot{u} + ku = -F + p(t) \quad (1.3.53)$$

Της οποίας η λύση είναι

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \frac{F}{k} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(T) \sin \omega(t-T) dT \quad (1.3.54)$$

Ενώ για κίνηση προς τα αριστερά ισχύει η εξίσωση

$$m\ddot{u} + ku = F + p(t) \quad (1.3.55)$$

Η οποία έχει λύση

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{F}{k} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(T) \sin \omega(t-T) dT \quad (1.3.56)$$

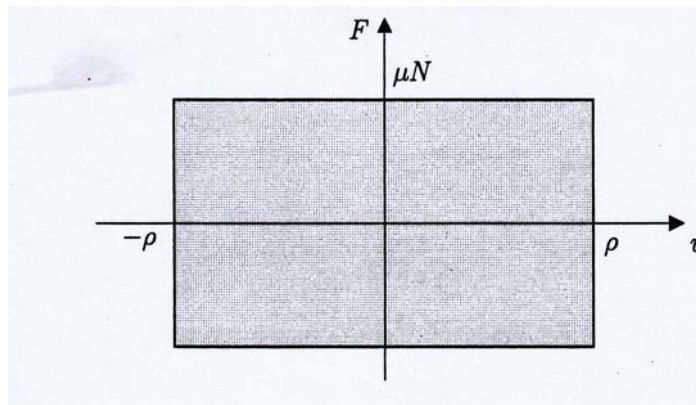
Όταν η φόρτιση είναι αρμονική  $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} t$  η γενική λύση είναι

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \mp \frac{F}{k} + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} \sin \bar{\omega} t, \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (1.3.57)$$

Προφανώς η λήψη της λύσης για δεδομένες συνοριακές συνθήκες γίνεται αρκετά πολύπλοκη εάν ακολουθήσουμε τη διαδικασία που εφαρμόσαμε για τις ελεύθερες ταλαντώσεις, διασπώντας δηλαδή την εξίσωση κινήσεως σε δύο εξισώσεις. Για μικρές όμως αποσβέσεις μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση στη φάση της μόνιμης αποκρίσεως. Η λύση θα δίδεται από τη σχέση (1.3.2). Το διάγραμμα της δύναμεις τριβής συναρτήσει της μετατοπίσεως σ' ένα κύκλο λαμβάνει τη μορφή του ορθογωνίου του Σχ. 1.3.5. Είναι προφανές ότι το έργο που παράγεται από τη δύναμη τριβής σε μία πλήρη ταλάντωση υπολογίζεται από τη σχέση

$$W_D = 4F\rho \quad (1.3.58)$$

Μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα ισοδύναμο συντελεστή ιξώδους αποσβέσεως εξισώνοντας την απώλεια ενέργειας με εκείνη της ιξώδους αποσβέσεως για ένα κύκλο που εκφράζεται με τη σχέση (1.3.22). Ήτοι



**Σχήμα 1.3.5** Βρόχος υστερήσεως συστήματος με απόσβεση Coulomb.

$$c_{eq} \bar{\omega} \rho^2 = 4F\rho \quad (1.3.59)$$

και

$$c_{eq} = \frac{4F}{\pi \omega \rho} \quad (1.3.60)$$

Ο ισοδύναμος λόγος αποσβέσεως είναι

$$\xi_{eq} = \frac{c_{eq}}{2m\omega} = \frac{2F}{\pi k \rho \beta} \quad (1.3.61)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω τιμή του λόγου αποσβέσεως στη σχέση (1.3.3) έχουμε

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (4F/\pi k \rho)^2}} \quad (1.3.62)$$

Από την οποία λύνοντας ως προς  $\rho$  λαμβάνουμε

$$\rho = \frac{p_0}{k} \sqrt{\frac{1-(4F/\pi p_0)^2}{(1-\beta^2)^2}} \quad (1.3.63)$$

Η σχέση (1.3.63) ισχύει όταν  $1-(4F/\pi p_0)^2 > 0$ , δηλαδή όταν  $F/p_0 < \pi/4$ . Προφανώς για  $F/p_0 > \pi/4$  το  $\rho$  γίνεται φανταστικό και η μέθοδος αυτή δεν ισχύει.

Η διαφορά φάσεως προκύπτει από τη σχέση (1.3.4) θέτοντας  $\xi = \xi_{eq}$  και λαμβάνοντας το  $\rho$  από τη (1.3.26). Έτσι έχουμε

$$\tan \theta = \pm \frac{4F/\pi p_0}{\sqrt{1-(4F/\pi p_0)^2}} \quad (1.3.64)$$

Το θετικό πρόσημο ισχύει όταν  $\beta < 1$ , ενώ το αρνητικό όταν  $\beta > 1$ .

### **Μέτρηση της αποσβέσεως**

Η μάζα ενός συστήματος προσδιορίζεται από τη γεωμετρία του σώματος και την πυκνότητα του υλικού. Επίσης η ακαμψία του προσδιορίζεται από τη γεωμετρία του σώματος και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Είναι όμως δύσκολο ή πρακτικά απρόσφορο να συσχετισθεί η απόσβεση με γνωστά ή μετρήσιμα χαρακτηριστικά της κατασκευής. Επομένως η απόσβεση μιας δεδομένης κατασκευής δεν μπορεί να εκτιμηθεί επακριβώς κατά τη φάση σχεδιασμού της, αλλά μόνο πειραματικά αφού

κατασκευασθεί. Υπάρχουν διάφορες πειραματικές μέθοδοι μετρήσεως της αποσβέσεως. Οι περισσότερες βασίζονται στην παραδοχή ότι η απόσβεση είναι ιξώδης. Στις περιπτώσεις που αυτή δεν είναι ιξώδης προσδιορίζεται η ισοδύναμη ιξώδης απόσβεση. Κατωτέρω περιγράφουμε μερικές απ' αυτές τις μεθόδους.

### Μείωση εύρους ελεύθερης ταλαντώσεως

Το σύστημα διεγείρεται με κατάλληλη πειραματική διάταξη και το αφήνουμε να εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις. Ακολούθως μετρώνται τα εύρη ταλαντώσεως  $u_i$  και  $u_{i+n}$  που απέχουν χρονικά κατά  $nT$ , δηλαδή κατά  $n$  πλήρης ταλαντώσεις. Ο λόγος αποσβέσεως υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{2n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+n}}\right) \quad (1.3.65)$$

Από την οποία λαμβάνουμε

$$\xi = \frac{\delta_n}{\sqrt{4\pi^2 n^2 - \delta_n^2}} \quad (1.3.66)$$

Όπου

$$\delta_n = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+n}}\right) \quad (1.3.67)$$

Όταν η απόσβεση είναι υστερητική, η δύναμη αποσβέσεως δίδεται από τη σχέση (1.3.25). Στις ελεύθερες ταλαντώσεις μπορούμε να θέσουμε  $\bar{\omega} \simeq \omega$ , αρκεί η απόσβεση να είναι μικρή. Ο συντελεστής αποσβέσεως  $c_h$  και ο λόγος αποσβέσεως  $\xi_h$  υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$c_n = \frac{nk}{\omega} \quad (1.3.68)$$

$$\xi_n = \frac{n}{2} \quad (1.3.69)$$

Και ο συντελεστής  $n$  της υστερητικής αποσβέσεως θα προκύψει από τη σχέση (1.3.66) αν τεθεί  $\xi = \xi_n$ . Άρα

$$n = \frac{2\delta_n}{\sqrt{4\pi^2 n^2 - \delta n^2}} \quad (1.3.70)$$

### Απόκριση συντονισμού

Στο σύστημα επιβάλλεται αρμονική διέγερση  $p(t) = p_0 \sin \bar{\omega}t$ .

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right] \quad (1.3.71)$$

Η οποία για  $\beta=1$  δίδει  $\theta=90^\circ$  ανεξάρτητα από την τιμή  $\xi$ . Όταν η πειραματική συσκευή που χρησιμοποιούμε επιτρέπει τη μέτρηση της διαφοράς φάσεως  $\theta$  τότε προσαρμόζεται η συχνότητα της διεγέρσεως ώστε να γίνει  $\theta=90^\circ$  και μετρούμε το εύρος ταλαντώσεως  $\rho$ .

$$D = \max |R(t)| = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{2\xi} \quad (1.3.72)$$

Από την οποία προκύπτει

$$\xi = \frac{p_0/k}{2\rho} \quad (1.3.73)$$

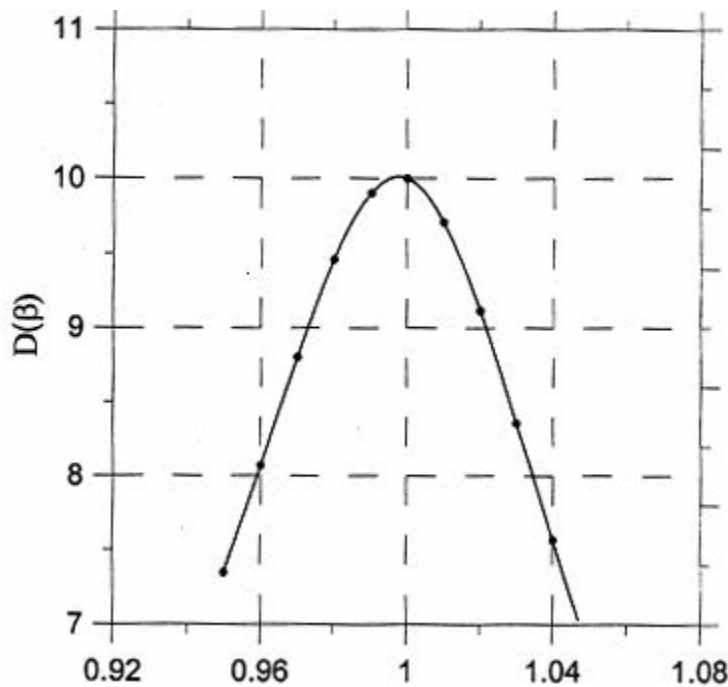
Η μέθοδος αυτή απαιτεί τη γνώση της ακαμψίας  $k$  της κατασκευής, η οποία προσδιορίζεται είτε από τα φυσικά χαρακτηριστικά της κατασκευής είτε πειραματικά, π.χ. επιβάλλοντας φορτίο  $p_0$  και μετρώντας την προκαλούμενη μετατόπιση.

Εάν η μέτρηση της διαφοράς φάσεως είναι δυσχερής, τότε μετρούμε από το πείραμα το εύρος ταλαντώσεως στην περιοχή συντονισμού. Στη συνέχεια

λαμβάνουμε τη καμπύλη  $D(\beta) = \rho(\beta)/(p_0/k)$  και προσδιορίζουμε τη μέγιστη τιμή της.

$$D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (1.3.74)$$

Η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό του  $\xi$ . Για μικρές τιμές του  $\xi$  είναι  $\xi^2 \simeq 0$  και άρα  $\xi \simeq 1/2D_{\max}$ . Κι αυτή η μέθοδος απαιτεί τη γνώση της ακαμψίας  $k$  της κατασκευής.



Σχήμα 1.3.6 Γραφική παράσταση της καμπύλης  $D(\beta)$  στη περιοχή συντονισμού.

### Εύρος της καμπύλης αποκρίσεως

Το εύρος της καμπύλης αποκρίσεως  $D(\beta)$  στην περιοχή συντονισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της αποσβέσεως. Η μέθοδος περιλαμβάνει τη μέτρηση των συχνοτήτων στις οποίες η διαφορά φάσεως είναι  $\pm 45^\circ$ . Η μία από τις συχνότητες αυτές είναι μικρότερη από τη συχνότητα συντονισμού και η άλλη μεγαλύτερη. Οι αντίστοιχες τιμές του  $\beta$  λαμβάνονται από τη σχέση (1.3.66). Ήτοι

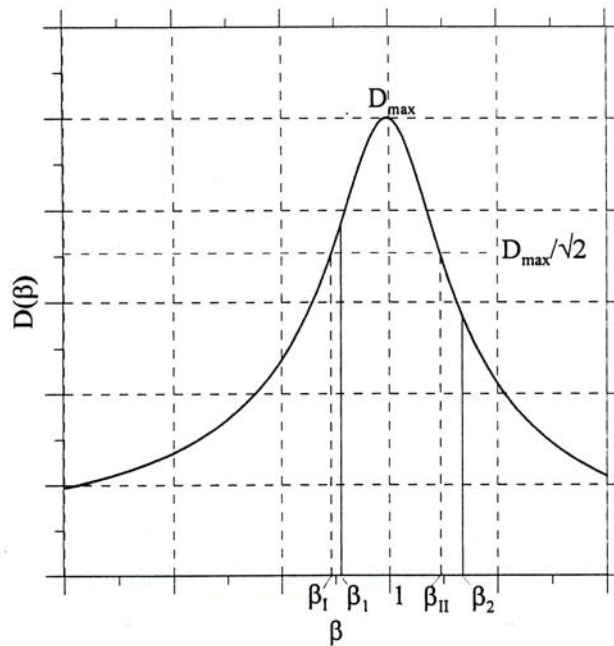


$$\frac{2\xi\beta_1}{1-\beta_1^2} = 1 \quad (1.3.75)$$

$$\frac{2\xi\beta_2}{1-\beta_2^2} = -1 \quad (1.3.76)$$

Οι οποίες γράφονται ως

$$1 - \beta_1^2 - 2\xi\beta_1 = 0 \quad (1.3.77)$$



**Σχήμα 1.3.7** Γραφική παράσταση της καμπύλης αποκρίσεως  $D(\beta)$  για το προσδιορισμό των  $\beta_I$  και  $\beta_{II}$ .

$$1 - \beta_2^2 - 2\xi\beta_2 = 0 \quad (1.3.78)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$\xi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) = \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\omega} \quad (1.3.79)$$

Η σχέση (1.3.77) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του  $\xi$ , όταν έχουν μετρηθεί οι συχνότητες  $\bar{\omega}_1$  και  $\bar{\omega}_2$  η δε ιδιοσυχνότητα  $\omega$  είναι γνωστή ή μπορεί να υπολογισθεί.

Η προηγούμενη μέθοδος βασίζεται στη δυνατότητα μετρήσεως της διαφοράς φάσεως, πράγμα το οποίο δεν είναι εύκολο διότι απαιτεί σχετικά πολύπλοκη διάταξη. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί άλλη ιδιότητα της καμπύλης αποκρίσεως που δεν βασίζεται στη μέτρηση της διαφοράς φάσεως. Από πειραματικές μετρήσεις γίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης αποκρίσεως  $D(\beta)$  στην περιοχή συντονισμού και προσδιορίζονται οι τιμές του  $\beta$  που αντιστοιχούν στην τιμή  $1/\sqrt{2}D_{\max}$ . Όπως προκύπτει από το Σχ.1.3.7, οι τιμές αυτές είναι δύο και τις οποίες παριστάνουμε με  $\beta_I$  και  $\beta_{II}$ . Για μικρές τιμές της αποσβέσεως γνωρίζουμε ότι  $D_{\max} \simeq 1/2\xi$ .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (1.3.80)$$

Η λύση της ανωτέρω εξίσωσης δίνει τις δύο τιμές του  $\beta$

$$\beta_I^2 = (1 - 2\xi^2) - 2\xi\sqrt{1 + \xi^2} \quad (1.3.81)$$

$$\beta_{II}^2 = (1 - 2\xi^2) + 2\xi\sqrt{1 + \xi^2} \quad (1.3.82)$$

Για μικρές τιμές του  $\xi$  οι ανωτέρω σχέσεις απλοποιούνται ως

$$\beta_I^2 \simeq 1 - 2\xi - 2\xi^2 \quad (1.3.83)$$

$$\beta_{II}^2 \simeq 1 + 2\xi - 2\xi^2 \quad (1.3.84)$$

ή

$$\beta_I \simeq \sqrt{1 - 2\xi - 2\xi^2} \simeq 1 - \xi - \xi^2 \quad (1.3.85)$$

$$\beta_{II} \simeq \sqrt{1 + 2\xi - 2\xi^2} \simeq 1 + \xi - \xi^2 \quad (1.3.86)$$

Από τις οποίες προκύπτει με αφαίρεση κατά μέλη

$$\xi = \frac{1}{2}(\beta_{II} - \beta_I) \quad (1.3.87)$$

Η σχέση (1.3.87) είναι όμοια με τη (1.3.79) αλλά αποφεύγει τη μέτρηση γωνιών διαφοράς φάσεως. Η τελευταία μέθοδος είναι γνωστή ως μέθοδος της μισής ισχύος.

#### **1.4 ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΣ ΩΠΛΙΣΜΕΝΟΥ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ**

Η πραγματική συμπεριφορά του σκυροδέματος στην κατασκευή ενδέχεται να είναι διαφορετική από αυτήν που προσδιορίζεται μέσω τυποποιημένων δοκιμών, δεδομένου ότι το σκυρόδεμα σε μία κατασκευή αφενός μεν δεν καταπονείται με τον ίδιο τρόπο όπως στις τυποποιημένες δοκιμές, αφετέρου δε διαφέρει και από άποψη ποιότητας, διαστάσεων, σχήματος, ηλικίας, συντηρήσεως κ.α.

##### **Χαρακτηριστική αντοχή**

Σε ειδικές περιπτώσεις και υπό την προϋπόθεση πλήρους αιτιολογίας είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν δοκίμια ηλικίας διάφορης των 28 ημερών.

Σε ορισμένους υπολογισμούς, π.χ. εκτίμηση του μέτρου ελαστικότητας, χρησιμοποιείται η μέση θλιπτική αντοχή η οποία μπορεί να προκύψει από τη χαρακτηριστική θλιπτική αντοχή, μέσω της σχέσης.

$$f_{cm} = f_{ck} + 8(M3a) \quad (1.4.1)$$

Εκτός από σπάνιες περιπτώσεις, η πραγματική τιμή της χαρακτηριστικής αντοχής δεν μπορεί να προσδιορισθεί γιατί ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται για αυτόν τον σκοπό είναι μεγάλος.

Ο κανονισμός αυτός βασίζεται σε θλιπτική αντοχή σκυροδέματος που μετράται στις 28 ημέρες σε κυλινδρικά δοκίμια διαμέτρου 150 mm και ύψους 300 mm ή κυβικά δοκίμια ακμής 150 mm, σύμφωνα με τις διατάξεις του Κανονισμού Τεχνολογίας Σκυροδέματος (Κ.Τ.Σ.).

Χαρακτηριστική αντοχή κυλινδρικού δοκιμίου  $f_{ck}$  ή κυβικού δοκιμίου  $f_{ck,cube}$  θεωρείται εκείνη η τιμή αντοχής κάτω της οποίας υπάρχει 5% πιθανότητα να βρεθεί η τιμή αντοχής ενός τυχαίου δοκιμίου.

Στην πράξη το σκυρόδεμα θεωρείται ότι ανήκει στην κατηγορία που προδιαγράφεται στην μελέτη, αν τα αποτελέσματα των δοκιμών συμφωνούν με τα κριτήρια συμμόρφωσης του Κ.Τ.Σ.

### **Κατηγορίες σκυροδέματος**

Ο κανονισμός αυτός δεν ισχύει για ειδικά σκυροδέματα κατηγορίας υψηλότερης από C50/60.

Η αντοχή και τα άλλα δεδομένα για το σκυρόδεμα καθορίζονται βάσει τυποποιημένων δοκιμών. Η διαστασιολόγηση πρέπει να βασίζεται σε κατηγορία σκυροδέματος που αντιστοιχεί σε καθορισμένη τιμή χαρακτηριστικής αντοχής.

Οι κατηγορίες σκυροδέματος είναι οι ακόλουθες:

C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

όπου ο πρώτος αριθμός κάθε κατηγορίας ορίζει την χαρακτηριστική αντοχή

### **Φαινόμενο βάρος**

Στους υπολογισμούς μπορεί να ληφθεί το φαινόμενο βάρος άοπλου σκυροδέματος ίσο με  $24\text{KN}/\text{m}^3$  και το φαινόμενο βάρος οπλισμένου ή προεντεταμένου σκυροδέματος ίσο με  $25\text{KN}/\text{m}^3$ , σε περίπτωση συνήθων ποσοστών οπλισμού.

Το φαινόμενο βάρος θα προσδιορίζεται μέσω δοκιμών ή θα εκτιμάται με βάση τις γνωστές τιμές φαινομένων βαρών των συστατικών του σκυροδέματος.

Οι τιμές του πίνακα (1.4.1) προκύπτουν από την σχέση

$$f_{ctm} = 0.30 f_{ck}^{2/3} \quad (1.4.2)$$

Το εύρος της διακύμανσης της  $f_{ct}$  είναι από  $0,70 f_{ctm}$ , μέχρι  $1,30 f_{ctm}$ .

Η εκλογή της τιμής  $f_{ct}$  που θα εισαχθεί στους υπολογισμούς εξαρτάται από το είδος του εξεταζόμενου προβλήματος κυλίνδρου ( $f_{ck}$ ), ενώ ο δεύτερος ορίζει την χαρακτηριστική αντοχή κύβου ( $f_{ck,cube}$ ) σε MPa, στις 28 ημέρες.

Η χρήση της κατηγορίας C12/15 σε οπλισμένο σκυρόδεμα επιτρέπεται μόνο για κτίρια χωρίς αυξημένες απαιτήσεις πλαστιμότητας με τρεις το πολύ ορόφους.

Η χρήση της κατηγορίας C16/20 σε οπλισμένο σκυρόδεμα επιτρέπεται μόνο:

- Για κτίρια χωρίς αυξημένες απαιτήσεις πλαστιμότητας, ανεξαρτήτως του αριθμού των ορόφων.
- Για κτίρια με αυξημένες απαιτήσεις πλαστιμότητας, με τρεις το πολύ ορόφους.

Στους τρεις ορόφους συμπεριλαμβάνεται και τυχόν υπάρχον υπόγειο.

Για προεντετεμένο σκυρόδεμα δεν επιτρέπονται οι κατηγορίες C12/15, C16/20 και C20/25.

Στον κανονισμό αυτό και εφόσον δεν υπάρχει άλλη ένδειξη, ο όρος «εφελκυστική αντοχή» αναφέρεται σε καθαρό αξονικό εφελκυσμό, όπως έχει οριστεί από τον Κ.Τ.Σ.

Η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος  $f_{ct}$  μπορεί να εκτιμηθεί βάσει της χαρακτηριστικής αντοχής του σκυροδέματος από τον πίνακα 1.4.1

$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$f_{ctk0.05}$	1.10	1.30	1.50	1.80	2.00	2.20	2.50	2.70	2.90
$f_{ctm}$	1.60	1.90	2.20	2.60	2.90	3.20	3.50	3.80	4.10
$f_{ctk0.95}$	2.00	2.50	2.90	3.30	3.80	4.20	4.60	4.90	5.30

**Πίνακας 1.4.1:** Εφελκυστική αντοχή σε MPa

Η εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος ( $f_{ct}$ ) μπορεί να εκτιμηθεί από τις αντίστοιχες αντοχές εφελκυσμού από κάμψη ( $f_{ct,fl}$ ) ή από διάρρηξη ( $f_{ct,sp}$ ) από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$f_{ct} = 0,50 f_{ct,fl} \quad (1.4.3)$$

$$f_{ct} = 0,90 f_{ct,sp} \quad (1.4.4)$$

## **ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ**

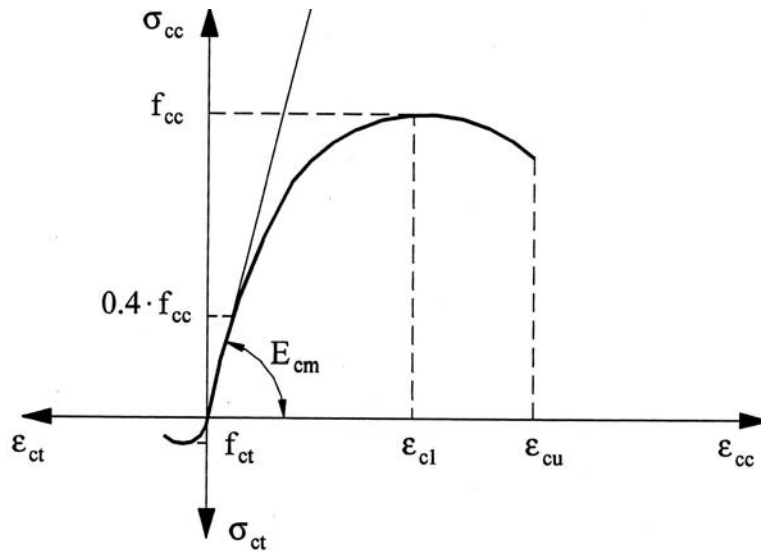
### **Διαγράμματα τάσεων - παραμορφώσεων**

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των συστατικών του σκυροδέματος και την ταχύτητα επιβολής των παραμορφώσεων, για συνήθεις περιπτώσεις, η τετμημένη της κορυφής του διαγράμματος κυμαίνεται μεταξύ -0,2% και -0,25%, η συμβατική παραμόρφωση θραύσης μεταξύ -0,35% και -0,7% και η τάση θραύσης μεταξύ  $M75 f_c$  και  $1,25 f_c$ .

Σχετικώς, υπενθυμίζεται ότι η κρίσιμη ανηγμένη παραμόρφωση του σκυροδέματος υπό εφελκυσμό έχει τιμή +0,02 έως +0,04%, δηλαδή περίπου ίση με την ελάχιστη τιμή της συστολής ξήρανσης (βλ. πίνακα 2.3). Έτσι, και μόνο η συστολή ξήρανσης θα μπορούσε να οδηγήσει σε ρηγμάτωση (ακόμη και έντονη ή εκτεταμένη).

Ο μελετητής μπορεί να χρησιμοποιεί αιτιολογημένως διάφορες μορφές του διαγράμματος τάσεων- παραμορφώσεων, ανάλογα με την φύση του έργου και με τις ειδικές απαιτήσεις της μελέτης. Για οικοδομικά έργα, κατάλληλα ιδεατά διαγράμματα περιέχονται στα αντίστοιχα Κεφάλαια του Κανονισμού.

Η γενική μορφή των διαγραμμάτων τάσεων- παραμορφώσεων παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.4.1.



**Σχήμα 1.4.1:** Σχηματικό διάγραμμα τάσεων- παραμορφώσεων σκυροδέματος ( c θλίψη, t εφελκυσμός).

### Μέτρο ελαστικότητας

Το επιβατικό μέτρο ελαστικότητας  $E_{cm}$  είναι η κλίση της ευθείας του διαγράμματος  $\sigma$ - $\epsilon$  που οδηγεί στο 40% της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος (βλ. Σχ. 1.4.1). Οι τιμές του Πίνακα (1.4.2) έχουν προκύψει βάσει της σχέσης:

$$E_{cm} = 9.50(f_{ck} + 8)^{1/3} \quad (1.4.5)$$

( $E_{cm}$  σε  $GPa$ ,  $f_{ck}$  σε  $MPa$ )

Ο πίνακας δίνει μέσες τιμές του επιβατικού μέτρου ελαστικότητας σε ηλικία 28 ημερών, δεδομένου ότι η  $f_{ck}$  δίνεται για ηλικία 28 ημερών.

Η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του μέσου επιβατικού μέτρου ελαστικότητας σε ηλικία  $t$  αν η αντοχή  $f_{ck}$  αναχθεί στην ηλικία  $t$ .

Οι τιμές του Πίνακα αντιστοιχούν σε περιπτώσεις κατά τις οποίες  $\sigma_c \cong 0.40f_{ck}$ .

Η μέση τιμή  $E_{cm}$  του επιβατικού μέτρου ελαστικότητας μπορεί να εκτιμηθεί βάσει της χαρακτηριστικής θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος, μέσω του πίνακα 1.4.2

$f_{ck}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$E_{cm}$	26	27.5	29	30.5	32	33.5	35	36	37

**Πίνακας 1.4.2** Επιβατικό μέτρο ελαστικότητας σε G3α

Σε περιπτώσεις κατά τις οποίες  $\sigma_c \cong 0.10 f_{ck}$  οι τιμές του Πίνακα μπορούν να αυξηθούν κατά 10%.

Το διάστημα εμπιστοσύνης του  $E_{cm}$  είναι πρακτικώς από  $0,70 E_{cm}$  μέχρι και  $1,30 E_{cm}$ .

### Λόγος Poisson

Στην περιοχή ελαστικών παραμορφώσεων ο λόγος του poisson λαμβάνεται ίσος με 0,20. Μπορεί να ληφθεί μηδέν (0) όταν επιτρέπεται η ρηγμάτωση του εφελκόμενου σκυροδέματος.

Για το λόγο του Poisson μπορεί να ληφθεί μία τιμή μεταξύ 0.00 και 0.20.

### Ερπυσμός και συστολής ξήρανσης

Οι τιμές του Πίνακα 1.4.3 ισχύουν για συνήθη σκυροδέματα (με συνήθη αδρανή και με μέση συνεκτικότητα) υπό θερμοκρασία περιβάλλοντος +10 έως +20° C.

Οι τιμές  $\varphi$  και  $\varepsilon_{cs}$  ισχύουν και για εποχιακές διακυμάνσεις της θερμοκρασίας (-10 έως +40° C) και της σχετικής υγρασίας (π.χ. +20° C).

Για οικοδομικά έργα μπορούν για τον τελικό συντελεστή ερπυσμού και την τελική συστολή ξήρανσης ( $t = \infty$ ), ως αντιπροσωπευτικές οι τιμές του πίνακα 1.4.3 εφόσον η τάση του σκυροδέματος δεν υπερβαίνει την τιμή  $0.50 f_{ck}$ .



$\phi(t_{\infty}, t_0)$						
Ηλικία $t_0$ τη στιγμή της φόρτισης (ημέρες)	Ιδεατό μέγεθος $2 \cdot A_c / u$ σε mm					
	50.	150	600	50	150	600
	Ξηρές ατμοσφαιρικές συνθήκες εσωτερικού χώρου (RH=50%)			Υγρές ατμοσφαιρικές συνθήκες υπαίθρου (RH=80%)		
1	5.50	4.60	3.70	3.60	3.20	2.90
7	3.90	3.10	2.60	2.60	2.30	2.00
28	3.00	2.50	2.00	1.90	1.70	1.50
90	2.40	2.00	1.60	1.50	1.40	1.20
365	1.80	1.50	1.20	1.10	1.00	1.00

$\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0) \cdot 10^3$			
Θέση του στοιχείου	Σχετική υγρασία (%)	Ιδεατό μέγεθος $2 \cdot A_c / u$ σε mm	
		$\leq 150$	$\geq 600$
Εσωτερικός χώρος	50	-0.60	-0.50
Υπαίθριος	80	-0.33	-0.28

RH = σχετική υγρασία.  
 $A_c$  είναι το εμβαδόν της διατομής του στοιχείου και  $u$  είναι η περίμετρος της διατομής σε επαφή με την ατμόσφαιρα.  
 Στην περίπτωση κιβωτοειδούς διατομής ή διατομής με διάκενα της οποίας το εσωτερικό συγκοινωνεί με την ελεύθερη ατμόσφαιρα, το  $u$  θα περιλαμβάνει και την εσωτερική περίμετρο.  
 Για ενδιάμεσα μεγέθη, μεταξύ 150 και 600 mm, μπορεί να γίνεται γραμμική παρεμβολή στις τιμές του Πίνακα.

**Πίνακας 1.4.3** Τελικές τιμές του συντελεστή ερπυσμού  $\phi(t_{\infty}, t_0)$  και της συστολής ξήρανσης  $\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0)$  σκυροδέματος

Αυτή η παραδοχή οδηγεί στη σχέση:

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_{c0}}{E_{c28}} \phi(t, t_0) \quad (1.4.6)$$

Όπου:

$t_0$  ηλικία του σκυροδέματος τη στιγμή έναρξης της φόρτισης

$\epsilon_{cc}(t, t_0)$  ερπυστική παραμόρφωση τη στιγμή  $t (>t_0)$

$\sigma_{c0}$  σταθερή τάση που εφαρμόζεται τη στιγμή  $t_0$

$E_{c28}$  μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας του σκυροδέματος σε ηλικία 28 ημερών (πίνακας 1.4.2)

$\phi(t, t_0)$  συντελεστής ερπυσμού τη στιγμή  $t (>t_0)$ .

Σημαντικές αποκλίσεις από την παραδοχή αυτή παρατηρούνται όταν οι μεταβολές της τάσης συνοδεύονται από μείωση παραμορφώσεων (π.χ. σε περίπτωση αποφόρτισης).

Για τάσεις  $\sigma_c < 0.50 f_{ck}$ , γίνονται οι εξής παραδοχές:

- Οι ερπυστικές παραμορφώσεις συνδέονται γραμμικά με τις τάσεις.

- Όταν η επιβαλλόμενη τάση μεταβάλλεται κατά διαστήματα, οι ερπυστικές παραμορφώσεις που αντιστοιχούν στο διάστημα επιβολής κάθε τιμής της τάσης προστίθενται.

### **Συντελεστής θερμικής διαστολής**

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής του σκυροδέματος μπορεί να λαμβάνεται ίσος με  $10 \cdot 10^{-6}$  ανά ο C.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.

### Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

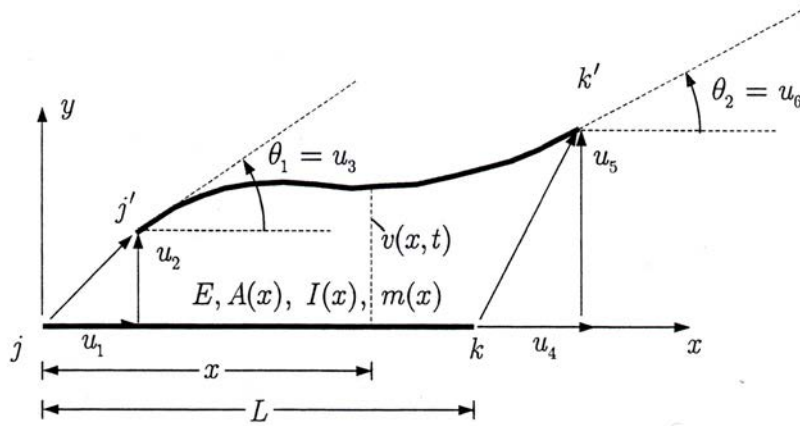
#### 2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

Θεωρούμε ένα στοιχείο επίπεδου πλαισίου μεταβλητής διατομής  $A(x)$ , ροπής αδρανείας  $I(x)$  και μέτρου ελαστικότητας  $E$ , του οποίου ο τοπικός άξονας στην απαραμόρφωτη κατάσταση ταυτίζεται με τον άξονα  $x$ . Τα άκρα  $j, k$  του στοιχείου είναι οι κόμβοι του στοιχείου, τα δε μεγέθη που αναφέρονται σ' αυτά είναι τα επικόμβια ή κομβικά μεγέθη. Στη παραμορφωμένη κατάσταση τη χρονική στιγμή  $t$  τα άκρα του στοιχείου  $j, k$  μετατοπίζονται στις θέσεις  $j', k'$  και το στοιχείο καταλαμβάνει τη θέση  $j'k'$  (Σχ.2.1.1). Το στοιχείο εκτός από τη αξονική παραμόρφωση υφίσταται και καμπτική παραμόρφωση συνεπεία των εγκάρσιων μετατοπίσεων και των στροφών των ακραίων του.

Το στοιχείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας, τις μετατοπίσεις  $u_1(t), u_2(t)$  και τη στροφή  $\theta_1 = u_3$  του κόμβου  $j$  ως επίσης τις  $u_4(t), u_5(t)$  μετατοπίσεις και τη στροφή  $\theta_2 = u_6$  του κόμβου  $k$ . Τα έξι αυτά μεγέθη αποτελούν κομβικές συντεταγμένες του στοιχείου επίπεδου πλαισίου. Τα σημεία  $x$  του άξονα του στοιχείου υφίστανται δύο μετατοπίσεις. Την αξονική μετατόπιση  $u(x,t)$  και την εγκάρσια  $v(x,t)$ . Θεωρούμε το στοιχείο ως γενικευμένο σύστημα και εφαρμόζουμε τη μέθοδο Ritz. Έτσι για το στοιχείο επίπεδου δικτυώματος θέτουμε την αξονική μετατόπιση υπό τη μορφή

$$u(x,t) = u_1\psi_1(x) + u_4\psi_4(x) \quad (2.1.1)$$

όπου  $\psi_1(x)$  και  $\psi_4(x)$  είναι συναρτήσεις σχήματος που εκφράζουν την αξονική παραμόρφωση για  $u_1=1, u_4=0$  και  $u_1=0, u_4=1$ , αντίστοιχως. Οι συναρτήσεις  $\psi_1(x)$  και  $\psi_4(x)$  για στοιχείο σταθερής διατομής είναι



**Σχήμα 2.1.1** Βαθμοί ελευθερίας στοιχείου επιπέδου πλαισίου

$$\psi_1(x) = 1 - \xi \quad (2.1.2a)$$

$$\psi_4(x) = \xi \quad (2.1.2b)$$

Όπου  $\xi = x/L$

Την εγκάρσια μετατόπιση μπορούμε να θέσουμε υπό τη μορφή

$$u(x,t) = u_2\psi_2(x) + u_3\psi_3(x) + u_5\psi_5(x) + u_6\psi_6(x) \quad (2.1.3)$$

όπου  $\psi_1(x)$  είναι συναρτήσεις σχήματος που εκφράζουν την ελαστική γραμμή του στοιχείου για  $u_i=1$ , όταν  $u_j=0$ ,  $j \neq i$ . Ο προσδιορισμός τους μπορεί να γίνει από την επίλυση των προβλημάτων κάμψεως δοκού. Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότερη θεώρηση, δεχόμαστε ότι για τη δική ισχύουν οι παραδοχές Bernoulli. Έτσι, η εγκάρσια παραμόρφωση θα προκύψει μόνο από έργα εκ κάμψεως. Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής σ' αυτή την περίπτωση, χωρίς εξωτερική φόρτιση, είναι

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI(x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \right) = 0 \quad (2.1.4)$$

όπου  $I_{(x)}$  είναι η μεταβλητή ροπή αδρανείας της διατομής

Η λύση της (2.1.4) θα προκύψει με διαδοχικές ολοκληρώσεις. Η λύση αυτή, αν και δίδει συναρτήσεις σχήματος που εκφράζουν την ακριβή στατική ελαστική γραμμή, δεν προσφέρεται για την αυτοματοποίηση της μεθόδου, αφού για στοιχεία με διαφορετικό νόμο μεταβολής της διατομής θα πρέπει να προσδιορίζονται διαφορετικές συναρτήσεις σχήματος. Τη δυσχέρεια αυτή ξεπερνάμε, εάν δεχθούμε τις ίδιες συναρτήσεις σχήματος ανεξαιρέτως για όλα τα στοιχεία και μάλιστα αυτές που προκύπτουν από τη σχέση (2.1.4) για σταθερή διατομή. Στην περίπτωση αυτή η λύση δίδεται από το κυβικό πολυώνυμο

$$\psi(x) = c_1 \frac{x^3}{3} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (2.1.5)$$

και η παραγωγός της

$$\psi'(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (2.1.6)$$

Οι συντελεστές υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για κάθε μία από τις  $\psi_i(x)$   $i = 2, 3, 5, 6$

Συγκεκριμένα:

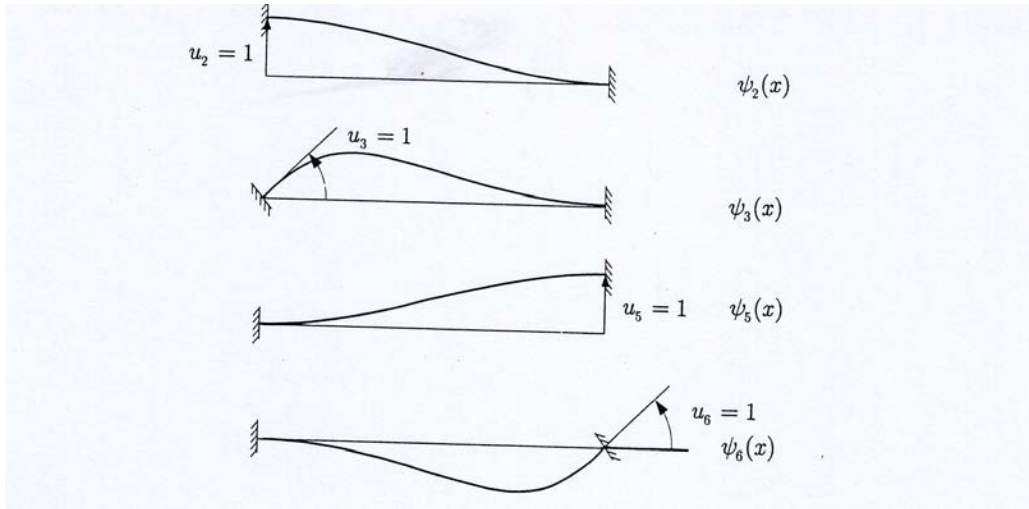
$$\text{Η } \psi_2(x) \text{ προκύπτει για } \psi_2(0) = 1, \psi'_2(0) = 0, \psi_2(L) = 0, \psi'_2(L) = 0 \quad (2.1.7a)$$

$$\text{Η } \psi_3(x) \text{ προκύπτει για } \psi_3(0) = 0, \psi'_3(0) = 1, \psi_3(L) = 0, \psi'_3(L) = 0 \quad (2.1.7b)$$

$$\text{Η } \psi_5(x) \text{ προκύπτει για } \psi_5(0) = 0, \psi'_5(0) = 0, \psi_5(L) = 1, \psi'_5(L) = 0 \quad (2.1.7c)$$

$$\text{Η } \psi_6(x) \text{ προκύπτει για } \psi_6(0) = 0, \psi'_6(0) = 0, \psi_6(L) = 0, \psi'_6(L) = 1 \quad (2.1.7d)$$

Η διαδικασία αυτή δίδει



**Σχήμα 2.1.2** Συναρτήσεις σχήματος της καμπτικής παραμορφώσεως

$$\psi_2(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (2.1.8a)$$

$$\psi_3(x) = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (2.1.8b)$$

$$\psi_5(x) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (2.1.8c)$$

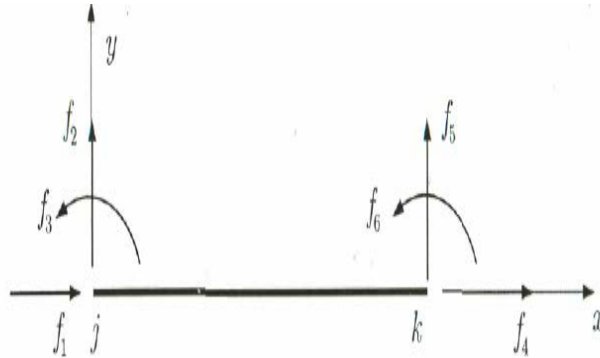
$$\psi_6(x) = L(-\xi^2 + \xi^3) \quad (2.1.8d)$$

όπου  $\xi = x/L$

Τα κυβικά πολυώνυμα των εξισώσεων (2.1.7) είναι γνωστά ως Ερμιτιανά πολυώνυμα. Η γραφική παράστασή τους φαίνεται στο Σχ. 2.1.2. Ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού σταθερής διατομής. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις σχήματος στοιχείου μεταβλητής διατομής, αρκεί τα στοιχεία να είναι μικρά. Η ακρίβεια της λύσεως βελτιώνεται με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων.

Οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις του στοιχείου θα προκύψουν με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για το στοιχείο δικτύματος. Δέον να υπενθυμίσουμε εδώ ότι, αντίθετα με την κλασική σήμανση, οι επικόμβιες δράσεις είναι θετικές, όταν είναι ομόφορες με τους άξονες που αναφέρονται. Στο Σχ. 2.1.3 δηλώνονται οι θετικές φορές των επικόμβιων

δράσεων. Οι δράσεις κατά τις διευθύνσεις των συντεταγμένων  $u_1, u_2, u_4$  και  $u_5$ , είναι δυνάμεις, ενώ κατά τις διευθύνσεις των  $u_3$  και  $u_6$  είναι ροπές.



**Σχήμα 2.1.3** Θετική σήμανση επικόμβιων δράσεων στοιχείου επιπέδου πλαισίου.

## 2.2 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΑΚΑΜΨΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Η ελαστική ενέργεια οφείλεται αφενός στην αξονική παραμόρφωση του στοιχείου, ήτοι

$$u_a = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) [u'(x,t)]^2 dx \quad (2.2.1)$$

και αφετέρου στην καμπτική παραμόρφωση του στοιχείου, ήτοι

$$u_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [u''(x,t)]^2 dx \quad (2.2.2)$$

Άρα

$$\begin{aligned} u &= u_a + u_b \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) [u'(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [u''(x,t)]^2 dx \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

η οποία χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.1.1) και (2.1.3) δίδει

$$(u_1, u_2, \dots, u_6) = \frac{1}{2} \int_0^L EA(x) [u_1 \psi'_1(x) + u_4 \psi'_4(x)]^2 dx \quad (2.2.4)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [u_2 \psi''_2(x) + u_3 \psi''_3(x) + u_5 \psi''_5(x) + u_6 \psi''_6(x)]^2 dx$$

Οι επικόμβιες ελαστικές δυνάμεις λαμβάνονται με παραγωγή της ανωτέρω σχέσεως ως προς  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . Επομένως έχουμε

$$f_{s_1} = \frac{\partial U}{\partial u_1} = k_{11}u_1 + k_{14}u_4 \quad (2.2.5a)$$

$$f_{s_2} = \frac{\partial U}{\partial u_2} = k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 \quad (2.2.5b)$$

$$f_{s_3} = \frac{\partial U}{\partial u_3} = k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{35}u_5 + k_{36}u_6 \quad (2.2.5c)$$

$$f_{s_4} = \frac{\partial U}{\partial u_4} = k_{41}u_1 + k_{44}u_4 \quad (2.2.5d)$$

$$f_{s_5} = \frac{\partial U}{\partial u_5} = k_{52}u_2 + k_{53}u_3 + k_{55}u_5 + k_{56}u_6 \quad (2.2.5e)$$

$$f_{s_6} = \frac{\partial U}{\partial u_6} = k_{62}u_2 + k_{63}u_3 + k_{65}u_5 + k_{66}u_6 \quad (2.2.5f)$$

όπου

$$k_{ij} = \int_0^L EA(x) \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx, \quad i, j = 1, 4 \quad (2.2.6a)$$

$$k_{ij} = \int_0^L EI(x) \psi''_i(x) \psi''_j(x) dx, \quad i, j = 2, 3, 5, 6 \quad (2.2.6b)$$

Οι σχέσεις (2.2.4) γράφονται υπό μητρική μορφή ως

$$\begin{Bmatrix} f_{s_1} \\ f_{s_2} \\ f_{s_3} \\ f_{s_4} \\ f_{s_5} \\ f_{s_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ & k_{52} & k_{53} & & k_{55} & k_{56} \\ & k_{62} & k_{63} & & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$



ή

$$f^e s = k^e u^e \quad (2.2.8)$$

όπου  $f^e s = k^e u^e$  είναι αντιστοίχως το διάνυσμα των επικόμβιων ελαστικών δυνάμεων και των κομβικών μετατοπίσεων και  $k^e$  το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου  $e$  του δικτύωματος. Το  $k^e$  άρα ορίζεται ως

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ & k_{52} & k_{53} & & k_{55} & k_{56} \\ & k_{62} & k_{63} & & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

Για στοιχείο με σταθερή διατομή,  $A(x) = A$ ,  $I(x) = I$ , οι σχέσεις ολοκληρώνονται αναλυτικά και δίδει

$$k^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EI}{L} & 0 & 0 & \frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

Στην ανώτερη σχέση παραλείφθηκε ο δείκτης  $e$  από τα μεγέθη  $A^e$  και  $I^e$  χάριν απλουστεύσεως των εκφράσεων.

### 2.3 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΜΑΖΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Όπως για το δικτύωμα, έτσι και για το πλαίσιο οι ισοδύναμες αδρανειακές δυνάμεις προκύπτουν με δύο διαφορετικές παραδοχές κατανομής της μάζας του στοιχείου, την παραδοχή συνεχούς κατανομής της μάζας μέσα στο στοιχείο και την παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών στους κόμβους του. Τα μητρώα μάζας που προκύπτουν και από τις δύο αυτές παραδοχές παρουσιάζουμε αμέσως κατωτέρω.

#### (α) Παραδοχή συνεχούς κατανομής μάζας.

Κατά την κίνηση η στοιχειώδης μάζα  $m(x) dx$  υφίσταται δύο μετατοπίσεις, τις  $u(x,t)$  και  $U(x,t)$ . Επομένως η κινητική ενέργεια του στοιχείου θα δίδεται από την έκφραση

$$k = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left\{ [\dot{u}(x,t)]^2 + [\dot{U}(x,t)]^2 \right\} dx \quad (2.3.1)$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1.2) γίνεται

$$k(u_1, u_2, \dots, u_6) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ [u_1 \psi_1(x) + u_4 \psi_4(x)]^2 \right] dx \quad (2.3.2)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [u_2 \psi_2(x) + u_3 \psi_3(x) + u_5 \psi_5(x) + u_6 \psi_6(x)]^2 dx$$

Οι αδρανειακές δυνάμεις για  $q_i = u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . δίνουν:

$$f_{I1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_1} = m_{11} \ddot{u}_1 + m_{14} \ddot{u}_4 \quad (2.3.3a)$$

$$f_{I2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_2} = m_{22} \ddot{u}_2 + m_{23} \ddot{u}_3 + m_{25} \ddot{u}_5 + m_{26} \ddot{u}_6 \quad (2.3.3b)$$

$$f_{I3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_3} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_3} = m_{32} \ddot{u}_2 + m_{33} \ddot{u}_3 + m_{35} \ddot{u}_5 + m_{36} \ddot{u}_6 \quad (2.3.3c)$$

$$f_{I4} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_4} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_4} = m_{41} \ddot{u}_1 + m_{44} \ddot{u}_4 \quad (2.3.3d)$$

$$f_{I5} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_5} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_5} = m_{52} \ddot{u}_2 + m_{53} \ddot{u}_3 + m_{55} \ddot{u}_5 + m_{56} \ddot{u}_6 \quad (2.3.3e)$$

$$f_{I6} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_6} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_6} = m_{62} \ddot{u}_2 + m_{63} \ddot{u}_3 + m_{65} \ddot{u}_5 + m_{66} \ddot{u}_6 \quad (2.3.3f)$$

Όπου

$$m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad j=1,4 \text{ και } i,j=2,3,5,6 \quad (2.3.4)$$

Οι σχέσεις (2.3.3) γράφονται υπό μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ f_{I3} \\ f_{I4} \\ f_{I5} \\ f_{I6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{62} & m_{63} & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{f}_I^e = \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{u}}^e \quad (2.3.6)$$

όπου  $\mathbf{f}_I^e$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^e$  είναι αντιστοίχως το διάνυσμα των επικόμβιων αδρανειακών δυνάμεων και των επικόμβιων επιταχύνσεων και  $\mathbf{m}^e$  το μητρώο μάζας του στοιχείου  $e$  του δικτύωματος. Το  $\mathbf{m}^e$  άρα ορίζεται ως

$$\mathbf{m}^e = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & 0 & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & m_{62} & m_{63} & 0 & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

Για στοιχείο με σταθερή διατομή είναι  $m(x) = \bar{m}$  οι σχέσεις (2.3.4) ολοκληρώνονται αναλυτικά και το μητρώο μάζας (2.3.7) γίνεται

$$\mathbf{m}^e = \frac{m^e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

όπου  $m^e = \bar{m}^e L^e$  είναι η ολική μάζα του στοιχείου  $e$ .

Κατά την εξαγωγή του μητρώου μάζας χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες συναρτήσεις σχήματος με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση του μητρώου ακαμψίας. Το μητρώο μάζας που προκύπτει με αυτό τον τρόπο ονομάζεται συμβατό μητρώο μάζας.

### (b) Παραδοχή συγκεντρωμένων μαζών.

Η μάζα του στοιχείου συγκεντρώνεται στους κόμβους του με στατική θεώρηση, δηλαδή κατανέμεται ως αντιδράσεις αμφιέριστης δοκού με φορτίο  $m(x)$  όπως ακριβώς δεχθήκαμε για το στοιχείο δικτύωματος. Έτσι έχουμε

$$m_1 = \int_0^L m(x)(1-\xi)dx \quad (2.3.9a)$$

$$m_2 = \int_0^L m(x)\xi dx \quad (2.3.9b)$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του στοιχείου θα δίδεται από την έκφραση

$$k = \frac{1}{2}m_1(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{u}_4^2 + \dot{u}_5^2) \quad (2.3.10)$$

Οι σχέσεις για  $q_i = u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ . δίδουν

$$f_{11} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_1} = m_{11} \ddot{u}_1 \quad (2.3.11a)$$

$$f_{12} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_2} = m_{22} \ddot{u}_2 \quad (2.3.11b)$$

$$f_{I3} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_3} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_3} = 0 \quad (2.3.11c)$$

$$f_{I4} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_4} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_4} = m_{44} \ddot{u}_4 \quad (2.3.11d)$$

$$f_{I5} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_5} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_5} = m_{55} \ddot{u}_5 \quad (2.3.11e)$$

$$f_{I6} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_6} \right) - \frac{\partial K}{\partial u_6} = 0 \quad (2.3.11f)$$

όπου

$$m_{11} = m_{22} = m_1, \quad m_{44} = m_{55} = m_2 \quad (2.3.12)$$

Οι σχέσεις (2.3.11) γράφονται υπό μητρωϊκή μορφή ως

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ f_{I3} \\ f_{I4} \\ f_{I5} \\ f_{I6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \\ \ddot{u}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3.13)$$

Για στοιχείο με σταθερή διατομή είναι  $m(x) = \bar{m}$  και οι (2.3.9) δίδουν

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = \bar{m} L^e / 2 \quad (2.3.14)$$

και το μητρώο μάζας (2.3.13) γίνεται

$$\mathbf{m}^e = \frac{m^e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.15)$$

$$\text{όπου } m^e = \bar{m} L^e / 2 \quad (2.3.16)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση συγκεντρωμένων μαζών το μητρώο μάζας προκύπτει διαγώνιο.

## 2.4 ΕΠΙΚΟΜΒΙΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΟ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Θεωρούμε ότι η απόσβεση είναι μόνο εσωτερική. Ως εκ τούτου οφείλεται στην παραμόρφωση του στοιχείου του πλαισίου, ανθίσταται σ' αυτή και εξαρτάται από την ταχύτητα της ανηγμένης παραμορφώσεως. Εάν παραστήσουμε με  $\sigma_D$  την προκαλούμενη τάση λόγω αποσβέσεως, μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma_D = C_s \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \quad (2.4.1)$$

Όπου  $C_s$  είναι ο συντελεστής της εσωτερικής αποσβέσεως και  $\varepsilon_x$  είναι η ανηγμένη αξονική παραμόρφωση.

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων αποσβέσεως του στοιχείου θα είναι

$$\delta W_{nc}^{in} = - \int_V \sigma_D d\varepsilon_x dV \quad (2.4.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη από τη τεχνική θεωρία κάμψεως της δοκού ότι

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \sigma_x = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M(x)}{I(x)} y, \quad N(x) = EA(x)u',$$

$$M(x) = -EIu''(x,t) \quad (2.4.3)$$

η ανωτέρω σχέση δίδει

$$\delta W_{nc} = - \int_0^L c_s A(x) \dot{u}'(x,t) \delta u'(x,t) dx - \int_0^L c_s I(x) \dot{u}''(x,t) \delta u''(x,t) dx \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned}
 \delta W_{nc} &= -\int_0^L c_s A(x) [\dot{u}_1 \psi_1'(x) + \dot{u}_4 \psi_4'(x)] \delta [u_1 \psi_1'(x) + u_4 \psi_4'(x)] dx \\
 &\quad -\int_0^L c_s I(x) [\dot{u}_2 \psi_2'(x) + \dot{u}_3 \psi_3'(x) + \dot{u}_5 \psi_5'(x) + \dot{u}_6 \psi_6'(x)] \\
 &\quad \delta [u_2 \psi_2'(x) + u_3 \psi_3'(x) + u_5 \psi_5'(x) + u_6 \psi_6'(x)] \\
 &= -(c_{11} \dot{u}_1 + c_{44} \dot{u}_4) \delta u_1 - (c_{41} \dot{u}_1 + c_{44} \dot{u}_4) \delta u_4 \\
 &\quad - (c_{22} \dot{u}_2 + c_{23} \dot{u}_3 + c_{25} \dot{u}_5 + c_{26} \dot{u}_6) \delta u_2 \\
 &\quad - (c_{32} \dot{u}_2 + c_{33} \dot{u}_3 + c_{35} \dot{u}_5 + c_{36} \dot{u}_6) \delta u_3 \\
 &\quad - (c_{52} \dot{u}_2 + c_{53} \dot{u}_3 + c_{55} \dot{u}_5 + c_{56} \dot{u}_6) \delta u_5 \\
 &\quad - (c_{62} \dot{u}_2 + c_{63} \dot{u}_3 + c_{65} \dot{u}_5 + c_{66} \dot{u}_6) \delta u_6
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.1.1)

$$c_{ij} = \int_0^L C_s A(x) \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx \quad , \quad i, j = 1, 4 \tag{2.4.6a}$$

$$c_{ij} = \int_0^L c_s I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad , \quad i, j = 2, 3, 5, 6 \tag{2.4.6b}$$

Οι δυνάμεις αποσβέσεως δίνουν

$$f_{D1} = -Q_1 = c_{11} \dot{u}_1 + c_{14} \dot{u}_4 \tag{2.4.7a}$$

$$f_{D2} = -Q_2 = c_{22} \dot{u}_2 + c_{23} \dot{u}_3 + c_{25} \dot{u}_5 + c_{26} \dot{u}_6 \tag{2.4.7b}$$

$$f_{D3} = -Q_3 = c_{32} \dot{u}_2 + c_{33} \dot{u}_3 + c_{35} \dot{u}_5 + c_{36} \dot{u}_6 \tag{2.4.7c}$$

$$f_{D4} = -Q_4 = c_{41} \dot{u}_1 + c_{44} \dot{u}_4 \tag{2.4.7d}$$

$$f_{D5} = -Q_5 = c_{52} \dot{u}_2 + c_{53} \dot{u}_3 + c_{55} \dot{u}_5 + c_{56} \dot{u}_6 \tag{2.4.7e}$$

$$f_{D6} = -Q_6 = c_{62} \dot{u}_2 + c_{63} \dot{u}_3 + c_{65} \dot{u}_5 + c_{66} \dot{u}_6 \tag{2.4.7f}$$

Το αρνητικό πρόσημο στις ανωτέρω σχέσεις οφείλεται στο γεγονός ότι οι  $f_{Di}$  μεταφέρονται στο αριστερό μέλος των εξισώσεων κινήσεως, δηλαδή λαμβάνονται ομόφορες των  $f_{fi}$  και  $f_{si}$ .

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ f_{D3} \\ f_{D4} \\ f_{D5} \\ f_{D6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & c_{26} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & c_{53} & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{62} & c_{63} & 0 & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{u}_5 \\ \dot{u}_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4.8)$$

ή

$$\mathbf{f}_D^e = \mathbf{c}^e \dot{\mathbf{u}}^e \quad (2.4.9)$$

όπου  $\mathbf{f}_D^e, \dot{\mathbf{u}}^e$  είναι αντιστοίχως το διάνυσμα των επικόμβιων δυνάμεων αποσβέσεως και των επικόμβιων ταχυτήτων και  $\mathbf{C}^e$  το μητρώο αποσβέσεως του στοιχείου  $e$  του δικτύωματος. Το  $\mathbf{C}^e$  άρα ορίζεται ως

$$\mathbf{c}^e = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & c_{26} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & c_{53} & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & c_{62} & c_{63} & 0 & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

Για στοιχείο με σταθερή διατομή οι σχέσεις (2.4.6) ολοκληρώνονται αναλυτικά και η (2.4.10) γίνεται



$$\mathbf{e}^e = \begin{bmatrix} \frac{c_s A}{c_s} & 0 & 0 & -\frac{c_s A}{c_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12c_s I}{L^3} & \frac{6c_s I}{L^2} & 0 & -\frac{12c_s I}{L^3} & \frac{6c_s I}{L^2} \\ 0 & \frac{6c_s I}{L^2} & \frac{4c_s I}{L} & 0 & -\frac{6c_s I}{L^2} & \frac{2c_s I}{L} \\ -\frac{c_s I}{L} & 0 & 0 & \frac{c_s I}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12c_s I}{L^3} & -\frac{6c_s I}{L^2} & 0 & \frac{12c_s I}{L^3} & -\frac{6c_s I}{L^2} \\ 0 & \frac{6c_s I}{L^2} & \frac{2c_s I}{L} & 0 & -\frac{6c_s I}{L^2} & \frac{4c_s I}{L} \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

Οι ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις μπορεί να υπολογισθούν με δύο τρόπους, (α) ως γενικευμένες δυνάμεις κατά τις διευθύνσεις των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου  $u$  και (β) ως στατικά ισοδύναμες δυνάμεις. Στην πρώτη περίπτωση χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις σχήματος του μητρώου ακαμψίας και το προκύπτον διάνυσμα των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων ονομάζεται συμβατό.

Συμβατό διάνυσμα ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων.

Το δυνατό έργο που παράγεται κατά την αξονική μετατόπιση είναι

$$\delta W_{nc}^p = \int_0^L p_x(x,t) \delta u(x,t) dx + \int_0^L p_y(x,t) \delta u(x,t) dx \quad (2.4.12)$$

Η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (2.1.1) και (2.1.3) δίδει

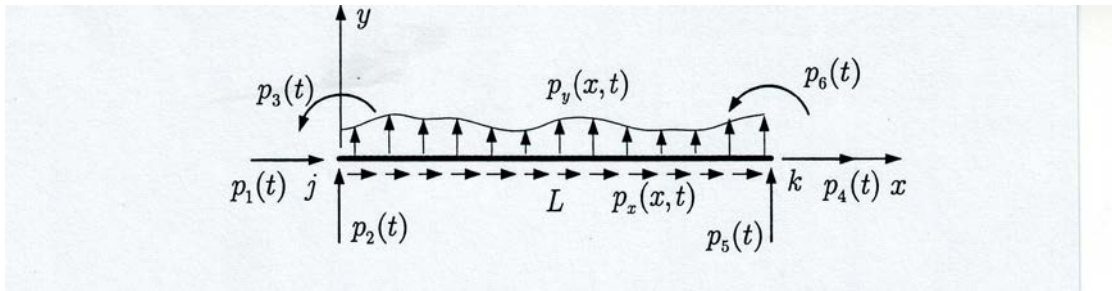
$$\delta W_{nc}^p = p_1(t) \delta u_1 + p_2(t) \delta u_2 + p_3(t) \delta u_4 + p_4(t) \delta u_4 + p_5(t) \delta u_5 + p_6(t) \delta u_6 \quad (2.4.13)$$

Όπου τέθηκε

$$p_i(t) = \int_0^L p_x(x,t) \psi_i(x) dx \quad , \quad i = 1, 4 \quad (2.4.14a)$$

$$p_i(t) = \int_0^L p_y(x,t) \psi_i(x) dx \quad , \quad i = 2, 3, 5, 6 \quad (2.4.14b)$$

Επομένως το διάνυσμα των ισοδύναμων επικόμβιων εξωτερικών δράσεων του στοιχείου  $e$  προκύπτει ως



Σχήμα 2.4.1 Φόρτιση στοιχείου επίπεδου πλαισίου

$$\mathbf{p}^e(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ p_6(t) \end{Bmatrix} \quad (2.4.15)$$

#### Στατικά ισοδύναμο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων

Στη περίπτωση αυτή αγνοείται η καμπτική παραμόρφωση του στοιχείου και η εγκάρσια μετατόπιση  $u(x,t)$  θεωρείται γραμμική, όπως στο δικτύωμα, και δίδεται από τη σχέση

$$u(x,t) = u_2\psi_2(x) + u_5\psi_5(x) \quad (2.4.16)$$

Όπου τώρα  $\psi_2(x) = \psi_1(x) = 1 - \xi$ ,  $\psi_5(x) = \psi_4(x) = \xi$  και η (2.4.12) γίνεται

$$\delta W_{nc}^p = p_1(t)\delta u_1 + p_2(t)\delta u_2 + p_4(t)\delta u_4 + p_5(t)\delta u_5 \quad (2.4.17)$$

$$p_i(t) = \int_0^L p_x(x,t)\psi_i(x)dx, i = 1,4 \quad (2.4.18a)$$

$$p_i(t) = \int_0^L p_y(x,t)\psi_i(x)dx, i = 2,5 \quad (2.4.18b)$$

Επομένως

$$\mathbf{p}^e(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ 0 \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.4.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των συναρτήσεων σχήματος στις (2.4.18) λαμβάνουμε

$$p_1(t) = \int_0^L p_x(x,t)(1-\xi)dx, \quad p_4(t) = \int_0^L p_x(x,t)\xi dx \quad (2.4.20)$$

$$p_2(t) = \int_0^L p_y(x,t)(1-\xi)dx, \quad p_5(t) = \int_0^L p_y(x,t)\xi dx \quad (2.4.21)$$

δηλαδή οι επικόμβιες δράσεις λαμβάνονται ως αντιδράσεις αμφιέριστης δοκού με φορτία  $p_x(x,t)$  και  $p_y(x,t)$ . Απ' αυτό προκύπτει η ονομασία στατικά ισοδύναμες επικόμβιες δράσεις. Οι επικόμβιες δράσεις που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο είναι λιγότερο ακριβείς, επειδή η εγκάρσια μετατόπιση προσεγγίζεται με γραμμικό πολυώνυμο, αντί του κυβικού πρώτου βαθμού. Οι γραμμικές συναρτήσεις σχήματος για το καμπτόμενο στοιχείο δεν είναι γραμμικά αποδεκτές, έτσι παραβιάζονται οι συνθήκες ισχύος της μεθόδου Ritz. Παρά ταύτα, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων είναι αποδεκτή, ιδίως όταν τα στοιχεία είναι μικρά. Το στατικά ισοδύναμο διάνυσμα των επικόμβιων δράσεων είναι ιδιαίτερος χρήσιμο, όταν αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις κατά του στροφικού βαθμούς ελευθερίας, όπως συμβαίνει στη περίπτωση συγκεντρωμένων μαζών.

## 2.5 ΣΤΑΤΙΚΗ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗ. ΑΝΑΓΩΓΗ GUYAN

Συχνά οι αδρανειακές δυνάμεις κατά τις διευθύνσεις ορισμένων συντεταγμένων είναι μικρές και μπορούμε να τις παραλείψουμε μειώνοντας έτσι σημαντικά τον αριθμό των εξισώσεων κινήσεως που πρέπει να επιλύσουμε. Η περίπτωση αυτή είναι συνήθης στη μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων, όπου η κινητική ενέργεια των στρωφικών βαθμών ελευθερίας είναι μικρή σε σύγκριση με εκείνη των μεταφορικών βαθμών.

Εάν αναδιατάξουμε το διάνυσμα των μετατοπίσεων έτσι ώστε μετά τον επιμερισμό το διάνυσμα να περιλαμβάνει τους μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας και τους στρωφικούς και λάβουμε υπόψη ότι το μητρώο μάζας είναι διαγώνιο, μπορούμε να γράψουμε τη εξίσωση για  $C=0$  ως

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{t\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta t} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_t \\ \mathbf{p}_e \end{Bmatrix} \quad (2.5.1)$$

Όπου το διάνυσμα  $\mathbf{p}_e(t)$  περιλαμβάνει δράσεις (ροπές) που εφαρμόζονται απ' ευθείας στους κόμβους.

Εκτελώντας τις πράξεις η εξίσωση (2.5.1) δίδει

$$\mathbf{M}_{tt} \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}_{tt} \mathbf{u}_t + \mathbf{K}_{t\theta} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{p}_t(t) \quad (2.5.2^a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{u}_t + \mathbf{K}_{\theta\theta} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{p}_\theta(t) \quad (2.5.2b)$$

Η εξίσωση (2.5.2b) είναι οιονεί στατική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απαλοιφή του  $\mathbf{u}_\theta$  από τη (2.5.2a). Το μητρώο  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$  είναι τετραγωνικό και μπορεί να αντιστραφεί και επιλύοντας τη (2.5.2b) ως προς  $\mathbf{u}_\theta$  λαμβάνουμε

$$\mathbf{u}_\theta = \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} (\mathbf{p}_\theta(t) - \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{u}_t) \quad (2.5.3)$$

Και αντικαθιστώντας στη (2.5.2a) προκύπτει

$$\mathbf{M}_{tt} \ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}_{tt}^* \mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t^*(t) \quad (2.5.4)$$

Όπου

$$\mathbf{K}_{tt}^* = \mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{t\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \quad (2.5.5a)$$

$$\mathbf{p}_t^* = \mathbf{p}_t - \mathbf{K}_{t\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{p}_\theta \quad (2.5.5b)$$

Το μητρώο  $\mathbf{K}_t^*$  είναι το στατικά συμπτυκνωμένο μητρώο ακαμψίας και η ανωτέρω διαδικασία προσδιορισμού του ονομάζεται στατική συμπίκνωση. Προφανώς όταν  $\mathbf{p}_\theta = 0$ , έπεται  $\mathbf{p}_t^* = \mathbf{p}_t$ .

Την μείωση των βαθμών ελευθερίας μπορούμε να επιτύχουμε και όταν το μητρώο μάζας προκύπτει από συμβατά μητρώα μάζας των στοιχείων ή οι αδρανειακές δυνάμεις κατά τους στροφικούς βαθμούς ελευθερίας δεν είναι αμελητέες. Στην περίπτωση αυτή το μητρώο μάζας της εξίσωσης (2.5.1) έχει τη μορφή

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{t\theta} \\ \mathbf{M}_{\theta t} & \mathbf{M}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

Όπου  $\mathbf{M}_{t\theta} = \mathbf{M}_{\theta t} = \mathbf{M}_{\theta\theta} \neq 0$ . Περαιτέρω, όταν  $\mathbf{p}_\theta(t) = 0$  η σχέση (2.5.2b) δίδει

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{u}_t \quad (2.5.7)$$

Στην ανωτέρω σχέση οι  $\mathbf{u}_t$  θεωρούνται ανεξάρτητες συντεταγμένες ενώ οι  $\mathbf{u}_\theta$  εξαρτημένες. Κατόπιν τούτου μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \end{bmatrix} \mathbf{u}_t \quad (2.5.8)$$

ή

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{u}_t$$

όπου

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \end{bmatrix} \quad (2.5.9)$$

αποτελεί το μητρώο μετασχηματισμού των ανεξάρτητων συντεταγμένων  $\mathbf{u}_t$  στις  $\mathbf{u}$ .

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (2.5.9) η ελαστική ενέργεια γράφεται

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \mathbf{u}_t \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_t
 \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^* &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \\
 &= \mathbf{K}_{tt} - \mathbf{K}_{t\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t}
 \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Ομοίως η κινητική ενέργεια γράφεται

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \mathbf{u}_t \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_t^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_t
 \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}^* &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{tt} & \mathbf{M}_{t\theta} \\ \mathbf{M}_{\theta t} & \mathbf{M}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{M}_{tt} - \mathbf{M}_{t\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} + \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{M}_{\theta\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} - \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{M}_{\theta t}
 \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Όταν το  $\mathbf{M}$  είναι διαγώνιο είναι  $\mathbf{M}_{t\theta} = \mathbf{M}_{\theta t} = 0$  και

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{tt} + \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{M}_{\theta\theta} \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \tag{2.5.14}$$

Τέλος το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων γράφεται

$$\begin{aligned}
 \delta W^p &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}(t) \\
 &= \delta \mathbf{u}_t^T \mathbf{T}^T \mathbf{p}(t) \\
 &= \delta \mathbf{u}_t^T \mathbf{p}^*(t)
 \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Όπου

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^*(t) &= \mathbf{T}^T \mathbf{p}(t) \\
 &= \mathbf{p}_t(t) - \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{K}_{\theta t} \mathbf{p}_\theta(t)
 \end{aligned} \tag{2.5.16}$$

Η μείωση αυτή των βαθμών ελευθερίας είναι γνωστή ως αναγωγή Cuyan. Στην περίπτωση αυτή η ακαμψία της κατασκευής δεν επηρεάζεται, αφού στο ανηγμένο μητρώο ακαμψίας συμβάλλουν όλα τα στοιχεία του αρχικού μητρώου ακαμψίας. Τουναντίον, στο ανηγμένο, μητρώο μάζας εμφανίζονται συνδυασμοί των στοιχείων του μητρώου μάζας και του μητρώου ακαμψίας. Τούτο εισάγει προσεγγίσεις, η δε αξιοπιστία των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την επιλογή των βαθμών ελευθερίας που απαλείφονται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### 3.1 ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Στην περίπτωση των ελευθέρων ταλαντώσεων με απόσβεση το μητρώο  $C$  είναι διάφορο του μηδενός και η εξίσωση κινήσεως έχει τη μορφή

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (3.1.1)$$

Αμέσως κατωτέρω θα παρουσιάσουμε τη λύση του προβλήματος με τρεις τρόπους

Απ' ευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 2<sup>ης</sup> τάξεως

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$u = \beta e^{\lambda t} \quad (3.1.2)$$

η οποία αντικαθίσταται στη (3.1.1) και δίδει

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)\beta = 0 \quad (3.1.3)$$

Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί ομογενές σύστημα  $N$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και δίδει λύση  $\beta$  διάφορη του μηδενός αρκεί η ορίζουσα του μητρώου

$$S(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K \quad (3.1.4)$$

Να είναι μηδέν. Έτσι

$$\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \quad (3.1.5)$$



Το ανάπτυγμα της ορίζουσας είναι πολυώνυμο  $2N$  βαθμού ως προς  $\lambda$  και ο μηδενισμός του δίδει τη χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξισώσεως κινήσεως (3.1.1)

$$\Pi(\lambda) = \alpha_0 \lambda^{2N} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \dots + \alpha_{2N} = 0 \quad (3.1.6)$$

Το οποίο έχει  $2N$  ρίζες. Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί, επομένως οι ρίζες του θα είναι πραγματικές ή κατά ζεύγη μιγαδικές. Για κάθε τιμή του  $\lambda$  είναι αντιστοίχως πραγματική ή μιγαδική. Με την παραδοχή διακεκριμένων ριζών η γενική λύση της (3.1.1) λαμβάνεται ως επαλληλία

$$u = \sum_{n=1}^{2N} a_n \beta_n e^{\lambda_n t} \quad (3.1.7)$$

όπου  $a_n$  είναι  $2N$  αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Η απόκριση του συστήματος εξαρτάται από το είδος των ριζών. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

### (i) Πραγματικές ρίζες.

Έστω ότι η  $\lambda_n$  είναι πραγματική, η αντίστοιχη λύση (2.1.2) θα είναι

$$u_n = \beta_n e^{\lambda_n t} \quad (3.1.8)$$

Είναι φανερό ότι εάν  $\lambda_n > 0$  η λύση αποκλίνει εκθετικά, ενώ εάν  $\lambda_n < 0$  συγκλίνει εκθετικά. Και στις δύο περιπτώσεις το σύστημα δεν εκτελεί ταλαντώσεις.

Αν ρίζα  $\lambda_n$  παρουσιάζει πολλαπλότητα  $k$  η λύση (3.1.2) είναι

$$u_n = \beta_n (a_0 + a_1 t + \dots + t^{k-1}) e^{\lambda_n t} \quad (3.1.9)$$

Η οποία πάλι αποκλίνει ή συγκλίνει εκθετικά αν  $\lambda_n > 0$  ή  $\lambda_n < 0$ , αντιστοίχως και το σύστημα δεν εκτελεί ταλάντωση.

**(ii) Μιγαδικές ρίζες.**

Έστω ότι η  $\lambda_n$  είναι μιγαδική, τότε θα είναι ρίζα και η συζυγής μιγαδική  $\lambda_n$ .

Θέτουμε,  $\lambda_n = \mu_n + i\omega_n$  και  $\lambda_n = \mu_n - i\omega_n$

Τα αντίστοιχα διανύσματα  $\beta_n$  και  $\beta_n$  είναι επίσης συζυγή μιγαδικά και η συμβολή των δύο μαζί στη γενική λύση θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m &= a_n \beta_n e^{\lambda_n t} + a_n^* \overline{\beta_n} e^{\overline{\lambda_n} t} \\ &= e^{\mu_n t} (a_n \beta_n e^{i\omega_n t} + a_n^* \overline{\beta_n} e^{-i\omega_n t}) \\ &= e^{\mu_n t} [(a_n \beta_n + a_n^* \overline{\beta_n}) \cos \omega_n t + i(a_n \beta_n - a_n^* \overline{\beta_n}) \sin \omega_n t] \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Οι  $a_n$ ,  $a_n^*$  είναι αυθαίρετες σταθερές, επομένως μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι συζυγείς μιγαδικές, ήτοι

$$a_n = C_n + id_n \quad a_n^* = c_n - id_n \quad (3.1.11)$$

όπου  $c_n$  και  $d_n$  είναι επίσης αυθαίρετες σταθερές.

Επίσης θέτουμε

$$\beta_n = \mathbf{p}_n + i\mathbf{q}_n \quad \text{και} \quad \beta_n = \mathbf{p}_n - i\mathbf{q}_n \quad (3.1.12)$$

Η αντικατάσταση των (3.1.10) και (3.1.11) στη (3.1.12) δίδει

$$\mathbf{u}_m = 2e^{\mu_n t} [(c_n \mathbf{p}_n - d_n \mathbf{q}_n) \cos \omega_n t - (c_n \mathbf{q}_n + d_n \mathbf{p}_n) \sin \omega_n t] \quad (3.1.13)$$

Ο παράγοντας μέσα στη αγκύλη εκφράζει αρμονική ταλάντωση, της οποίας το εύρος αποκλίνει εκθετικά αν  $\mu_n > 0$ , ενώ φθίνει εκθετικά αν  $\mu_n < 0$ .

Τέλος αν  $\mu_n = 0$ , οι ρίζες είναι φανταστικές και το εύρος της ταλαντώσεως παραμένει σταθερό. Στα συστήματα που αντιμετωπίζουμε στη δυναμική των κατασκευών η απόσβεση είναι μικρή και η περίπτωση  $\mu_n < 0$  είναι η συνήθης. Η ταλάντωση με  $\mu_n > 0$  είναι γνωστή ως πτερυγισμός (flutter) η αρνητική απόσβεση. Η λύση λαμβάνεται ως επαλληλία των (3.1.13). Ήτοι

$$\mathbf{u} = \sum_{m=1}^N \mathbf{u}_m \quad (3.1.14)$$

Από τη σχέση (3.1.13) προκύπτει ότι οι φυσικές συνιστώσες του διανύσματος μετατοπίσεων είναι πραγματικές. Η σχέση (3.1.13) γράφεται

$$\begin{aligned}
 u_m = 2e^{u_n t} & \left[ \left( \begin{array}{c} p1_n \\ p2_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p i_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p N_n \end{array} \right) - d_n \left( \begin{array}{c} p1_n \\ p2_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p i_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p N_n \end{array} \right) \right] \cos \omega_n t - \left[ \begin{array}{c} q1_n \\ q2_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q i_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q N_n \end{array} \right) + d_n \left( \begin{array}{c} p1_n \\ p2_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p i_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p N_n \end{array} \right) \right] \sin \omega_n t \\
 = 2e^{u_n t} & \left\{ \begin{array}{c} p1_n \cos(\omega_n t - \theta 1_n) \\ p2_n \cos(\omega_n t - \theta 2_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p i_n \cos(\omega_n t - \theta i_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p N_n \cos(\omega_n t - \theta N_n) \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.15}$$

όπου

$$p_{in} = \sqrt{(c_n p_{in} - d_n q_{in})^2 + (c_n q_{in} + d_n p_{in})^2}
 \tag{3.1.16^a}$$

$$\theta_{in} = \tan^{-1} \left[ \frac{-(c_n q_{in} + d_n p_{in})}{c_n p_{in} - d_n q_{in}} \right]
 \tag{3.1.16b}$$

Από τη σχέση (3.1.16b) συνάγεται ότι οι μετατοπίσεις μέσα σε μία ιδιομορφή ταλαντώσεως έχουν διαφορετική φάση, εν αντιθέσει με τις ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, όπου αυτές βρίσκονται σε φάση.

### 3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Η επίλυση του προβλήματος των ελεύθερων ταλαντώσεων μπορεί να γίνει και με ένα άλλο τρόπο, ο οποίος βασίζεται στο θεώρημα του αναπτύγματος. Έτσι μπορούμε να παραστήσουμε το διάνυσμα των μετατοπίσεων ως

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi_1 Y_1(t) + \varphi_2 Y_2(t) + \dots + \varphi_N Y_N(t) \\ &= \Phi Y(t) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Η ανωτέρω σχέση μετασχηματίζει τις συνιστώσες του διανύσματος  $u = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N\}^T$  από το σύστημα με βάση  $e_1(1,0,\dots,0), e_1(0,1,\dots,0), \dots, e_N(0,0,\dots,1)$  στις  $Y = \{Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N\}^T$  στο σύστημα με βάση τις ιδιομορφές  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ . Οι συνιστώσες  $Y_n, n=1,2,\dots,N$  είναι γενικευμένες συντεταγμένες και ονομάζονται ιδιομορφικές ή κανονικές συντεταγμένες.

$$M(\Phi_1 \ddot{Y}_1 + \Phi_2 \ddot{Y}_2 + \dots + \Phi_N \ddot{Y}_N) + K(\Phi_1 Y_1 + \Phi_2 Y_2 + \dots + \Phi_N Y_N) = 0 \quad (3.2.2)$$

Ακολουθώντας την ανωτέρω σχέση προπολλαπλασιάζουμε και λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες ορθογωνικότητας  $\Phi_n^T M \Phi_j = 0$  και  $\Phi_n^T K \Phi_j = 0$  για  $n \neq j$  προκύπτει

$$\Phi_n^T M \Phi_n \ddot{Y}_n + \Phi_n^T K \Phi_n Y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.3)$$

Θέτοντας περαιτέρω

$$M_n = \Phi_n^T M \Phi_n \quad (3.2.4)$$

$$K_n = \Phi_n^T K \Phi_n \quad (3.2.5)$$

$$M_n \ddot{Y}_n + K_n Y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.6)$$

Τα μεγέθη  $M_n$  και  $K_n$  εκφράζουν αντιστοίχως, τη γενικευμένη μάζα και τη γενικευμένη ακαμψία της  $n$  ιδιομορφής και ονομάζονται ιδιομορφική μάζα

και ιδιομορφική ακαμψία. Λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\mathbf{K}\Phi_n = \omega_n^2 \mathbf{M}\Phi_n$  προκύπτει

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (3.2.7)$$

Και με την παρατήρηση ότι  $M_n \neq 0$  η (2.6.6) γίνεται

$$Y_n + \omega_n^2 Y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.8)$$

Ο μετασχηματισμός από τις φυσικές συντεταγμένες  $u_n$  στις ιδιομορφικές συντεταγμένες ανάγει το σύστημα των  $N$  συνεζευγμένων εξισώσεων κινήσεως σε  $N$  ασύζευκτες εξισώσεις μονοβάθμιου συστήματος.

$$Y_n = \frac{Y_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + Y_n(0) \cos \omega_n t, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.9)$$

Τα μεγέθη  $Y_n(0), \dot{Y}_n(0)$  αποτελούν τις αρχικές συνθήκες των μετασχηματισμένων εξισώσεων και προκύπτουν από τις δεδομένες αρχικές συνθήκες  $u(0), \dot{u}(0)$  σε φυσικές συντεταγμένες ως εξής.

Προπολλαπλασιάζουμε με  $\Phi_n^T \mathbf{M}$  και λαμβάνουμε

$$Y_n(t) = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u}(t)}{M_n} \quad \text{όπου } n=1,2,\dots,N \quad (3.2.10)$$

Και παραγωγίζοντας

$$\dot{Y}_n(t) = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t)}{M_n} \quad \text{όπου } n=1,2,\dots,N \quad (3.2.11)$$

Οι οποίες για  $t=0$  δίδουν τις ζητούμενες αρχικές συνθήκες

$$Y_n(0) = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \mathbf{u}(0)}{M_n} \quad \text{όπου } n=1,2,\dots,N \quad (3.2.12)$$

$$\dot{Y}_n(0) = \frac{\Phi_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_n} \quad \text{όπου } n=1,2,\dots,N \quad (3.2.13)$$

Οι ανωτέρω σχέσεις απλοποιούνται, εάν οι ιδιομορφές είναι ορθοκανονικοποιημένες ως προς τη μάζα και προκύπτει

$$M_n = \Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n = 1 \quad (3.2.14)$$

$$K_n = \omega_n^2 \quad (3.2.15)$$

Δηλαδή οι ιδιομορφικές μάζες προκύπτουν ίσες με τη μονάδα και οι ιδιομορφικές ακαμψίες ίσες με τις ιδιοσυχνότητες. Έτσι έχουμε

$$Y_n(0) = \Phi_n^T \mathbf{M} u(0) \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.16)$$

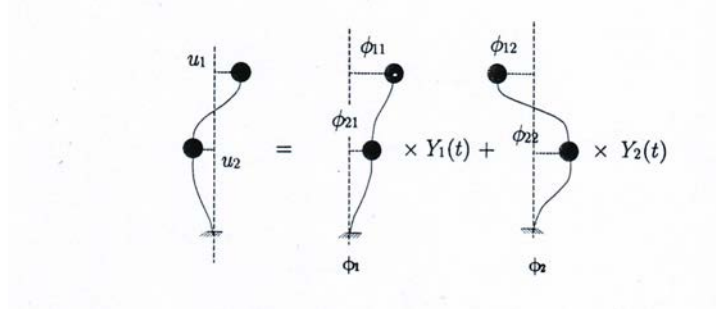
$$\dot{Y}_n(0) = \Phi_n^T \mathbf{M} \dot{u}(0) \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.2.17)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{u}_n = \Phi_n Y_n$ ,  $n=1,2,\dots,N$ , εκφράζει τη συμβολή της  $n$  ιδιομορφής στο διάνυσμα μετατοπίσεως  $u$  και ονομάζεται  $n$  ιδιομορφική συνιστώσα του διανύσματος μετατοπίσεως. Έτσι προκύπτει

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_N \quad (3.2.18)$$

Απ' όπου συμπεραίνουμε, ότι το διάνυσμα μετατοπίσεων είναι επαλληλία των ιδιομορφικών συνιστωσών του ή ότι σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  το διάνυσμα μετατοπίσεων εκφράζεται ως επαλληλία των ιδιομορφών που κάθε μια πολλαπλασιάζεται με συντελεστή βάρους που εξαρτάται από τον χρόνο.

Η μέθοδος αυτή επιλύσεως των εξισώσεων κινήσεως του προβλήματος των ελεύθερων ταλαντώσεων είναι γνωστή ως μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών. Χρησιμοποιείται όχι μόνο για τις ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, αλλά και για τις ταλαντώσεις με απόσβεση καθώς και για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.



Σχήμα 3.2.1 Επαλληλία ιδιομορφών

### 3.3 ΧΡΗΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΠΟΣΒΕΣΕΩΣ

Οι λύσεις του προβλήματος των ελεύθερων ταλαντώσεων με απόσβεση επιλύοντας απ' ευθείας το τετραγωνικό ιδιοπρόβλημα παρουσιάζει, όπως γίνεται αντιληπτό από το σχετικό παράδειγμα, σημαντικές υπολογιστικές δυσχέρειες. Αφ' ετέρου ο μετασχηματισμός του σε γραμμικό ιδιοπρόβλημα με διπλάσια διάσταση αυξάνει υπερβολικά τις αριθμητικές πράξεις, πέραν των δυσχερειών χειρισμού μιγαδικών αριθμών. Για τους λόγους αυτούς οι μέθοδοι αυτές έχουν θεωρητικό χαρακτήρα και εκτός από ειδικές περιπτώσεις δεν χρησιμοποιούνται στη δυναμική ανάλυση των κατασκευών. Στη πράξη γίνεται η παραδοχή της ιδιομορφικής αποσβέσεως, σύμφωνα με την οποία η απόσβεση επηρεάζει ξεχωριστά κάθε ιδιομορφή με δεδομένο λόγο αποσβέσεως. Αυτό αληθεύει και θεωρητικά, όταν οι ιδιομορφές της ελεύθερης ταλαντώσεως είναι ορθογωνικές και ως προς το μητρώο αποσβέσεως, δηλαδή ισχύει

$$\Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_m = \begin{cases} C_n & \text{αν } n=m \\ 0 & \text{αν } n \neq m \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό από τις φυσικές συντεταγμένες σε ιδιομορφικές συντεταγμένες των ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση γράφουμε την εξίσωση κινήσεως ως

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3.3.2)$$

Την οποία προπολλαπλασιάζουμε με  $\Phi^T$  και έχουμε

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y} + \Phi^T C \Phi \dot{Y} + \Phi^T K \Phi Y = 0 \quad (3.3.3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ορθογωνικότητα των ιδιομορφών ως προς M, K, αλλά και ως προς C λόγω της παραδοχής (3.3.1), προκύπτει

$$M_n Y_n + C_n Y_n + K_n Y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.3.4)$$

Δηλαδή επιτυγχάνεται η απόξευση των εξισώσεων κινήσεως και στη περίπτωση που υπάρχει απόσβεση.

Περαιτέρω θέτοντας

$$C_n = 2\xi_n M_n \omega_n \quad (3.3.5)$$

Και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $K_n = M_n \omega_n^2$  η (3.3.4) γράφεται

$$Y_n + 2\xi_n \omega_n Y_n + \omega_n^2 Y_n = 0, \quad n=1,2,\dots,N \quad (3.3.6)$$

Της οποίας η λύση είναι η εξής

$$Y_n(t) = e^{-\xi_n \omega_n t} \left[ \frac{Y_n(0) + Y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \sin \omega_{Dn} t + Y_n(0) \cos \omega_{Dn} t \right] \quad (3.3.7)$$

Το μέγεθος  $\xi_n$  που ορίζεται από τη σχέση (3.3.5), εκφράζει το λόγο αποσβέσεως της n ιδιομορφής. Τα μεγέθη  $Y_n(0), \dot{Y}_n(0)$  προκύπτουν από τα διανύσματα των αρχικών συνθηκών  $u(0)$ . Μετά τον προσδιορισμό των  $Y_n(t)$  η λύση προκύπτει

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n Y_n(t) \quad (3.3.8)$$

Η λύση αυτή ονομάζεται μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών με ιδιομορφική απόσβεση.

Η εξίσωση (3.3.7) γράφεται

$$Y_n(t) = p_n e^{-\xi_n \omega_n t} \cos(\omega_{Dn} t - \theta_n) \quad (3.3.9)$$

$$p_n = \sqrt{\left[ \frac{Y_n(0) + Y_n(0) \xi_n \omega_n}{\omega_{Dn}} \right]^2 + [Y_n(0)]^2} \quad (3.3.10a)$$



όπου

$$\theta_n = \tan^{-1} \left[ \frac{\dot{Y}_n(0) + Y_n(0)\xi_n \omega_n}{\omega_D Y(0)} \right] \quad (3.3.10b)$$

Από τη τελευταία συνάγεται ότι όλες οι μετατοπίσεις μέσα σε μία ιδιομορφή ταλαντώσεως βρίσκονται σε φάση.

Η ανωτέρω λύση προέκυψε με την παραδοχή ότι το μητρώο αποσβέσεως διαγωνοποιείται με το μετασχηματισμό  $u = \Phi Y$ , ήτοι

$$\Phi^T C \Phi = \widehat{C} \quad (3.3.11)$$

όπου

$$\widehat{c} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 2\xi_2 \omega_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 2\xi_n \omega_n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 2\xi_N \omega_n \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

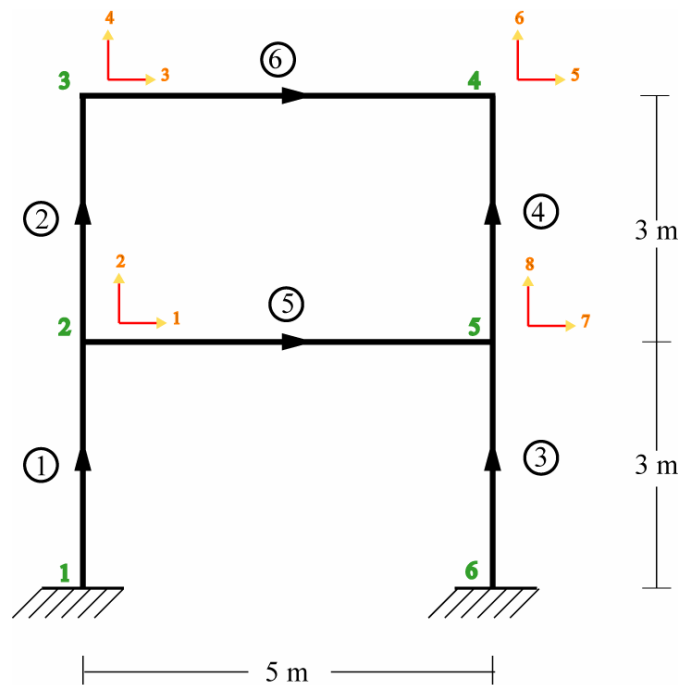
Το μητρώο αποσβέσεως που ικανοποιεί τη (3.3.1) ονομάζεται αναλογικό. Η απόσβεση που ικανοποιεί τη σχέση ορθογωνικότητας ως προς τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλαντώσεως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως κλασσική απόσβεση, εν αντιθέσει προς τη μη κλασσική απόσβεση όπου δεν ικανοποιείται η συνθήκη αυτή. Ο τρόπος κατασκευής αναλογικών μητρώων θα παρουσιασθούν στην επόμενη παράγραφο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στην πτυχιακή αυτή εργασία εξετάζονται δύο σύνθετα πλαίσια από χάλυβα και οπλισμένο σκυρόδεμα. Τα πλαίσια, αποτελούν τμήμα μιας δυόροφης σύνθετης κατασκευής.

#### 4.1 ΠΛΑΙΣΙΟ 1



Το πλαίσιο αποτελείται από έξι ράβδους. Το εμβαδό της διατομής των καθέτων ράβδων είναι  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  ενώ των οριζόντιων ράβδων είναι  $60 \times 30 \text{ cm}^2$ .

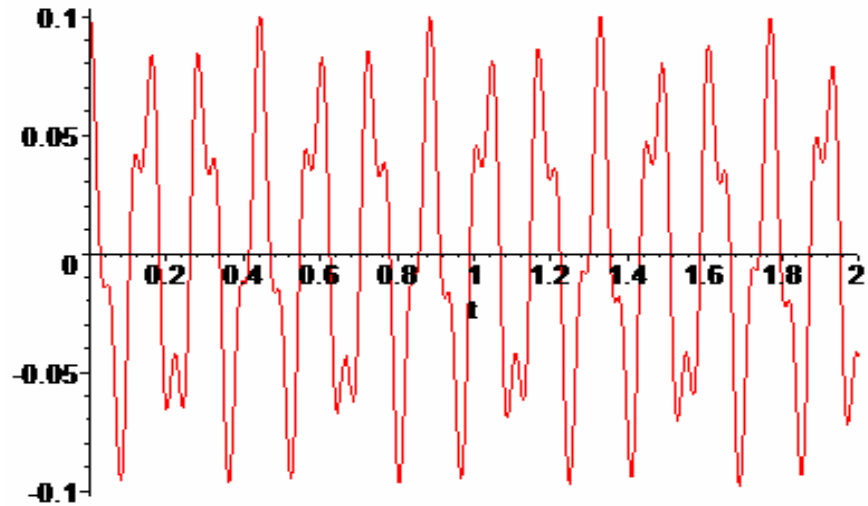
Τα δεδομένα είναι:

Σκυρόδεμα C20/25:  $E = 2.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\rho = 2.4 \text{ ton/m}^3$ ,  $\xi = 0.05$ .

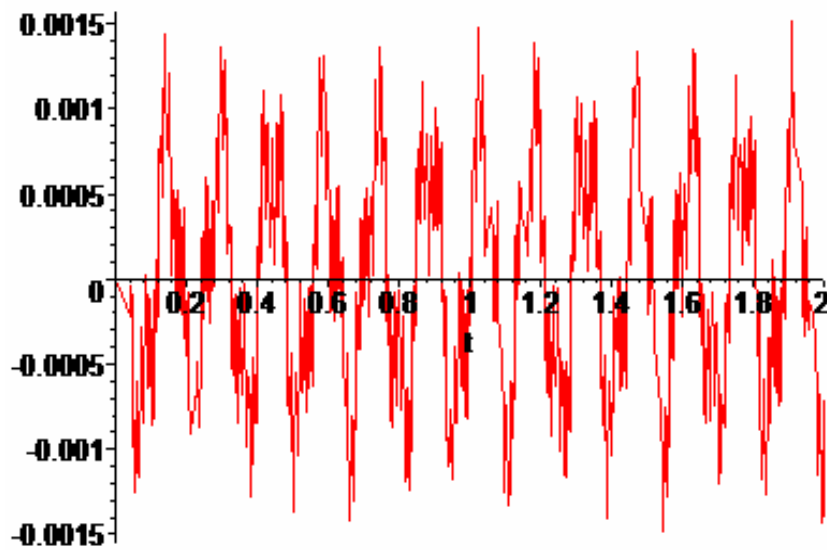
Χάλυβας S500:  $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\rho = 7.85 \text{ ton/m}^3$ ,  $\xi = 0.04$ .

Στην περίπτωση σύνθετης κατασκευής στους κοινούς κόμβους  $\xi = 0.045$ .

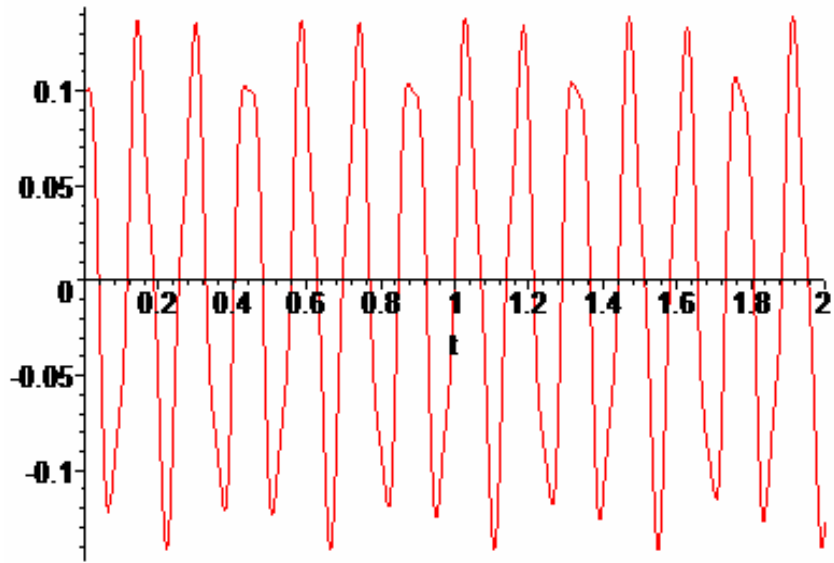
### 4.1.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση



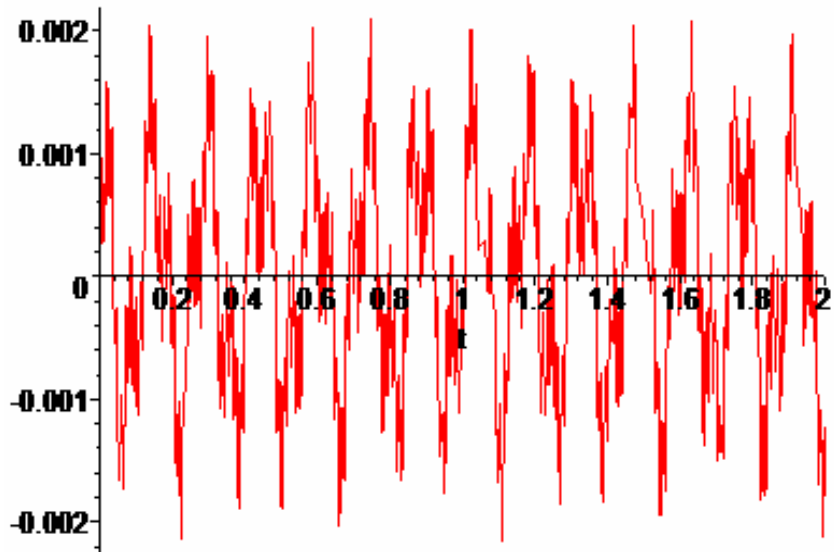
Σχήμα 4.1.1 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



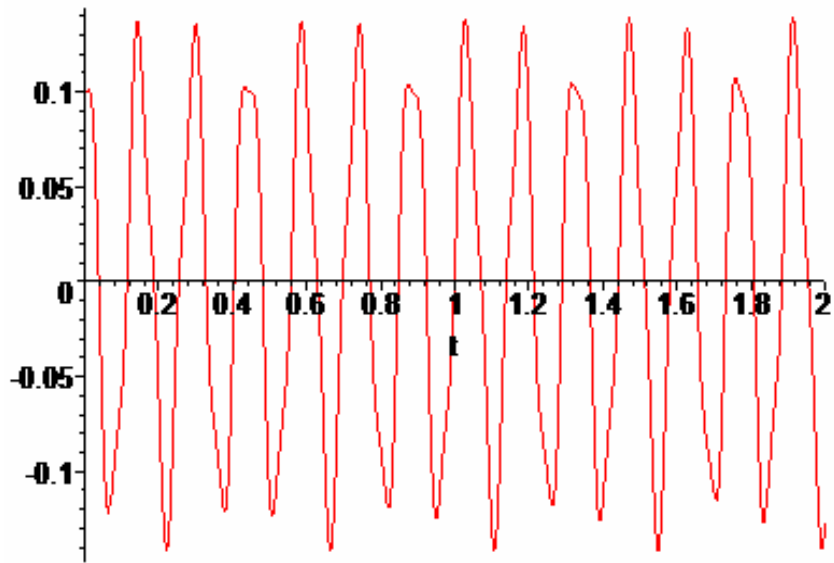
Σχήμα 4.1.2 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



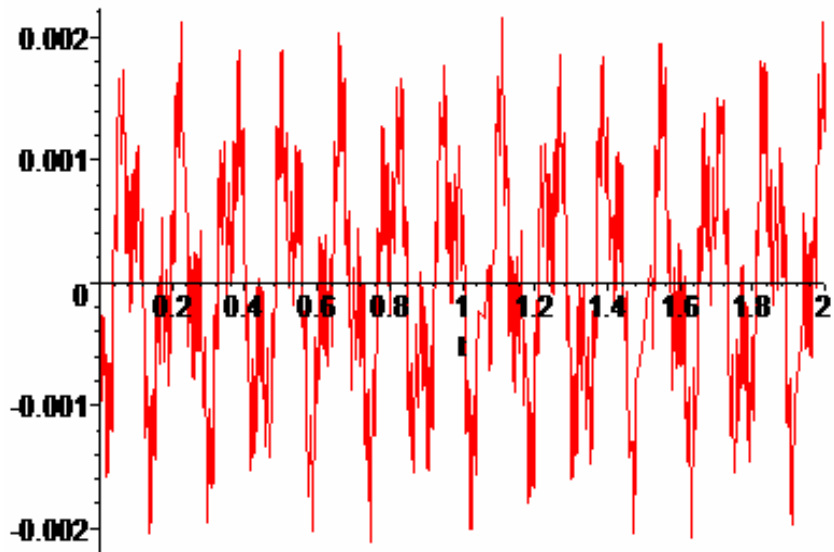
Σχήμα 4.1.3 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



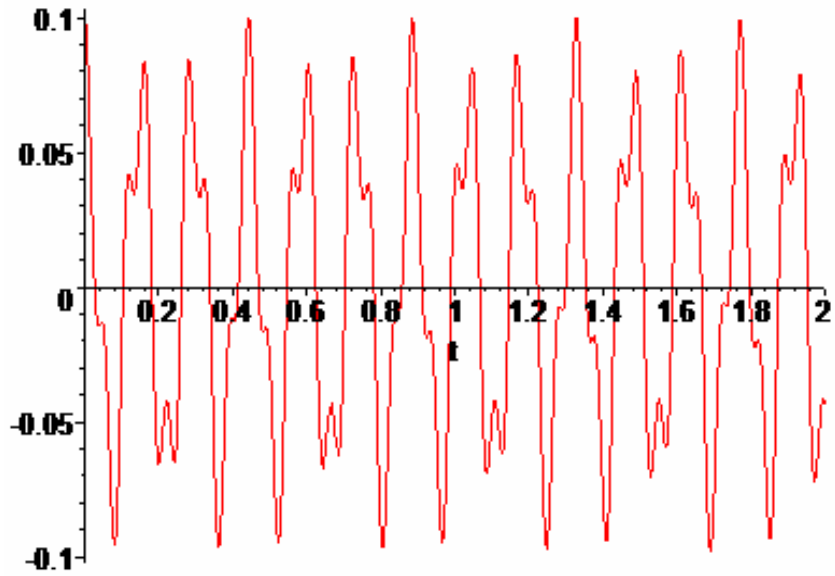
Σχήμα 4.1.4 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



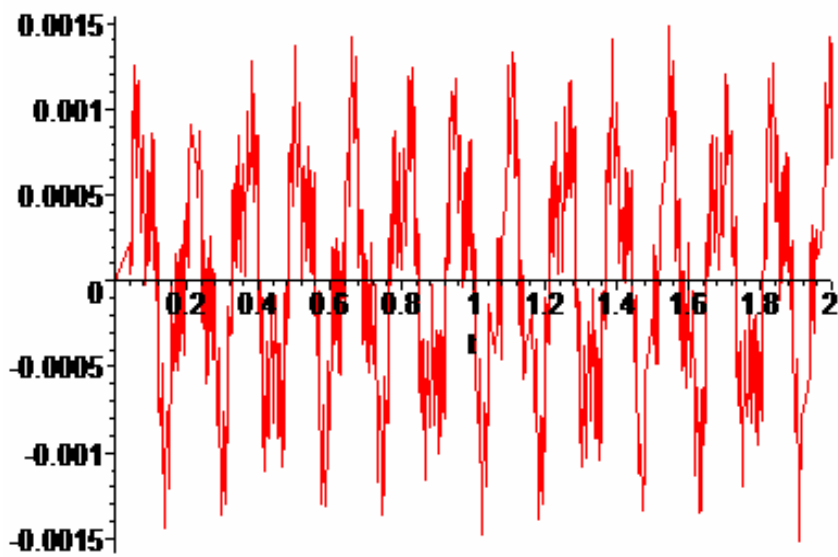
Σχήμα 4.1.5 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.6 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



Σχήμα 4.1.7 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

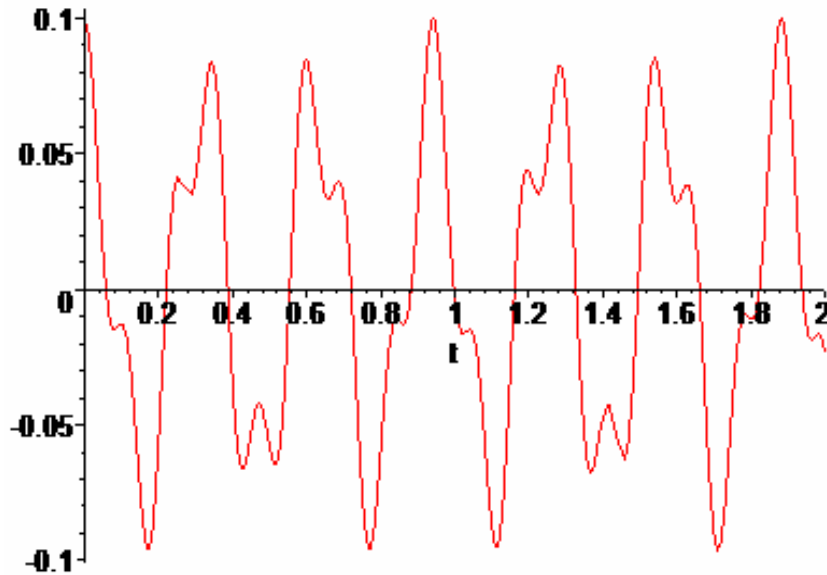


Σχήμα 4.1.1.8

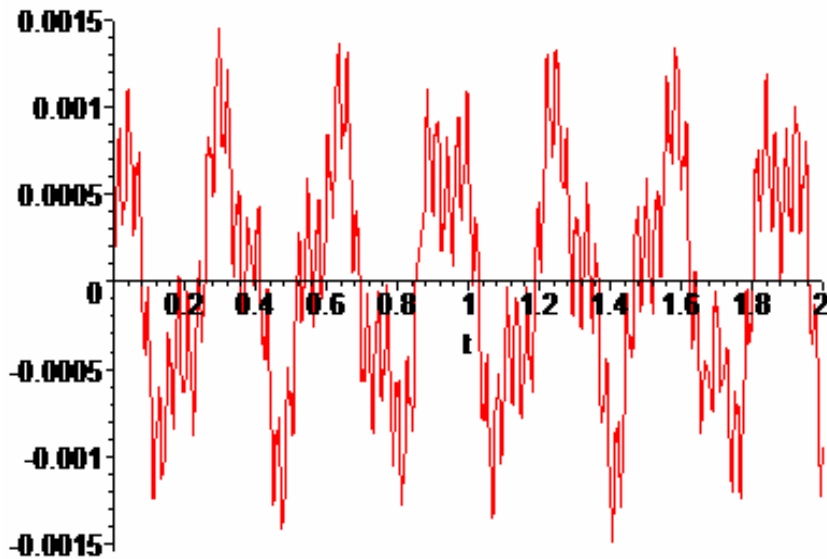
Σχήμα 4.1.8 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

### 4.1.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση

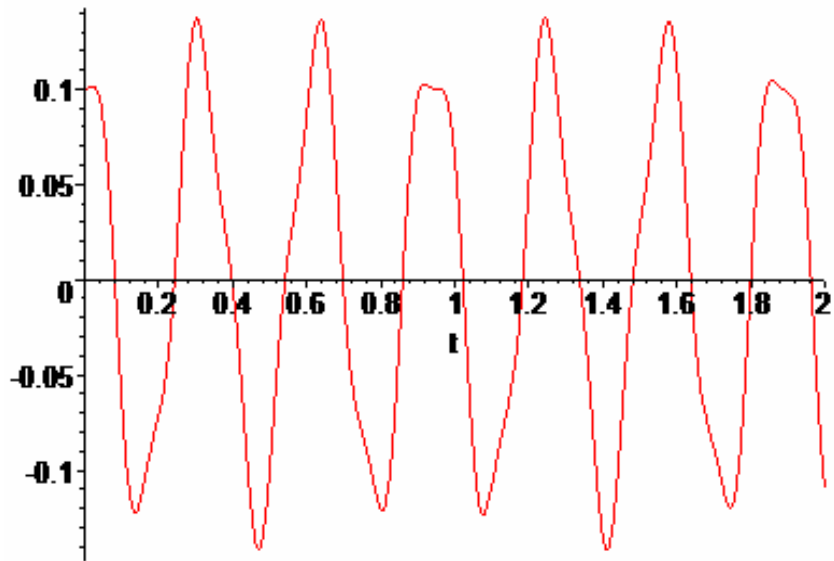
Όλο το πλαίσιο αποτελείται από έξι ράβδους, από χάλυβα S500 όπου το εμβαδό της διατομής της κάθε κάθετης ράβδου είναι 30X30 cm και της κάθε οριζόντιας 60X30.



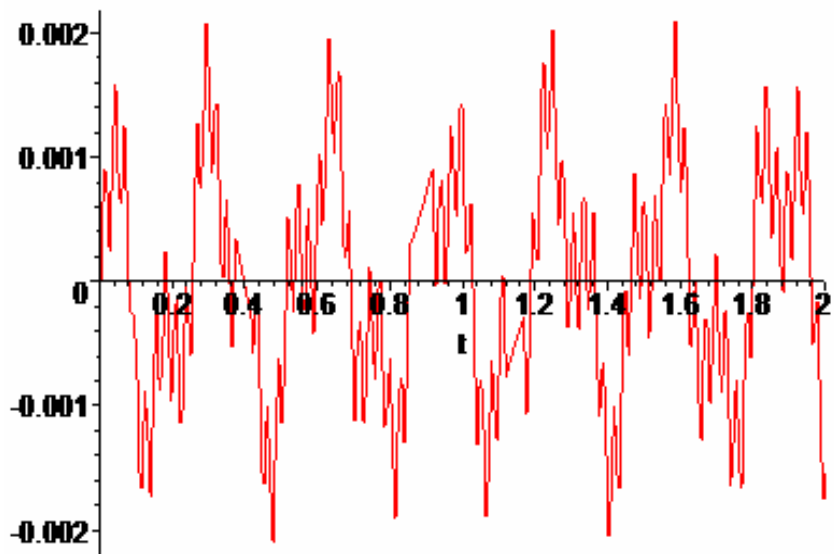
Σχήμα 4.1.9 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



Σχήμα 4.1.10 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .

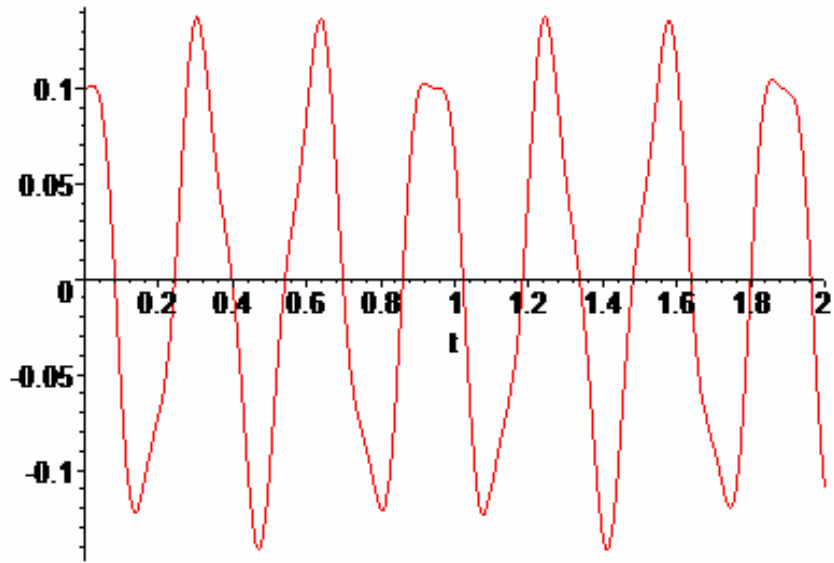


Σχήμα 4.1.11 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .

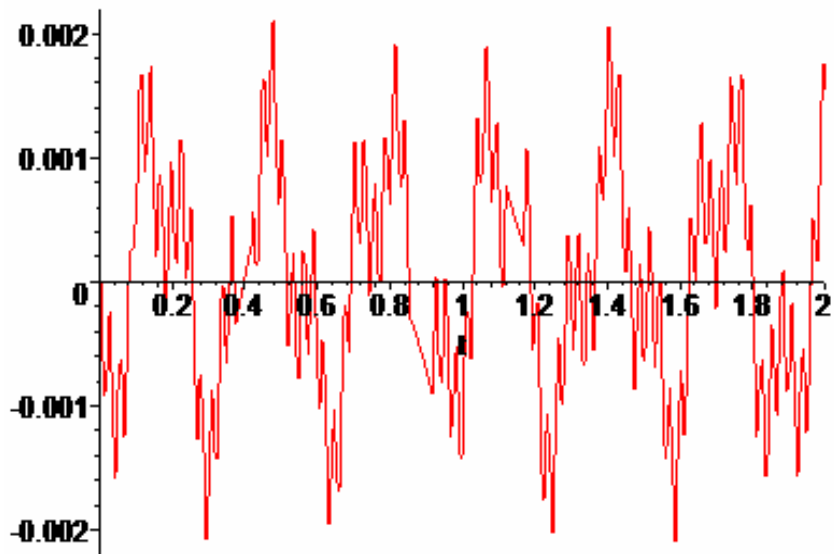


Σχήμα 4.1.12 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .

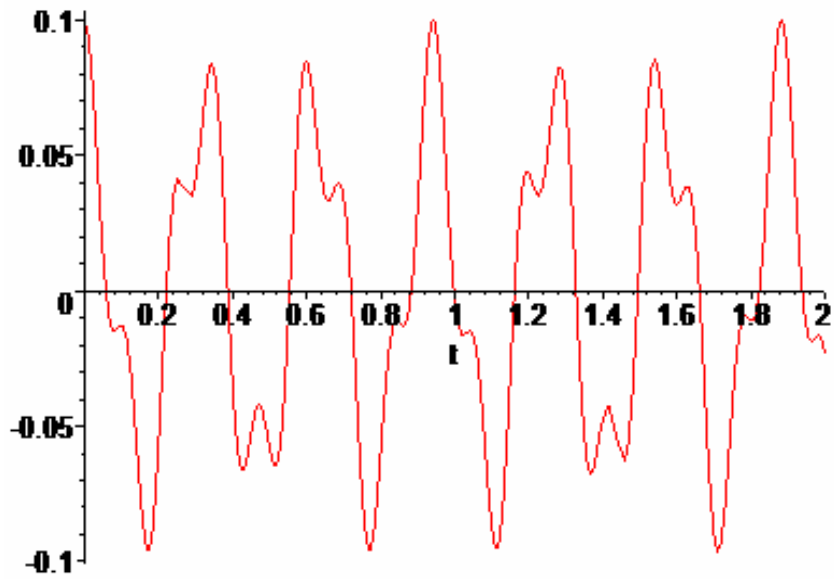




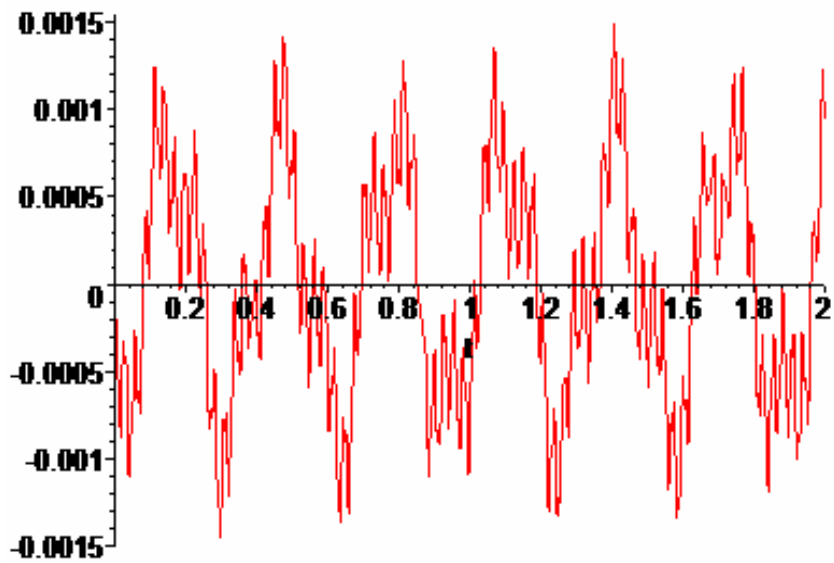
Σχήμα 4.1.13 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.14 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



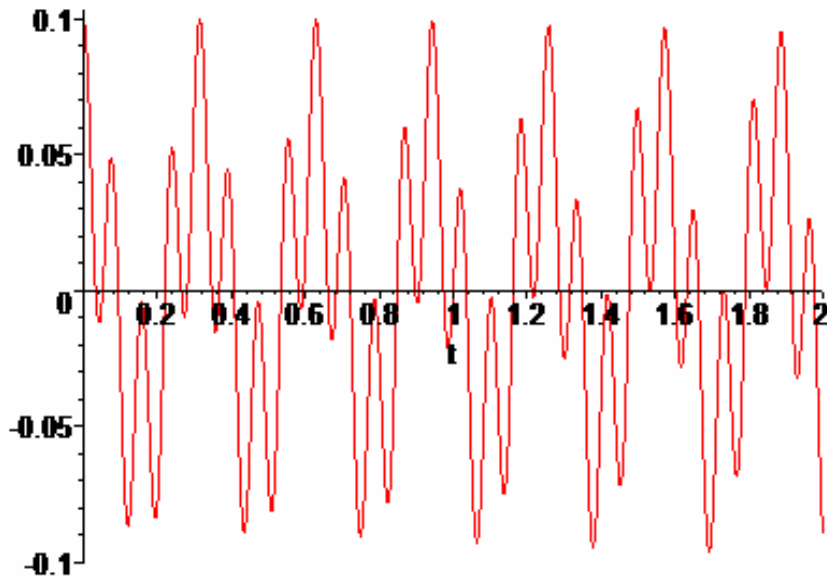
Σχήμα 4.1.15 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



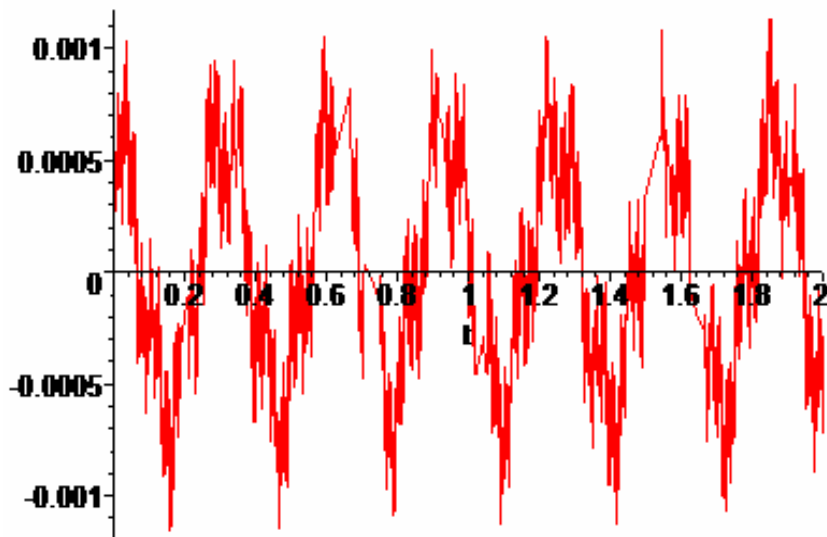
Σχήμα 4.1.16 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

### 4.1.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση

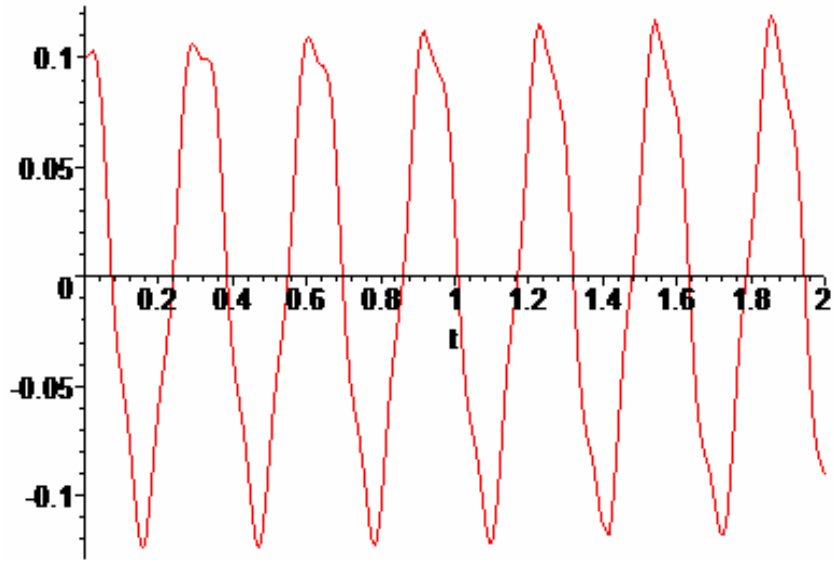
Όλο το πλαίσιο αποτελείται από τρεις ράβδους, από σκυρόδεμα C20/25 και από τρεις ράβδους από χάλυβα S500 όπου το εμβαδό της διατομής της κάθε κάθετης ράβδου είναι 30X30 cm και της κάθε οριζόντιας 60X30.



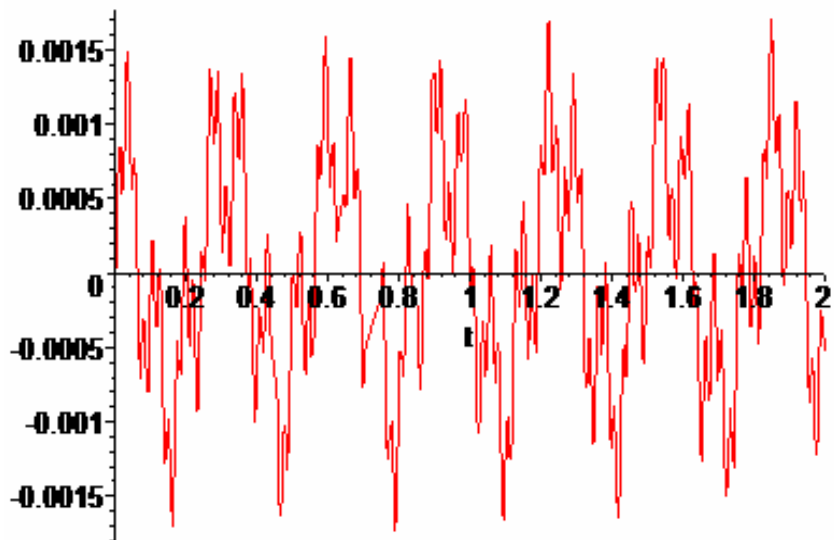
Σχήμα 4.1.17 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



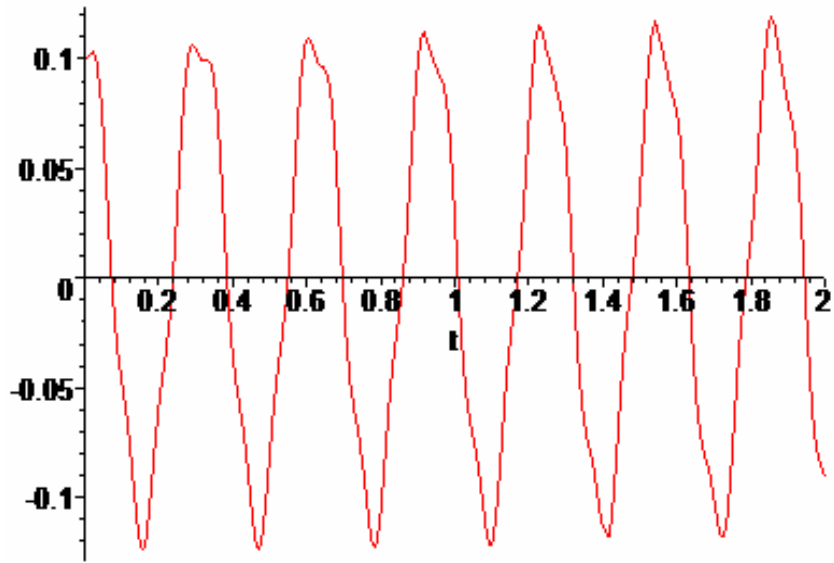
Σχήμα 4.1.18 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



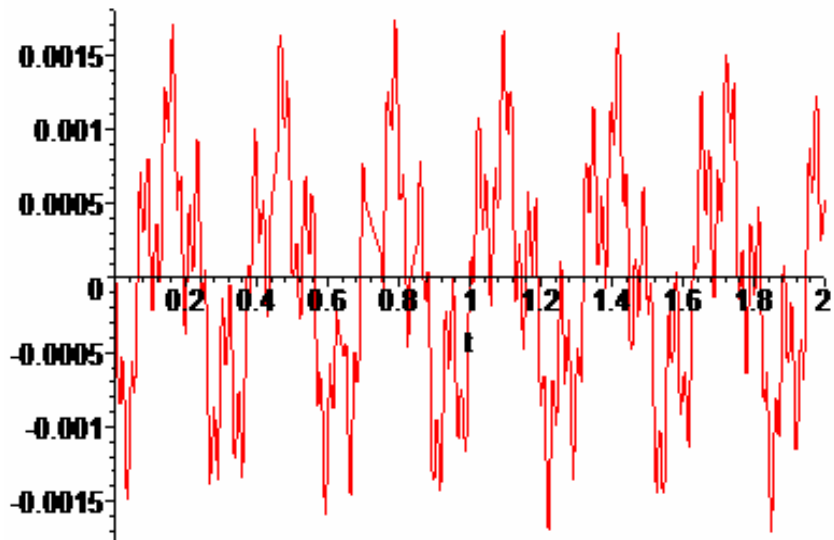
Σχήμα 4.1.19 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



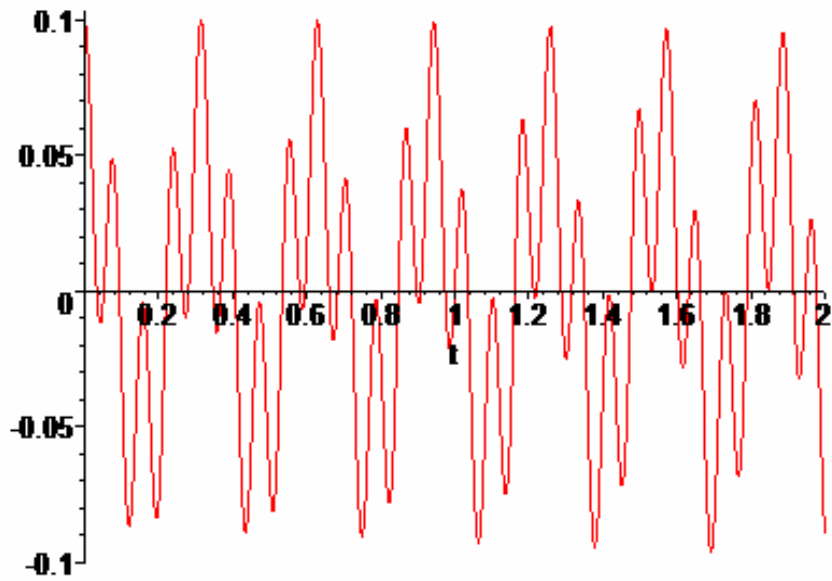
Σχήμα 4.1.20 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



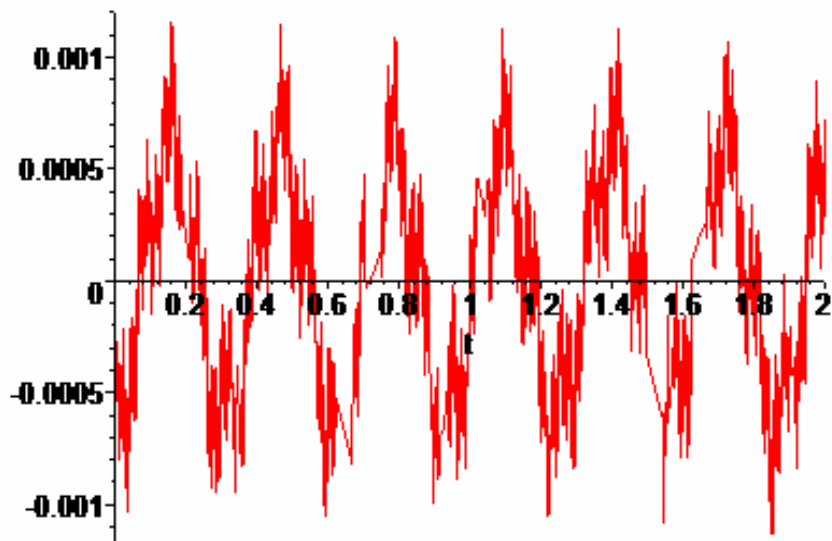
Σχήμα 4.1.21 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.22 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .

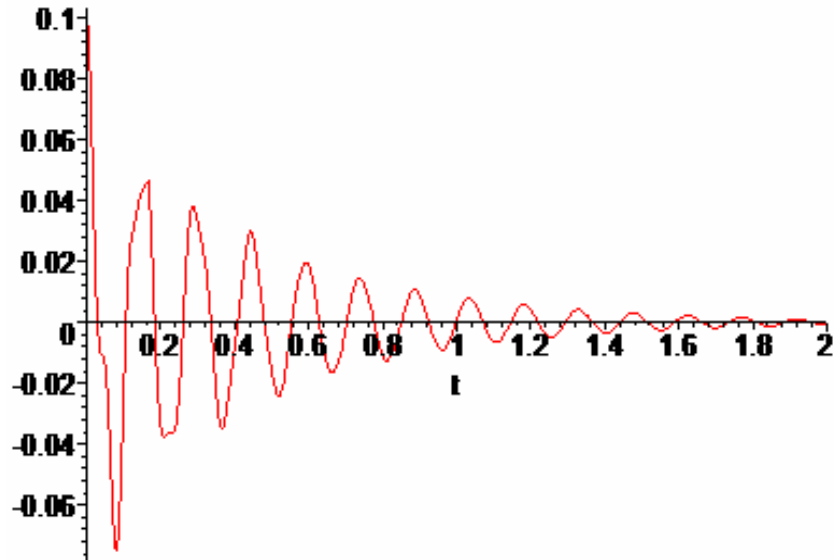


Σχήμα 4.1.23 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

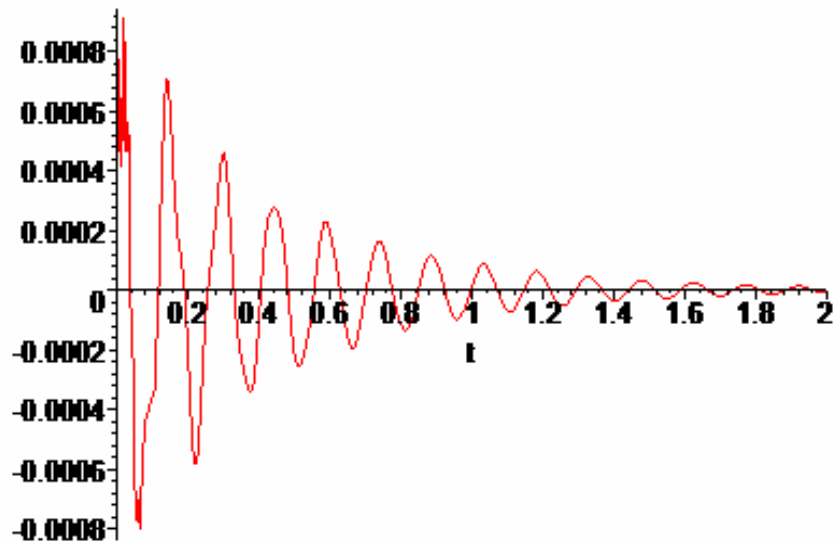


Σχήμα 4.1.24 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

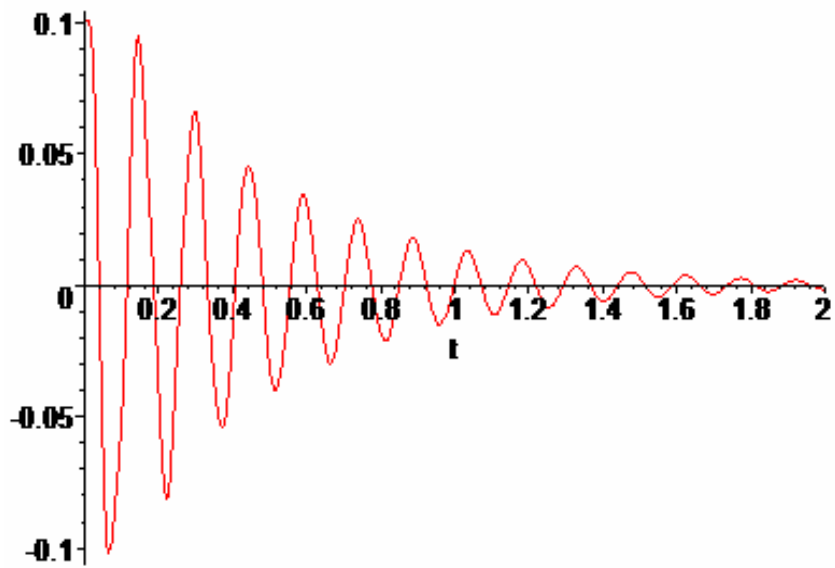
#### 4.1.4 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση



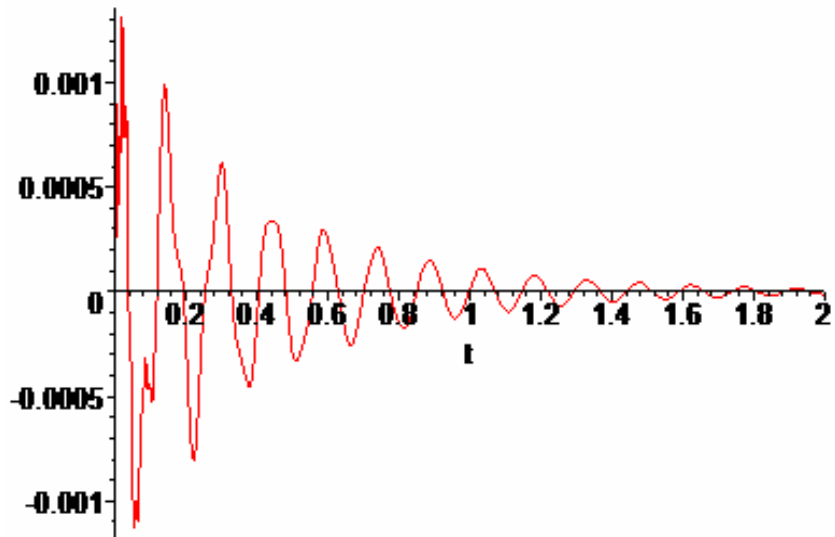
Σχήμα 4.1.25 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



Σχήμα 4.1.26 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .

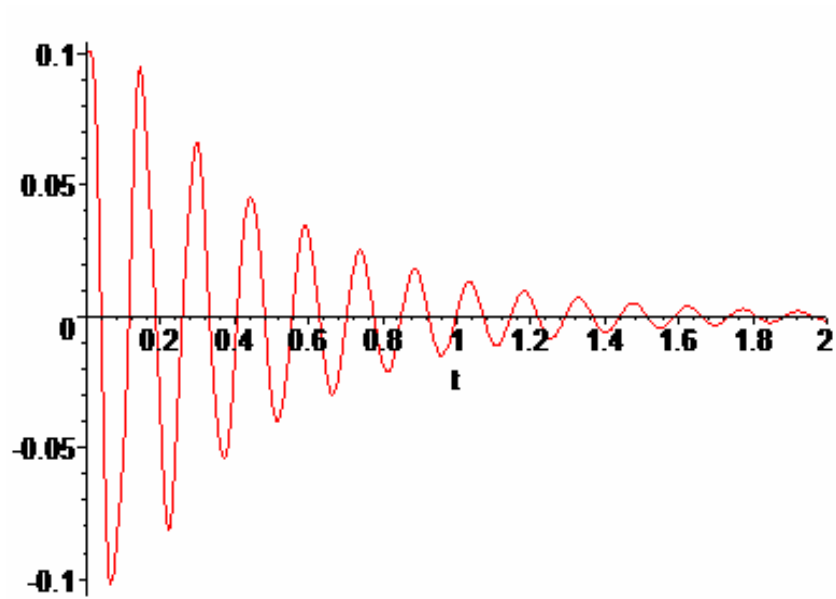


Σχήμα 4.1.27 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .

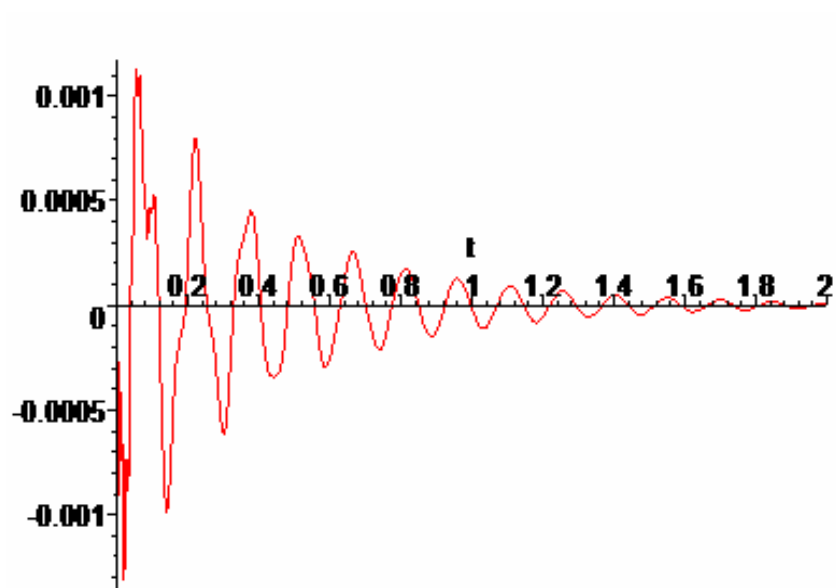


Σχήμα 4.1.28 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .

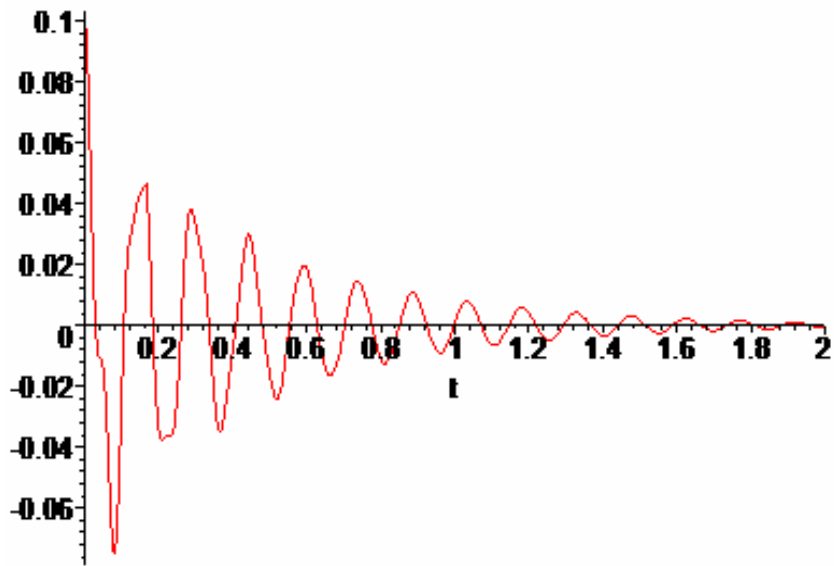




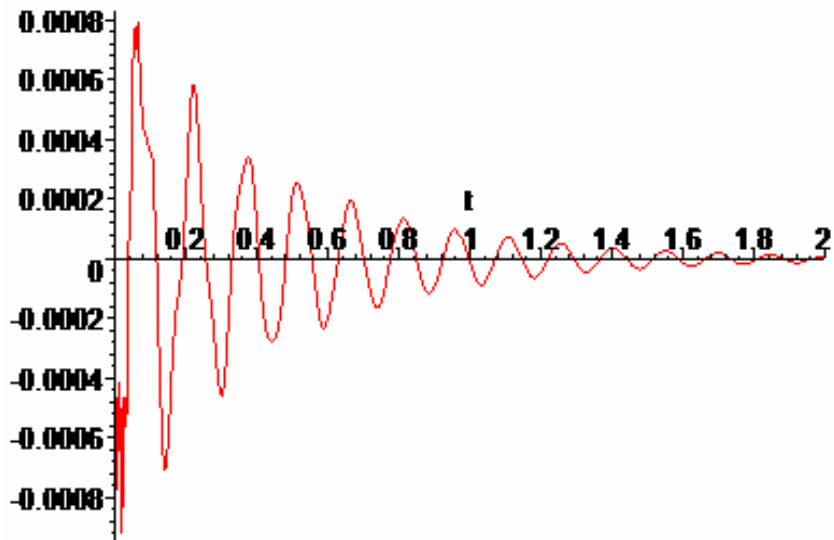
Σχήμα 4.1.29 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.30 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .

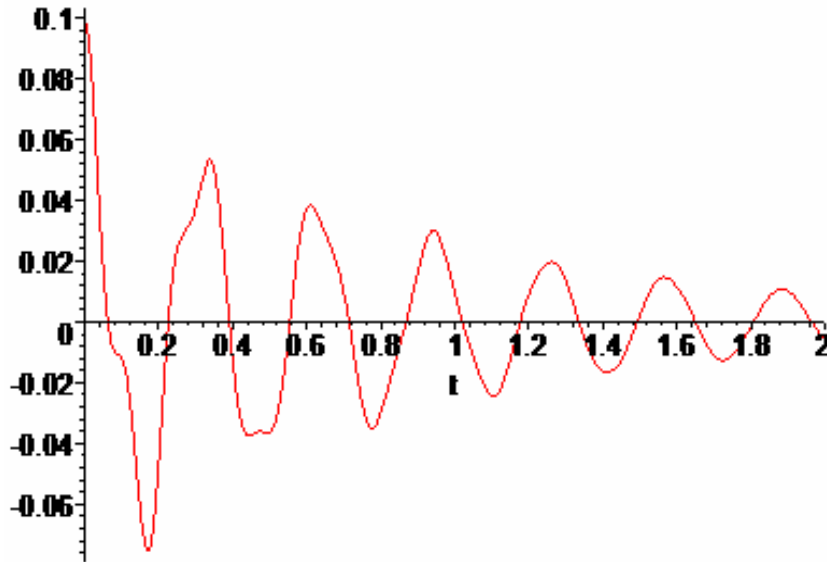


Σχήμα 4.1.31 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

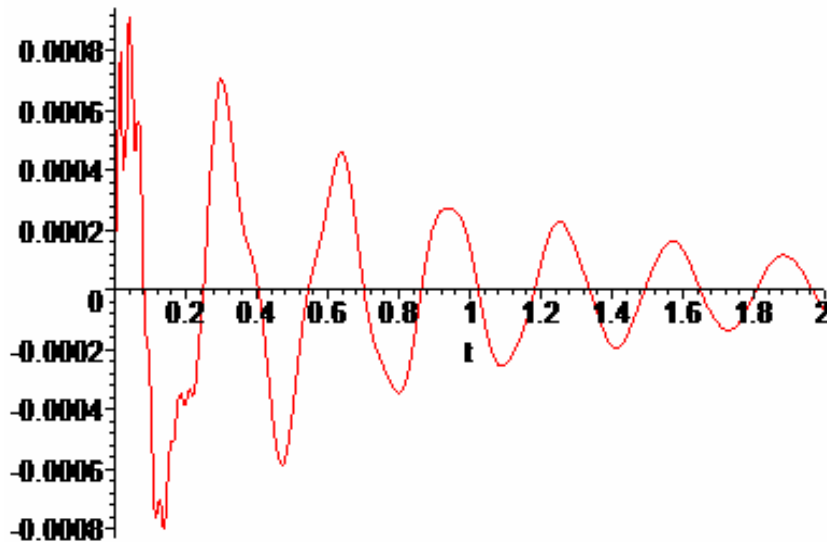


Σχήμα 4.1.32 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

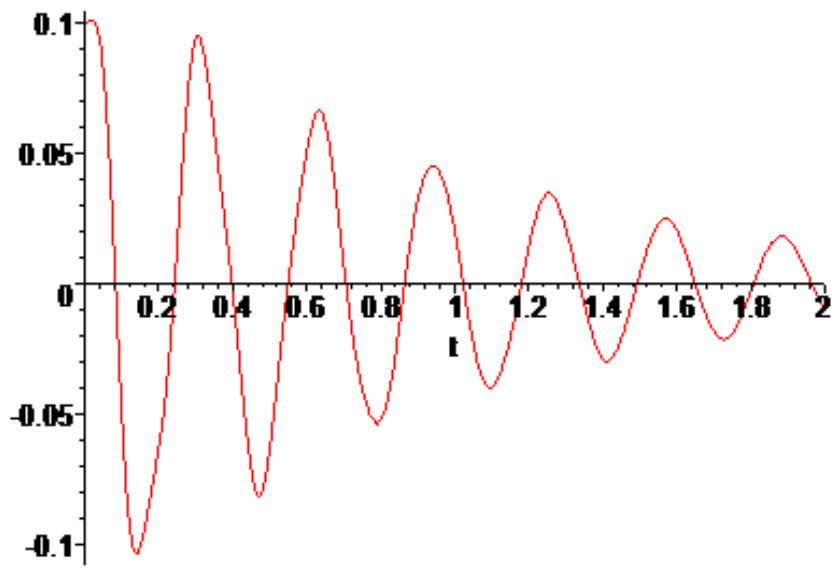
#### 4.1.5 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση



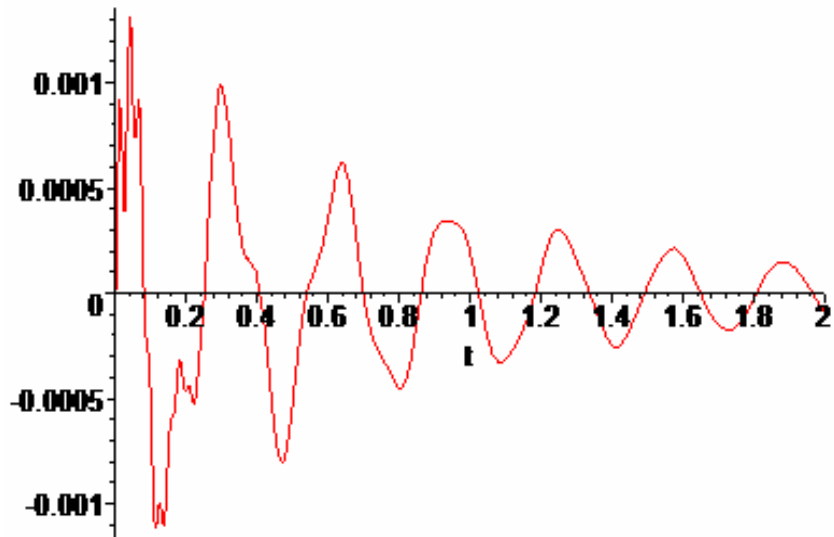
Σχήμα 4.1.33 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



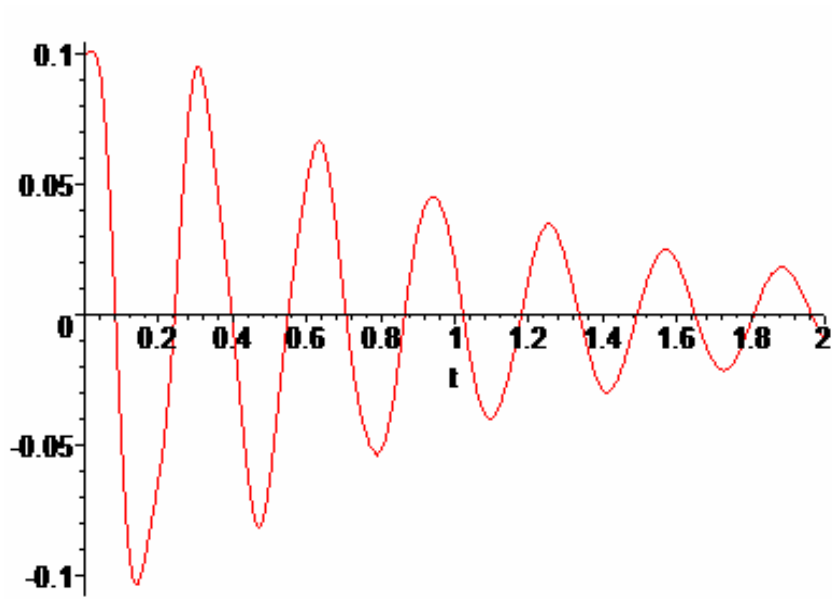
Σχήμα 4.1.34 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_3(t)$ .



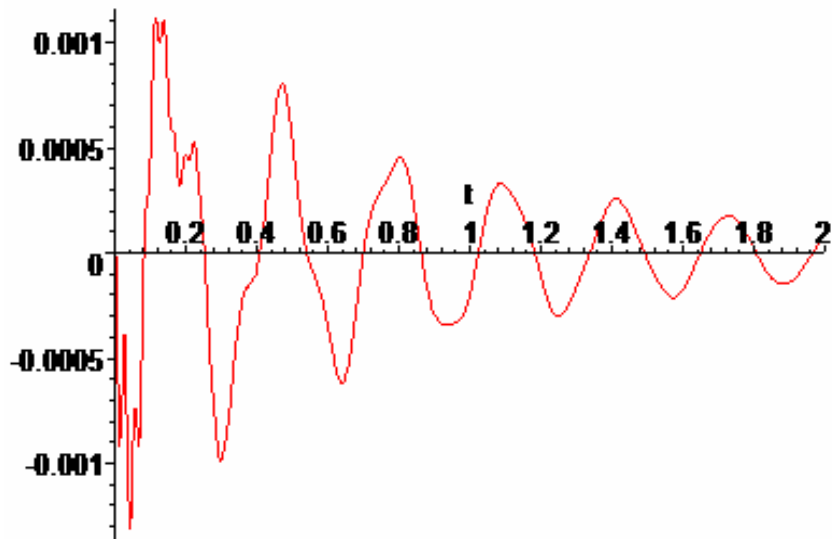
Σχήμα 4.1.35 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_4(t)$ .



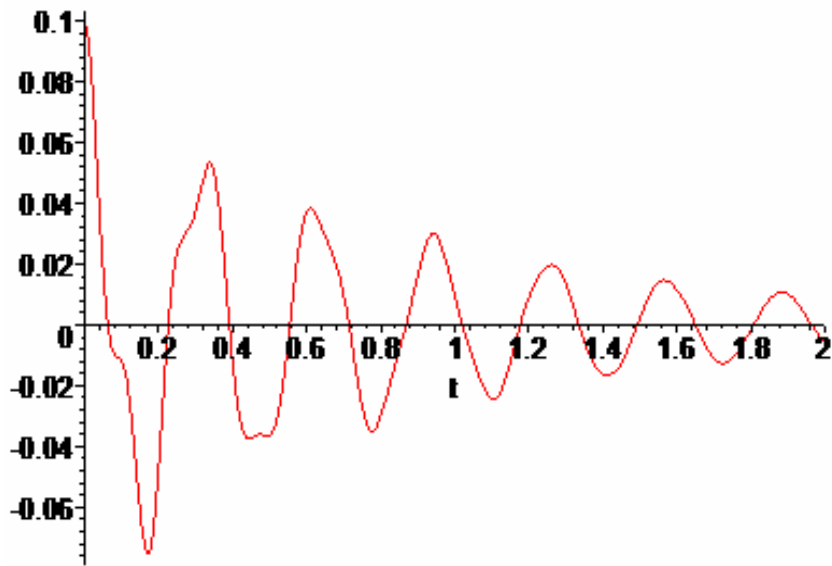
Σχήμα 4.1.36 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



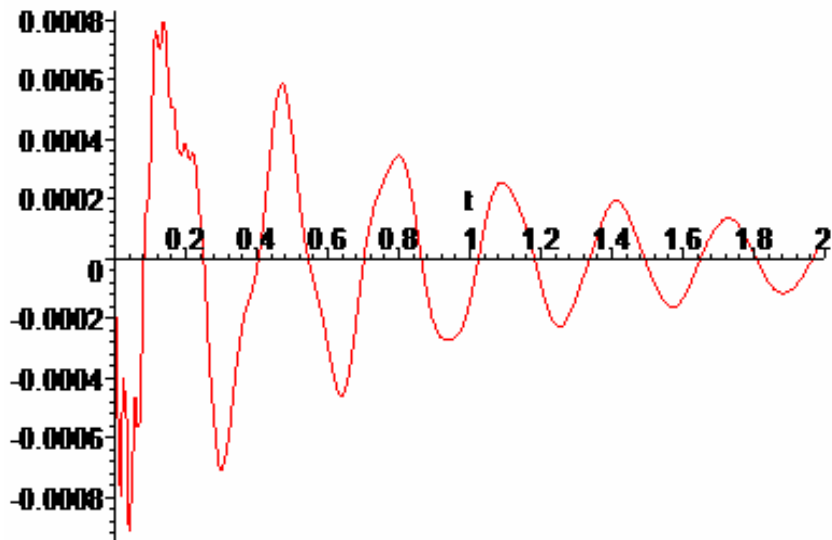
Σχήμα 4.1.37 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.38 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .

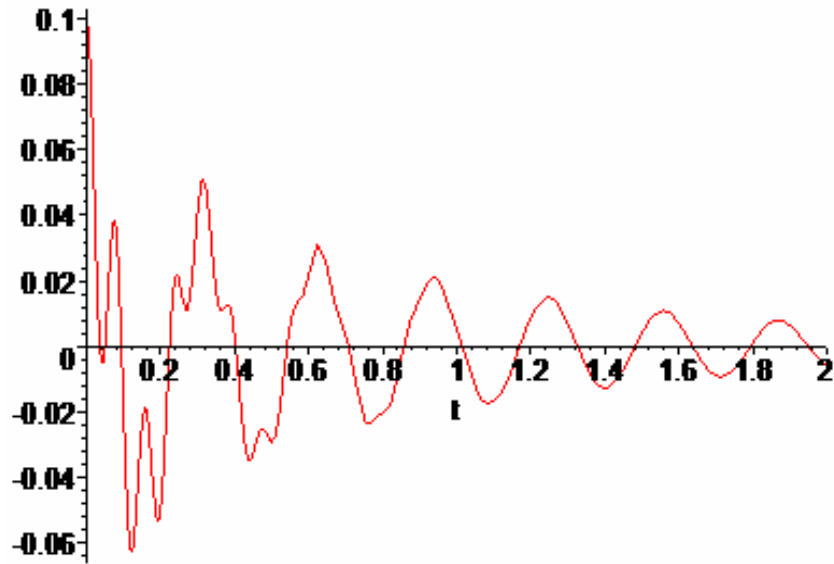


Σχήμα 4.1.39 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

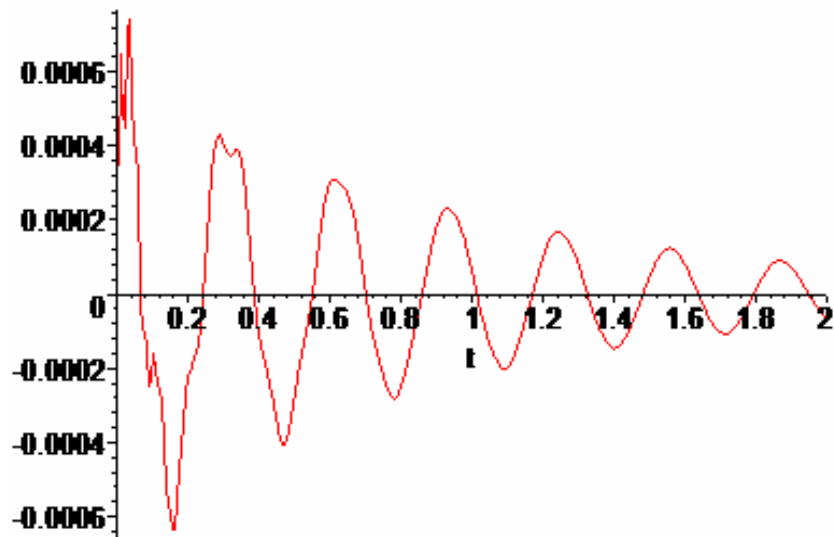


Σχήμα 4.1.40 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

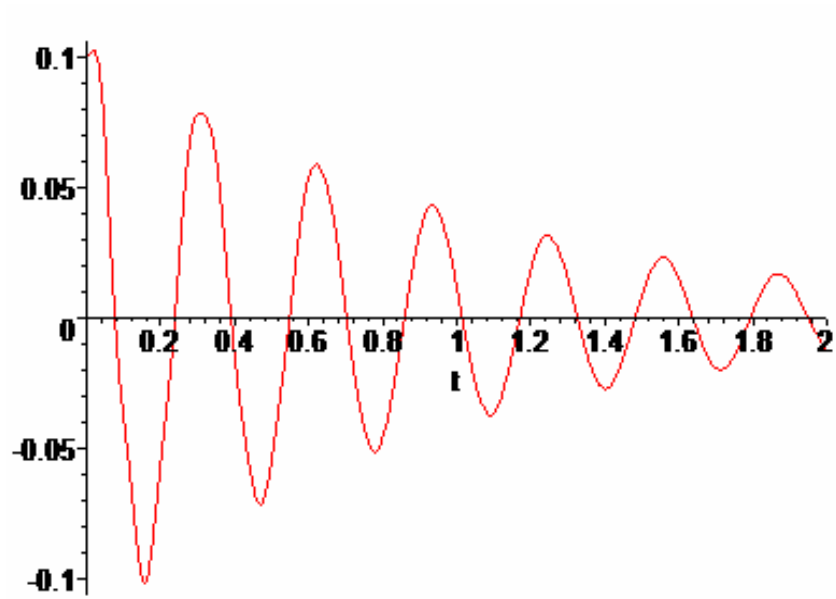
#### 4.1.6 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα και σκυρόδεμα με απόσβεση



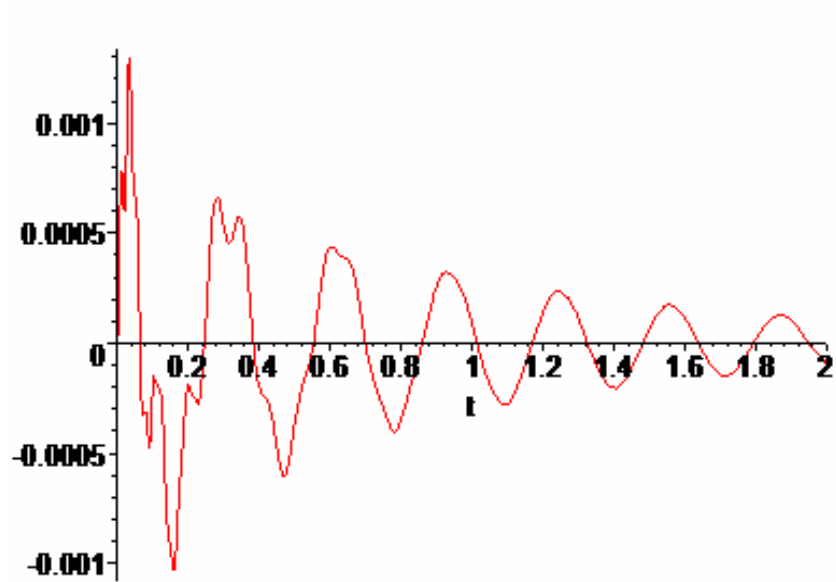
Σχήμα 4.1.41 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



Σχήμα 4.1.42 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .

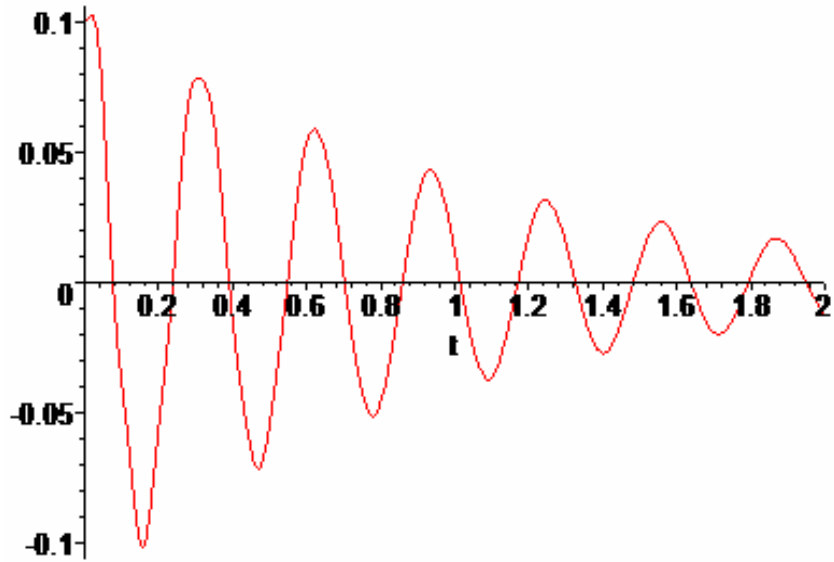


Σχήμα 4.1.43 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .

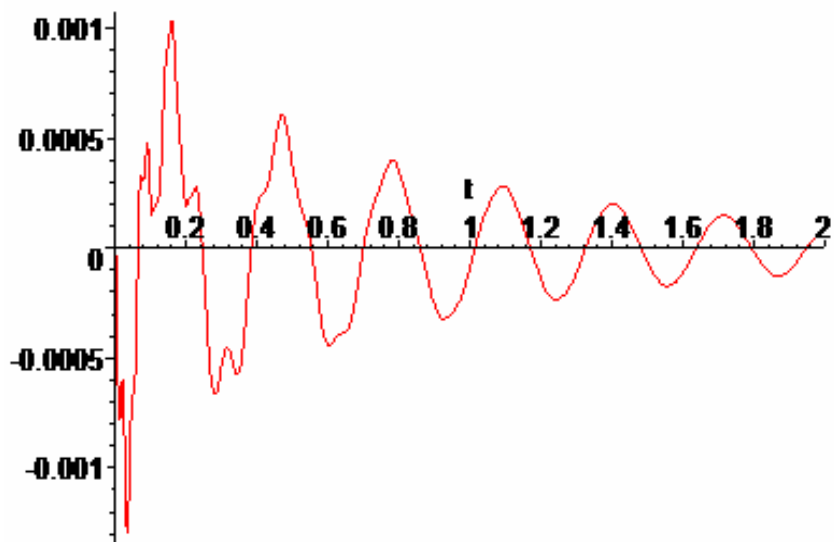


Σχήμα 4.1.44 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .

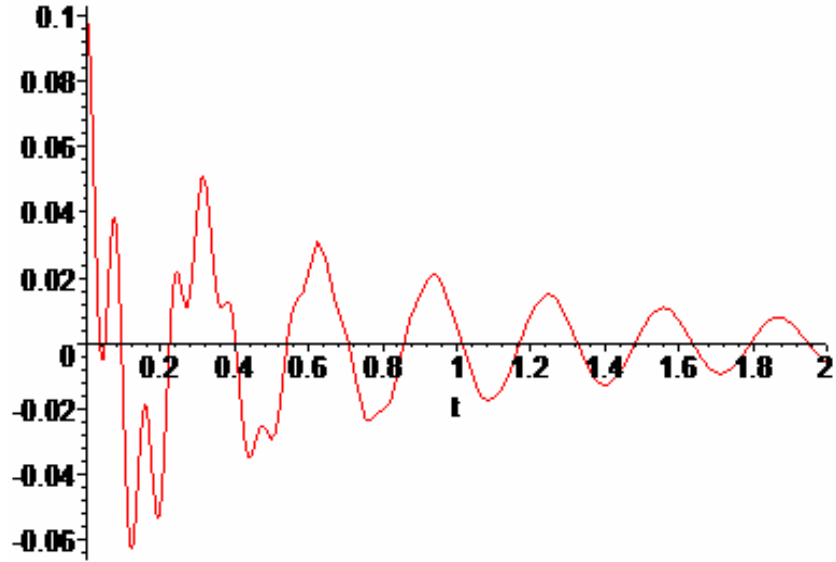




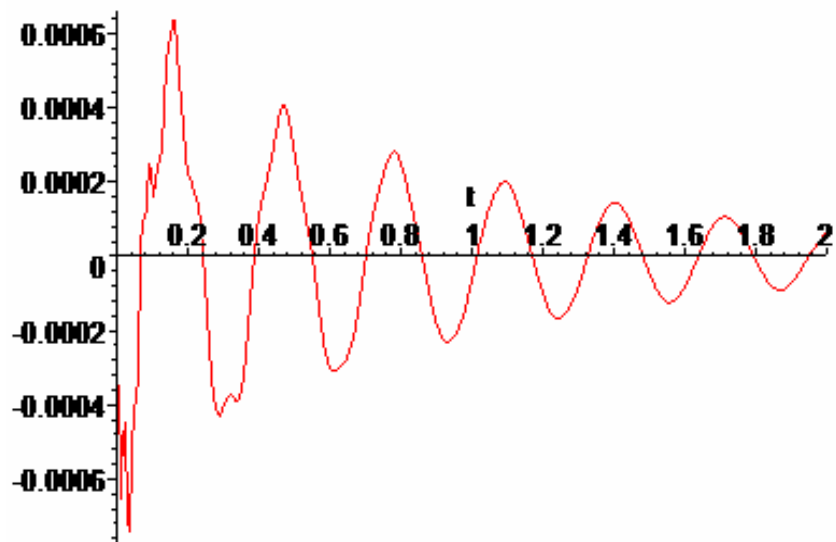
Σχήμα 4.1.45 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.46 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



Σχήμα 4.1.47 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

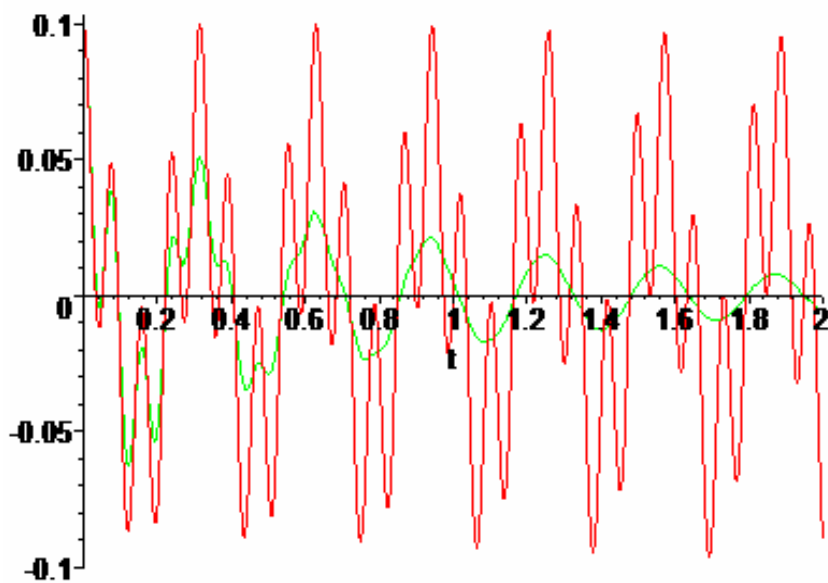


Σχήμα 4.1.48 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

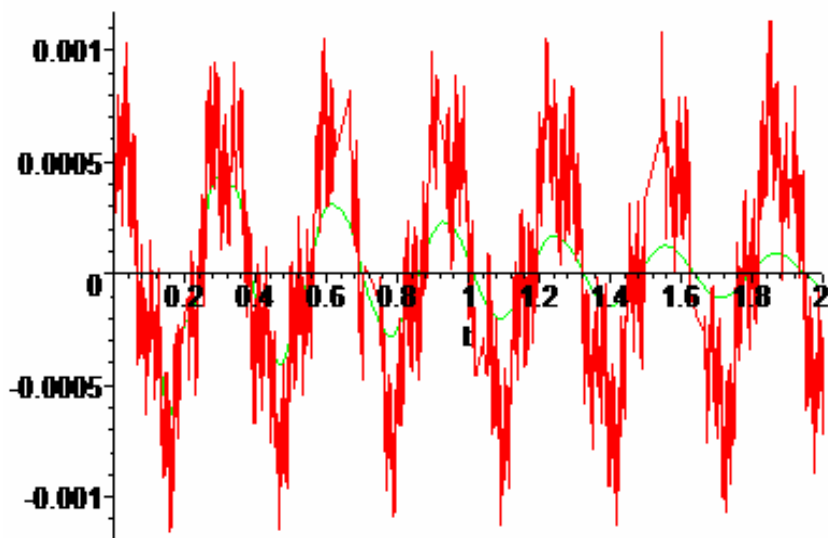
#### 4.1.7 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με και χωρίς απόσβεση

Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση.

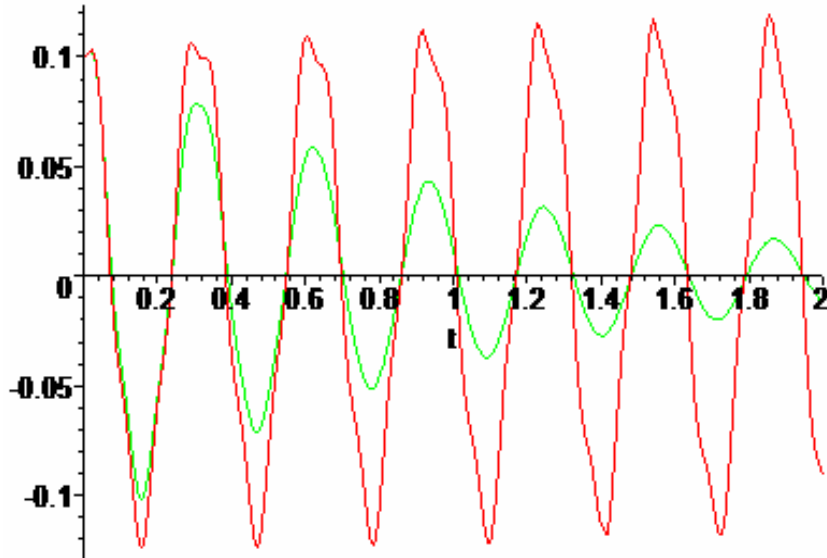
Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση.



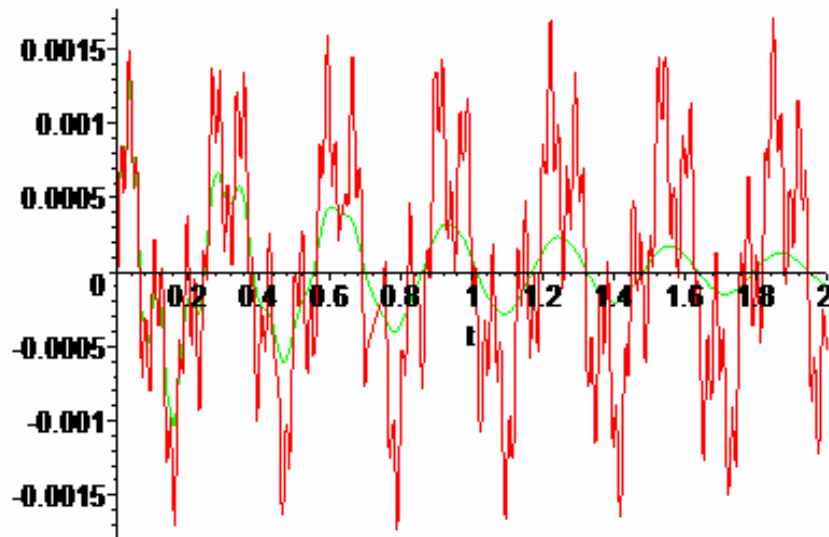
Σχήμα 4.1.49 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



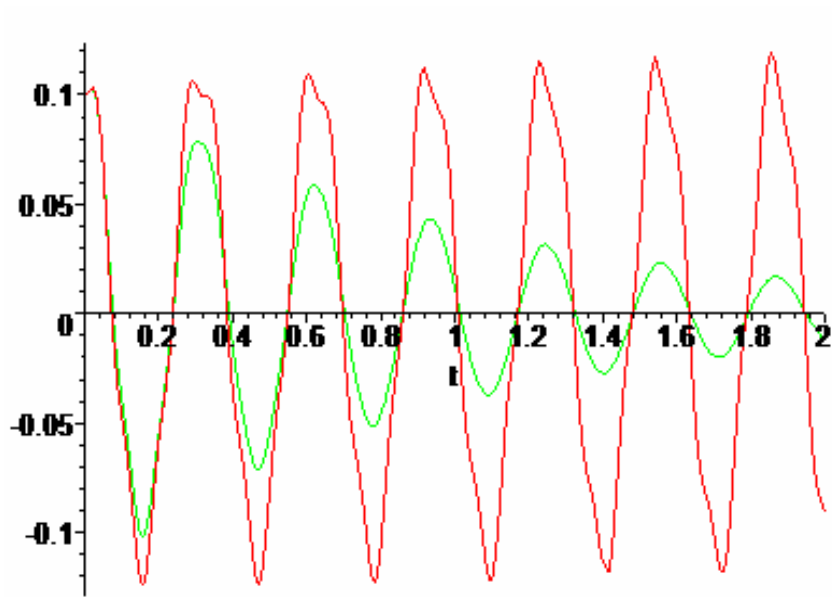
Σχήμα 4.1.50 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



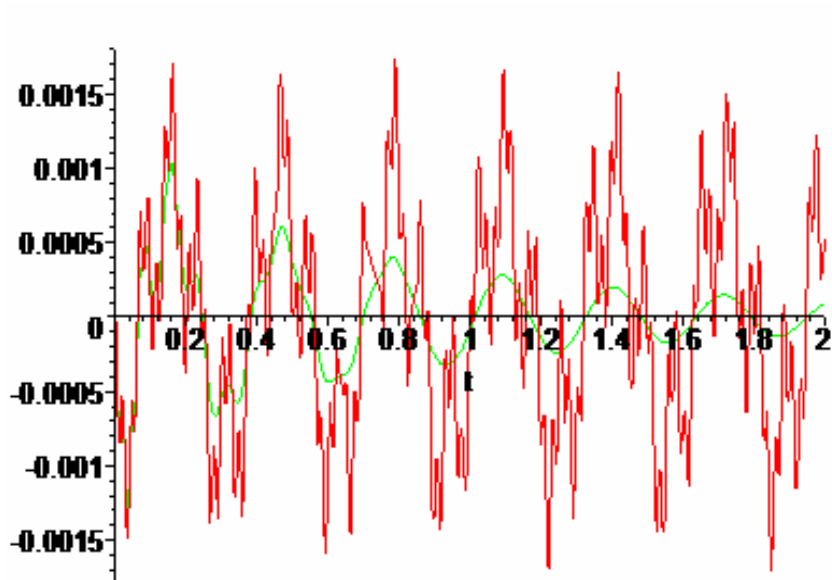
Σχήμα 4.1.51 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



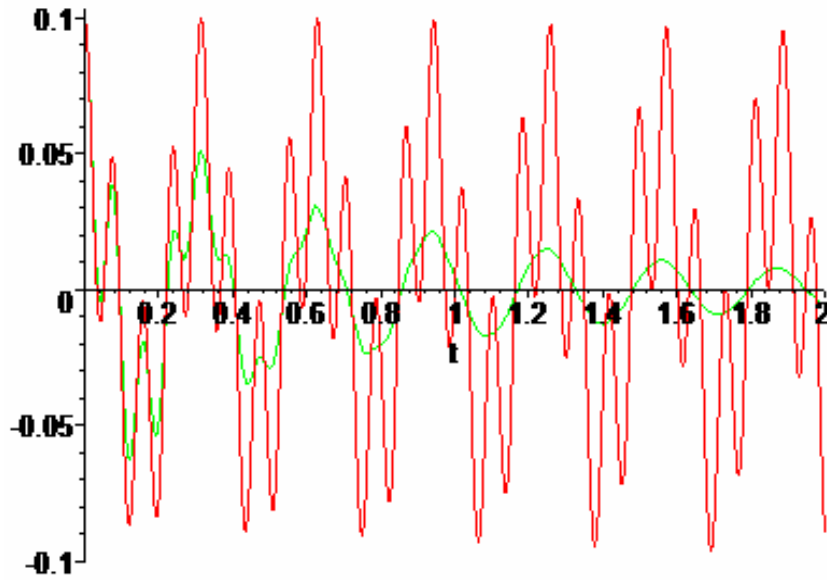
Σχήμα 4.1.52 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



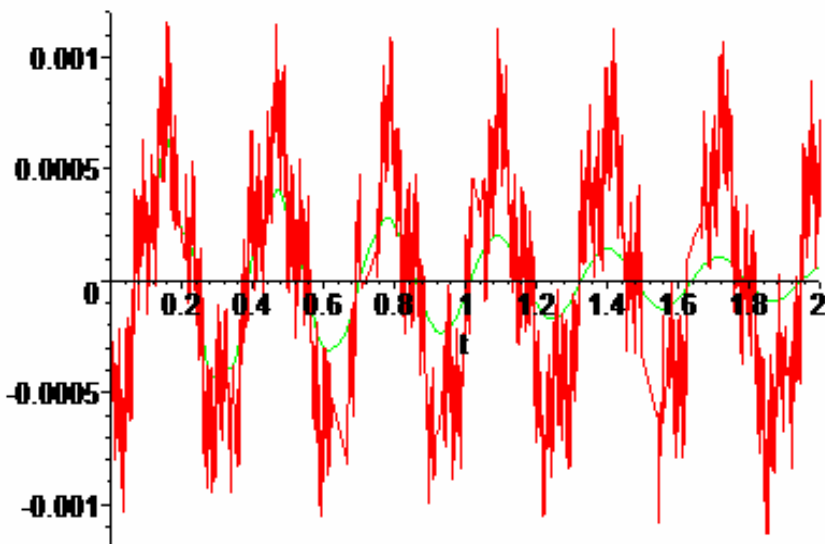
Σχήμα 4.1.53 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.1.54 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



Σχήμα 4.1.55 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



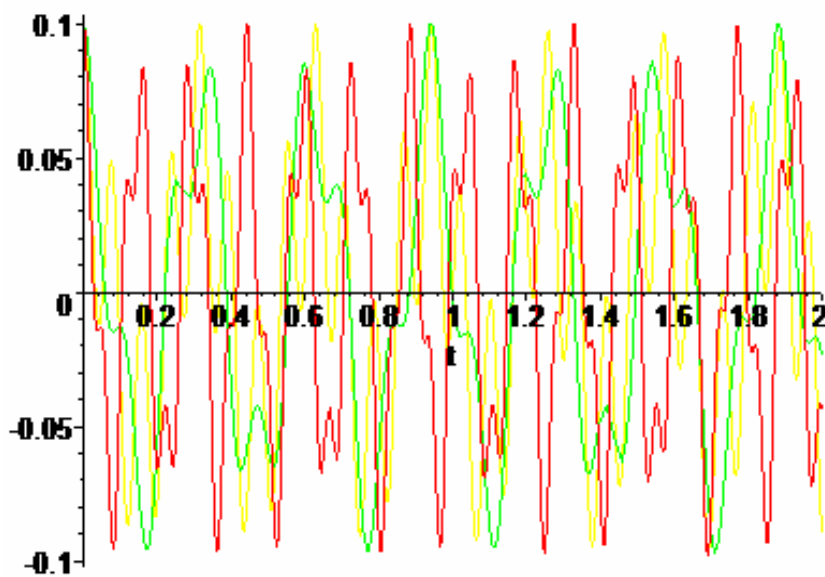
Σχήμα 4.1.56 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

#### 4.1.8 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση

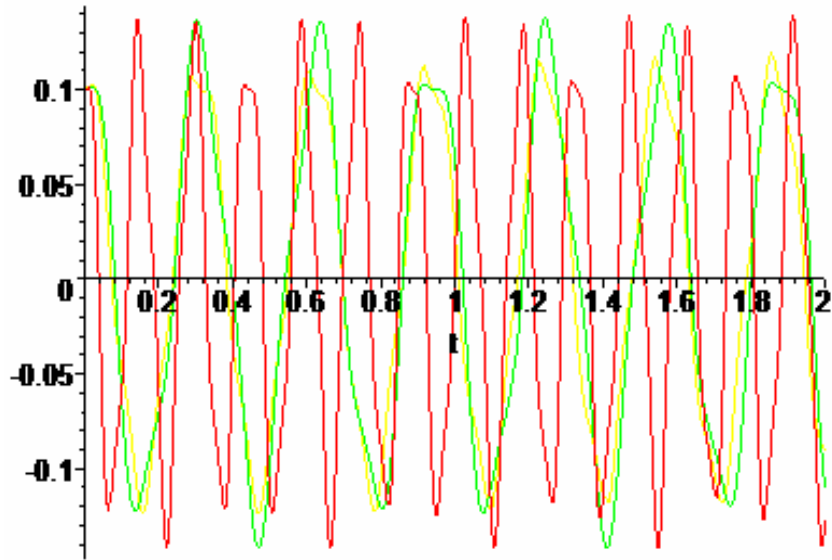
Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση.

Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση.

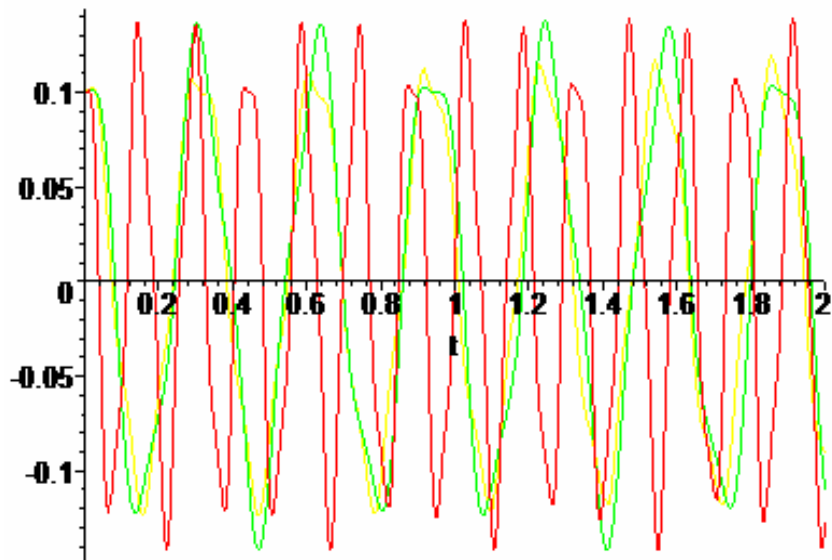
Με κίτρινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση.



Σχήμα 4.1.57 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .

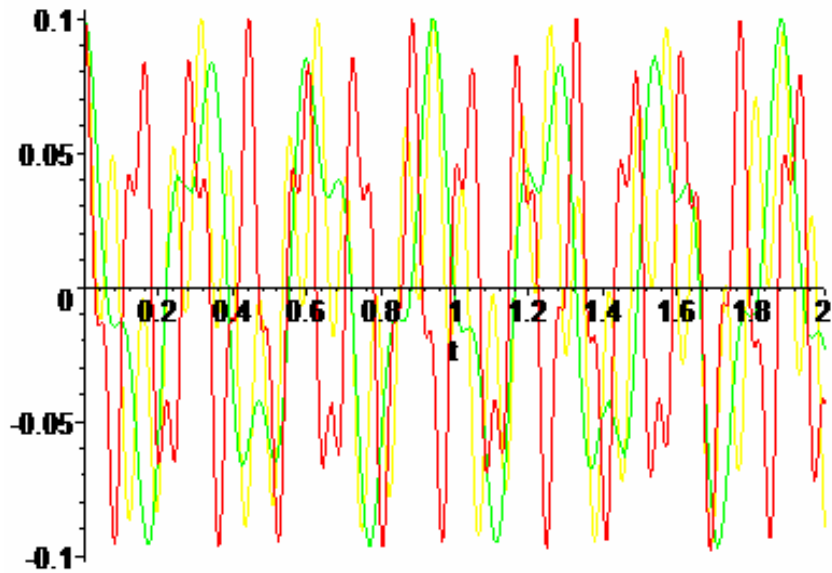


Σχήμα 4.1.58 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



Σχήμα 4.1.59 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .





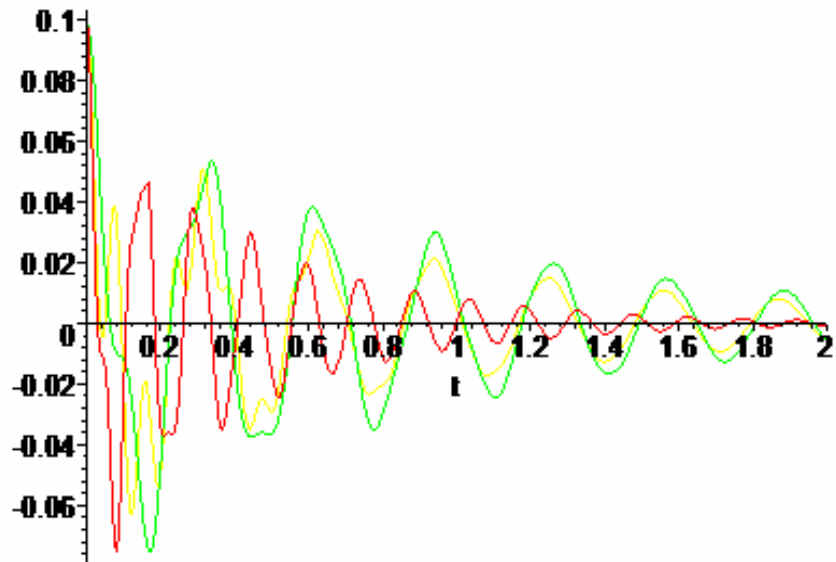
Σχήμα 4.1.60 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .

#### 4.1.9 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση

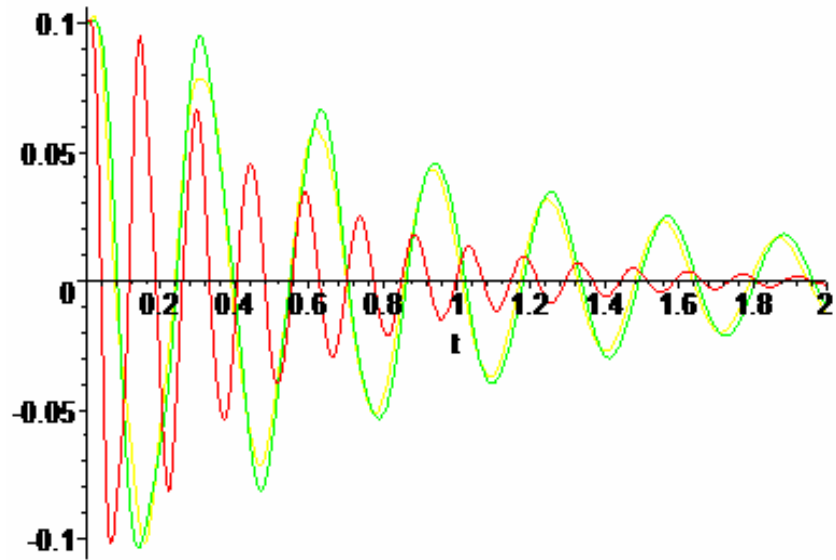
Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση.

Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση.

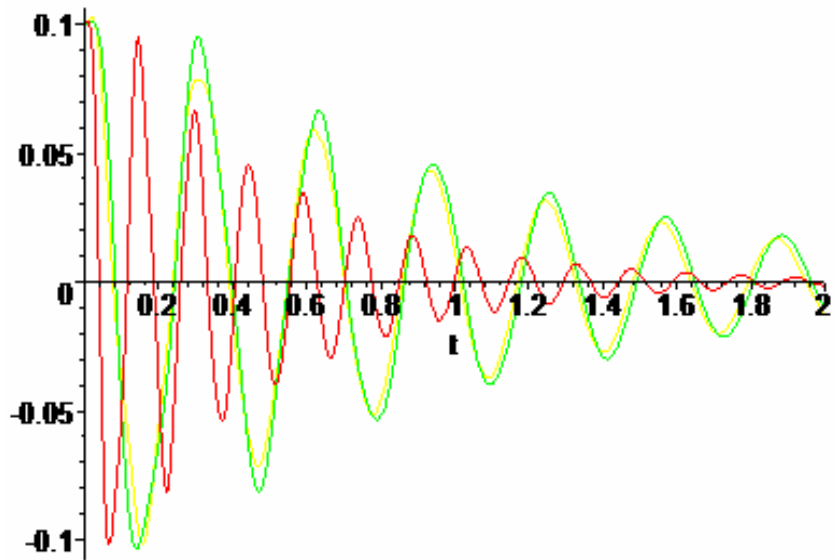
Με κίτρινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση



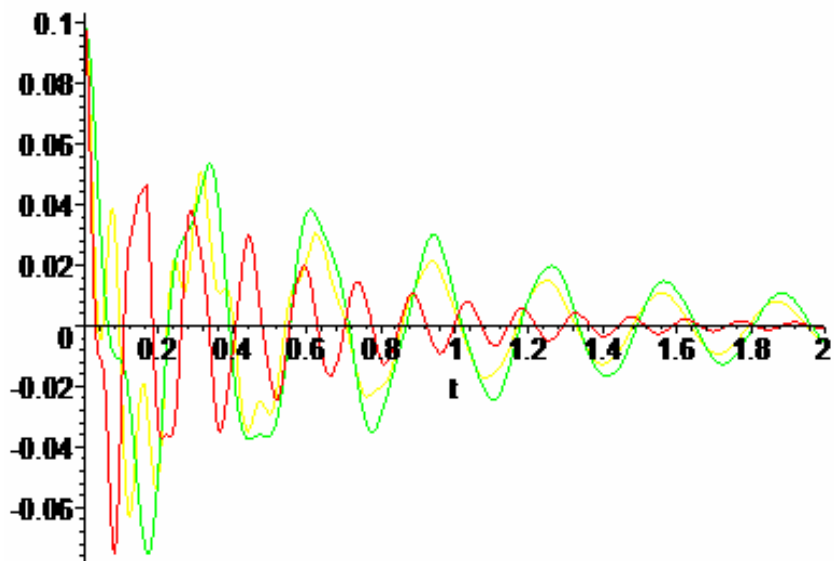
Σχήμα 4.1.61 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



Σχήμα 4.1.62 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



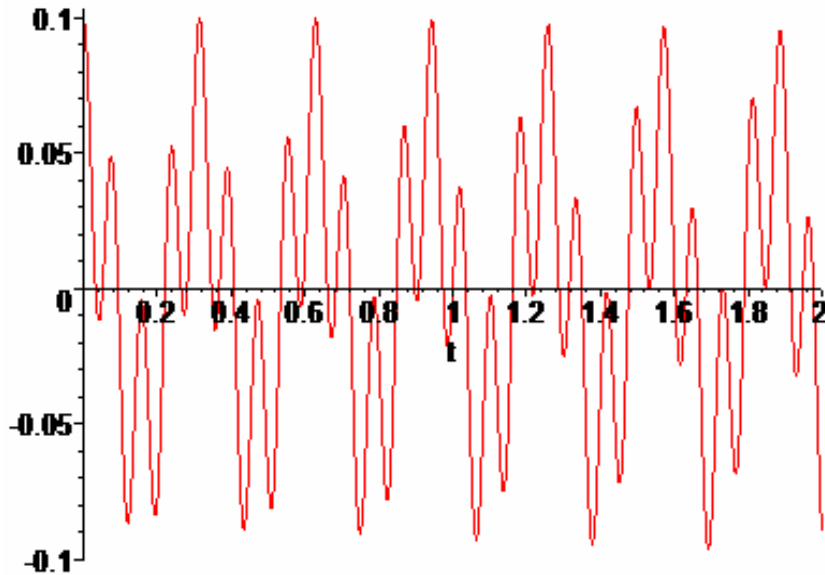
Σχήμα 4.1.63 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



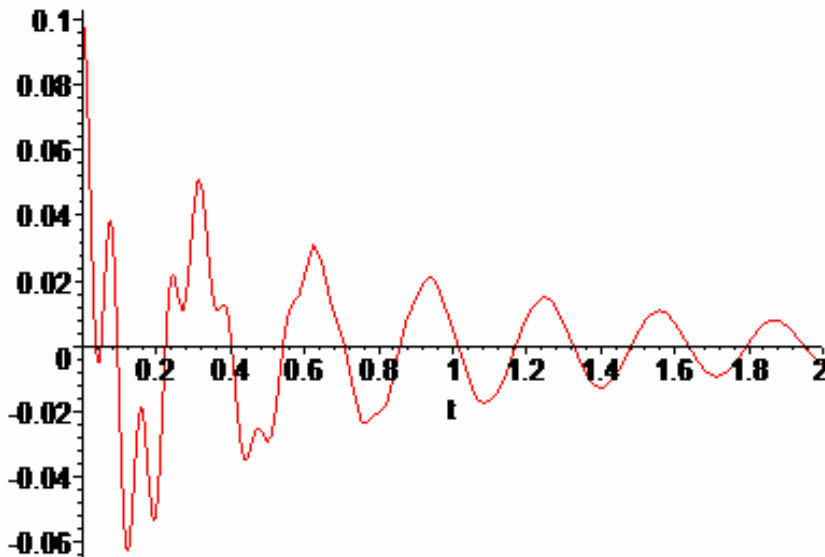
Σχήμα 4.1.64 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$

#### 4.1.10 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς και με απόσβεση των μετατοπίσεων του πρώτου ορόφου.

Στο καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα εμφανίζεται μία καμπύλη γιατί οι μετατοπίσεις  $u_1(t)$  και  $u_7(t)$  είναι ίσες.

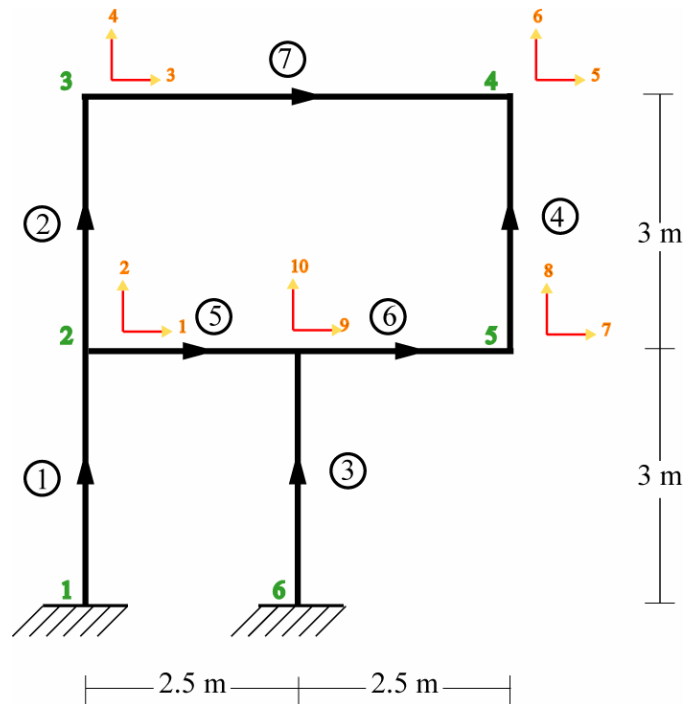


Σχήμα 4.1.65 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ ,  $u_7(t)$  χωρίς απόσβεση



Σχήμα 4.1.66 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ ,  $u_7(t)$  με απόσβεση

## 4.2 ΠΛΑΙΣΙΟ 2



Το πλαίσιο αποτελείται από επτά ράβδους. Το εμβαδό της διατομής των καθέτων ράβδων είναι  $30 \times 30 \text{ cm}^2$  ενώ των οριζόντιων ράβδων είναι  $60 \times 30 \text{ cm}^2$ .

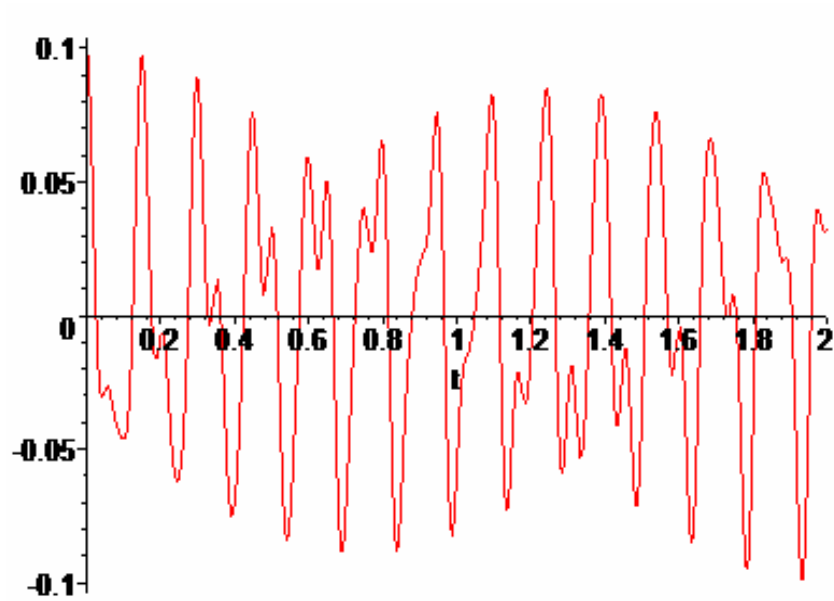
Τα δεδομένα είναι:

Σκυρόδεμα C20/25:  $E = 2.9 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\rho = 2.4 \text{ ton/m}^3$ ,  $\xi = 0.05$ .

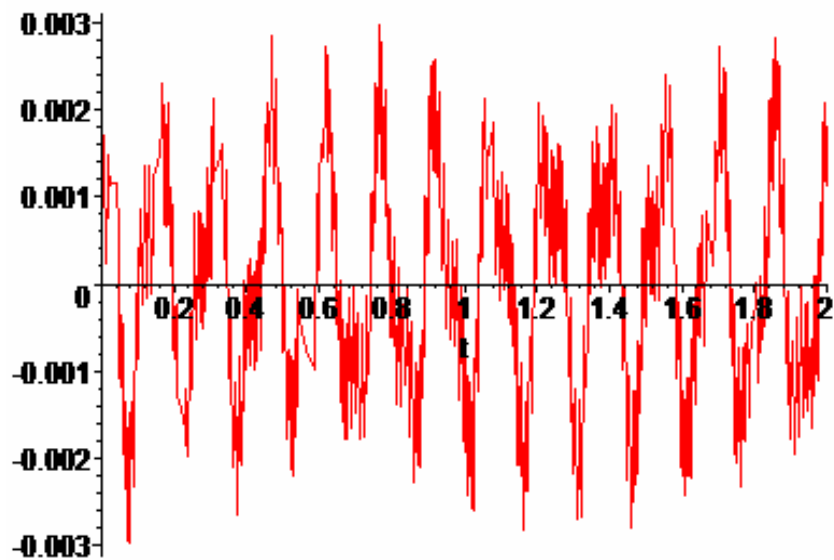
Χάλυβας S500:  $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\rho = 7.85 \text{ ton/m}^3$ ,  $\xi = 0.04$ .

Στην περίπτωση σύνθετης κατασκευής στους κοινούς κόμβους  $\xi = 0.045$ .

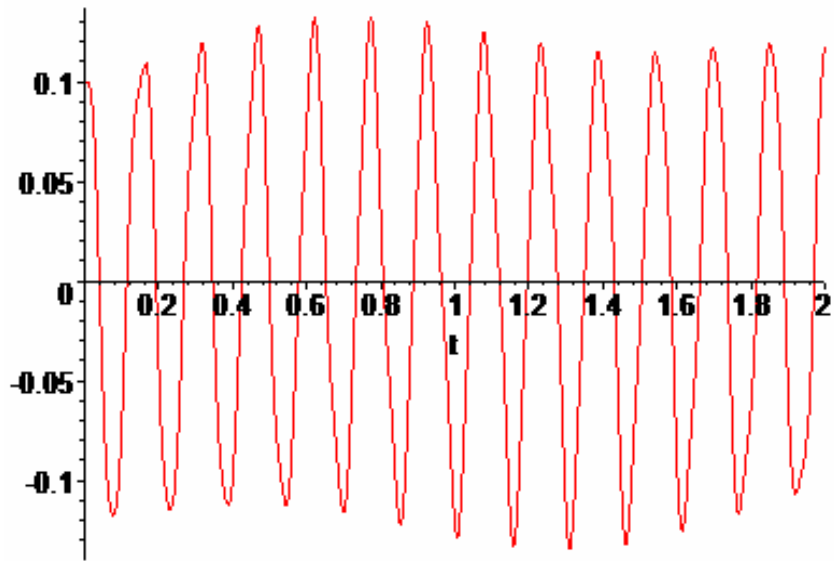
### 4.2.1 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση



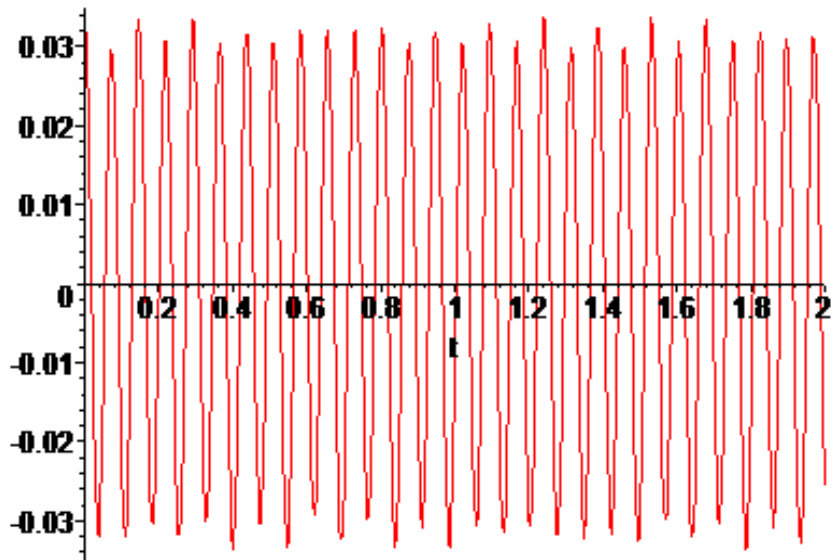
Σχήμα 4.2.1 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



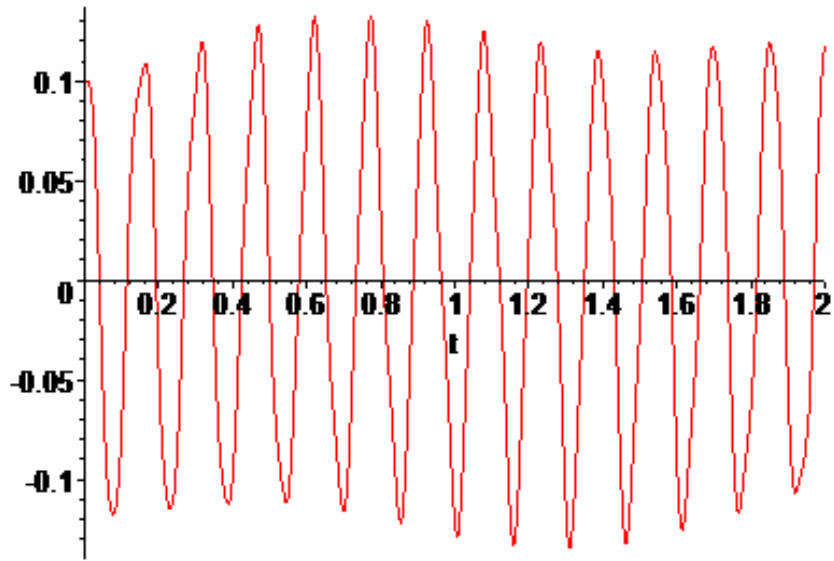
Σχήμα 4.2.2 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



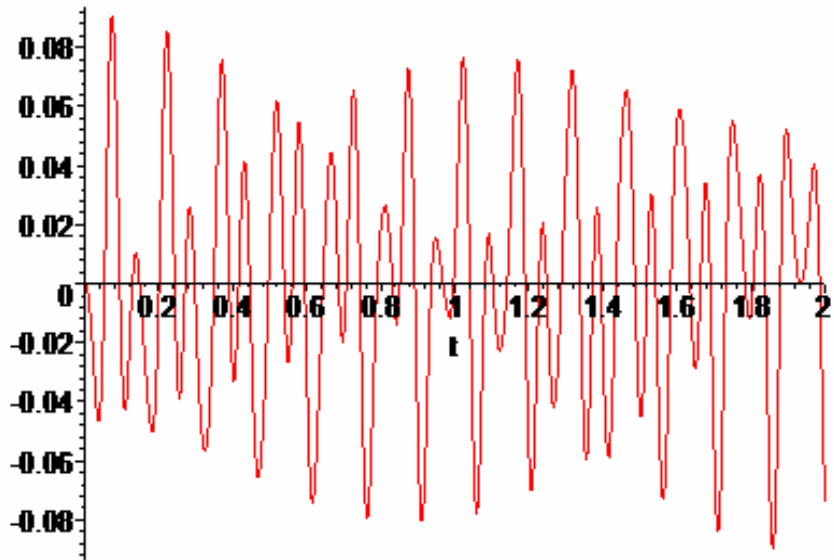
Σχήμα 4.2.3 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



Σχήμα 4.2.4 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .

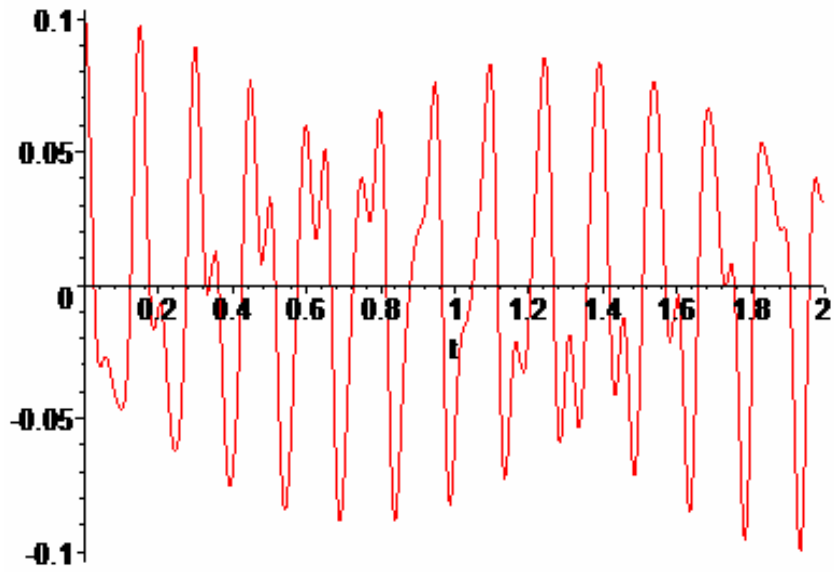


Σχήμα 4.2.5 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .

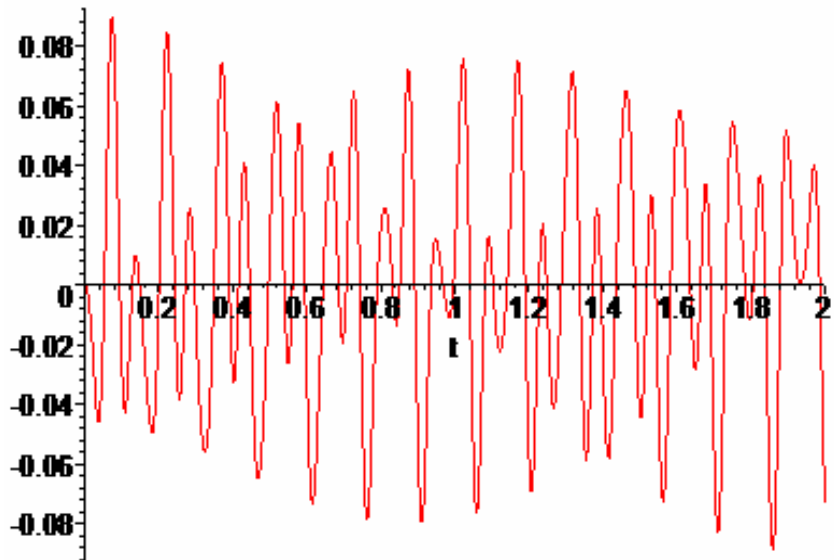


Σχήμα 4.2.6 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .

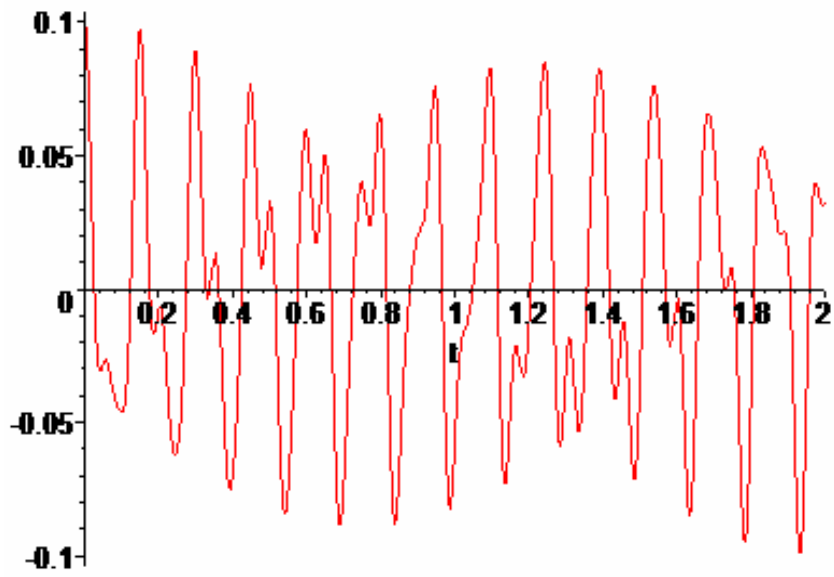




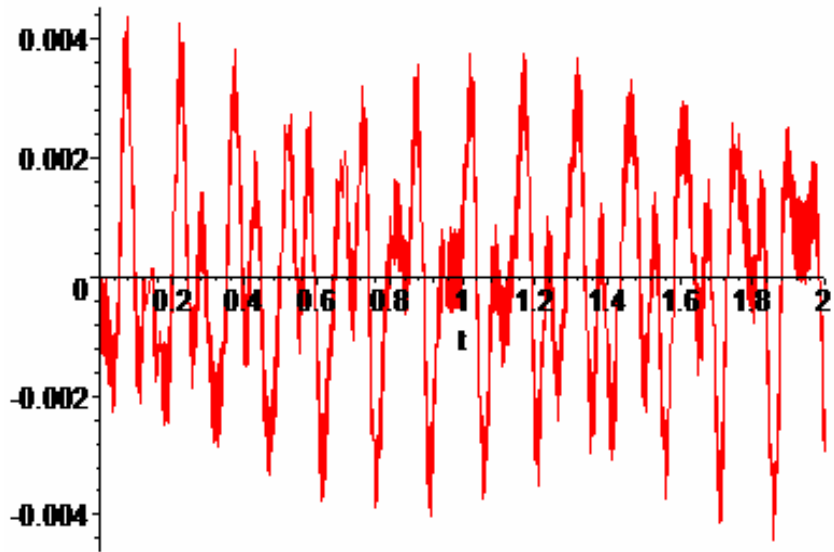
Σχήμα 4.2.7 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.8 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

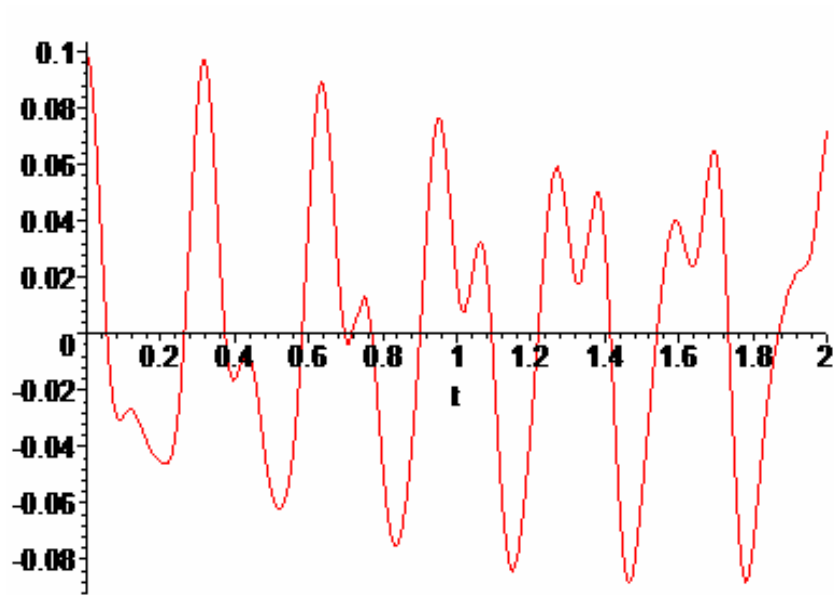


Σχήμα 4.2.9 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

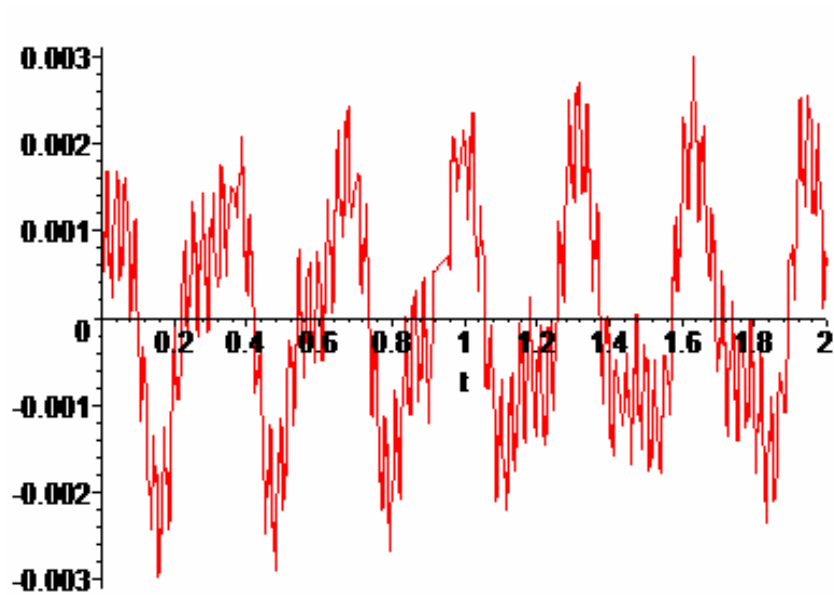


Σχήμα 4.2.10 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

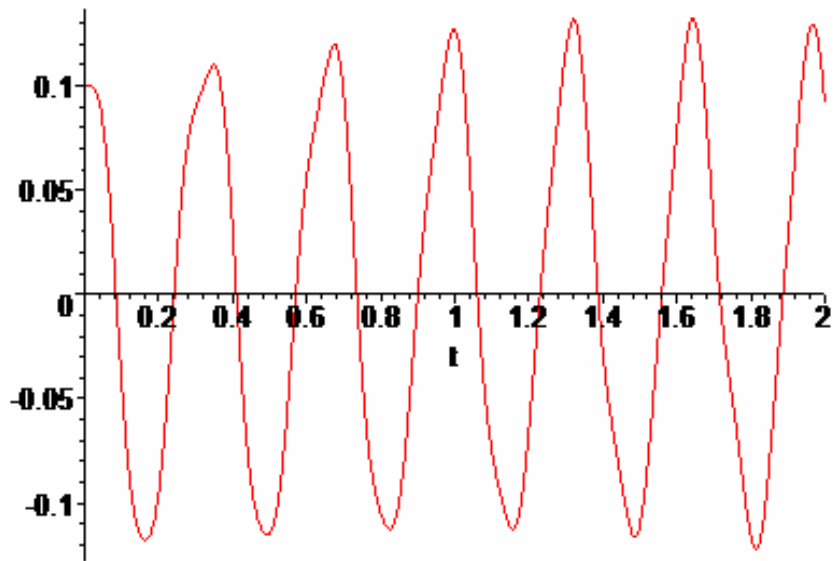
### 4.2.2 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση



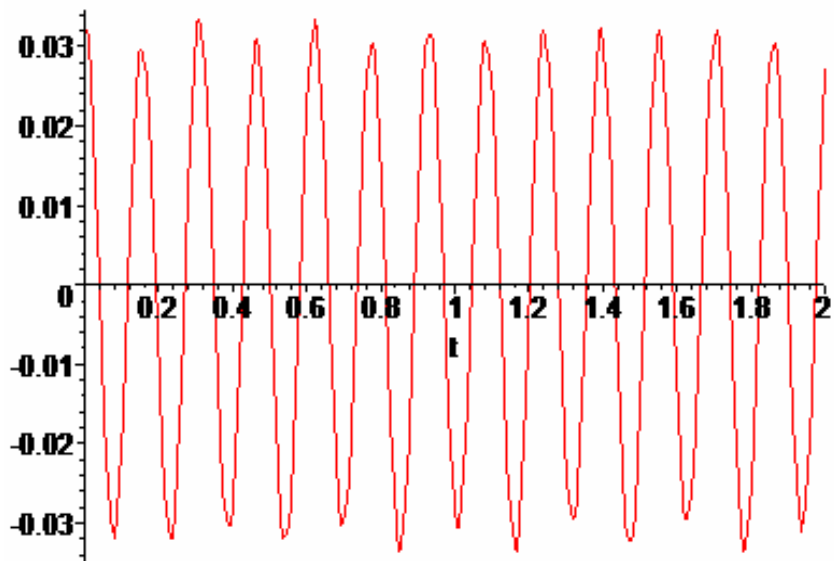
Σχήμα 4.2.11 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



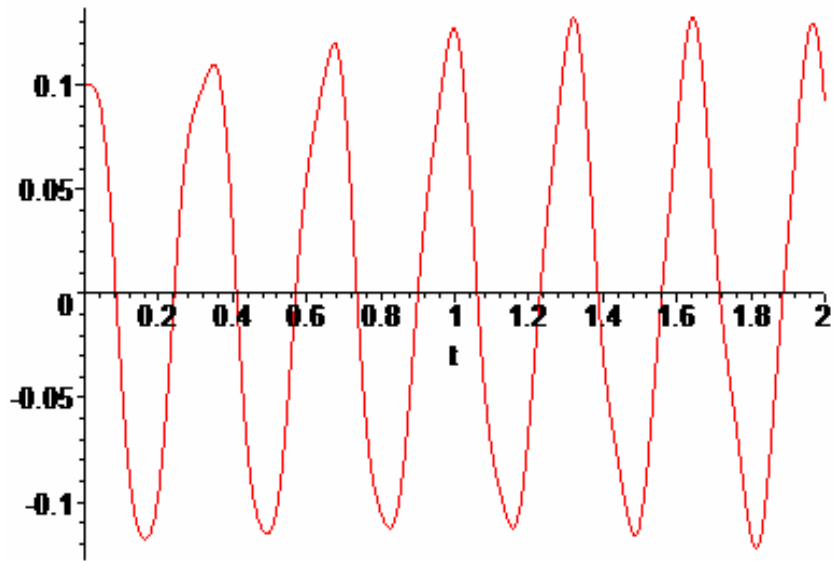
Σχήμα 4.2.12 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



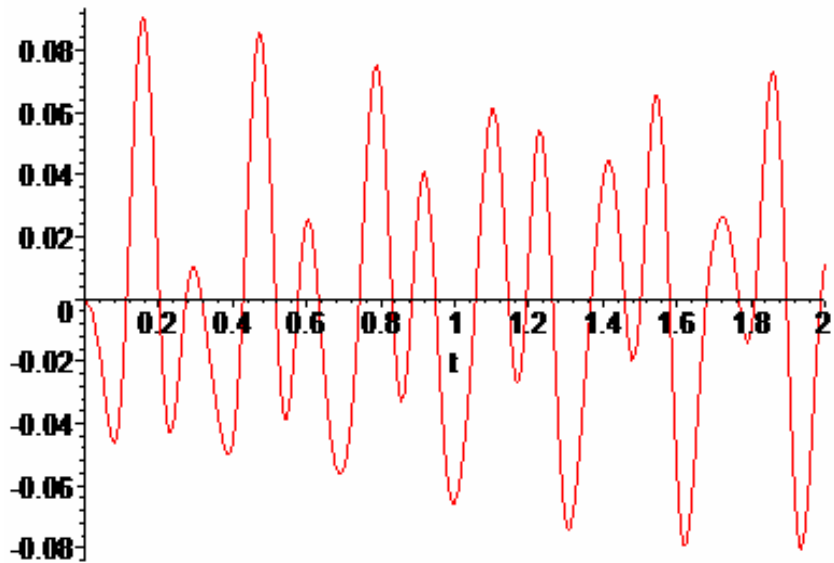
Σχήμα 4.2.13 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



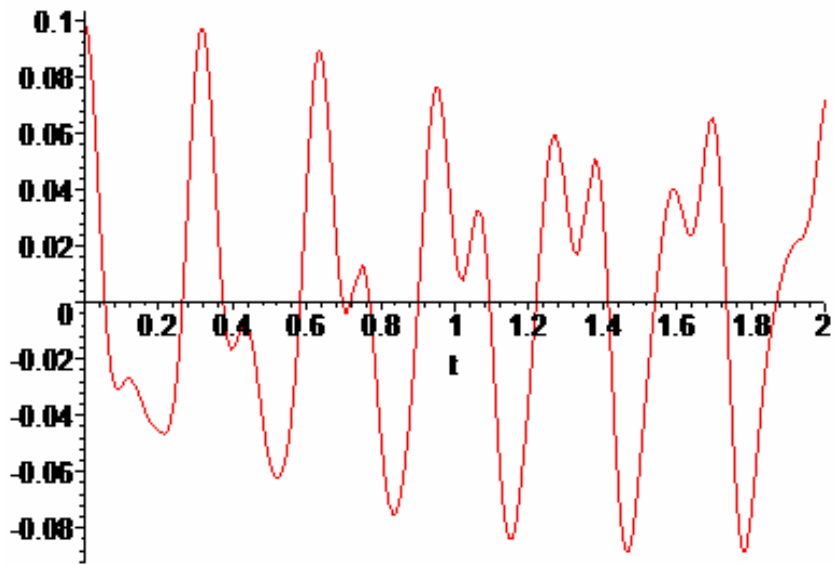
Σχήμα 4.2.14 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



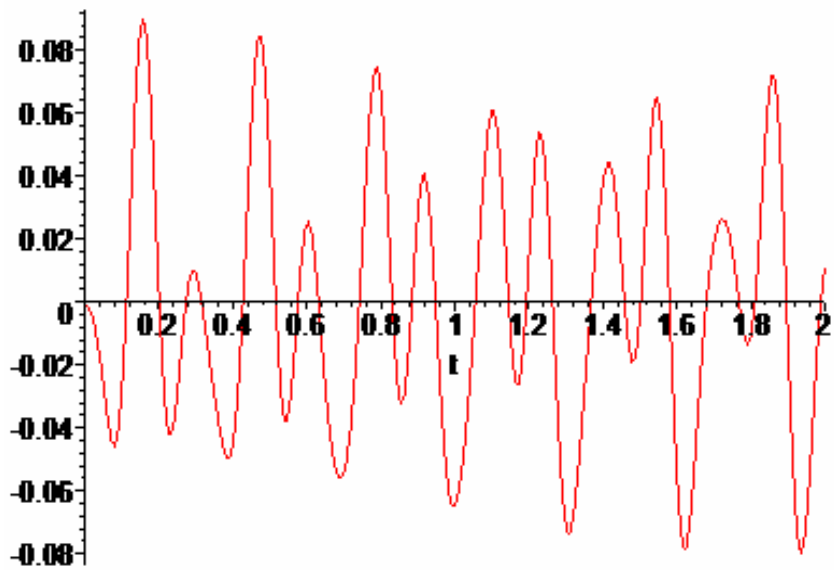
Σχήμα 4.2.15 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



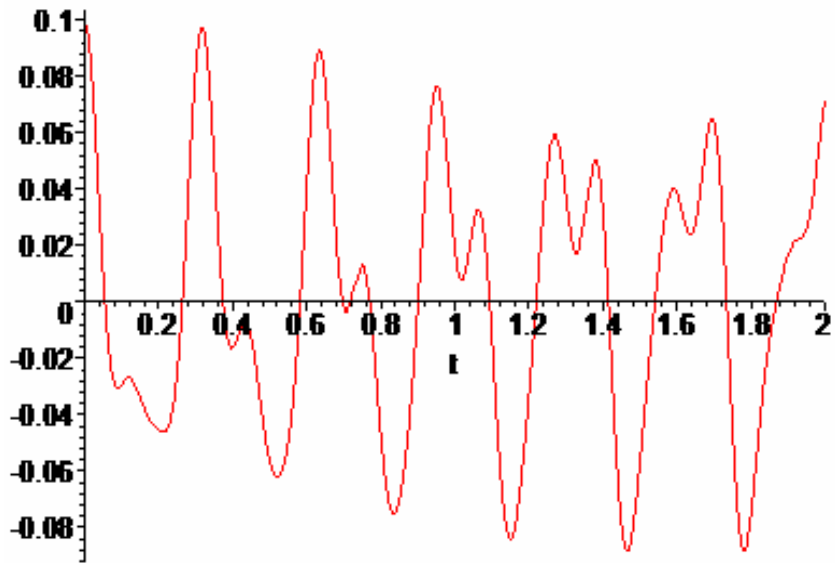
Σχήμα 4.2.16 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



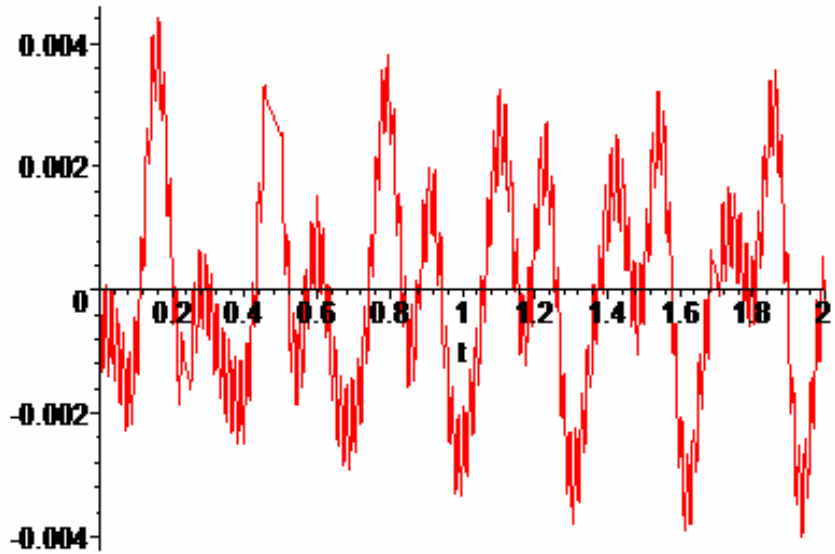
Σχήμα 4.2.17 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.18 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

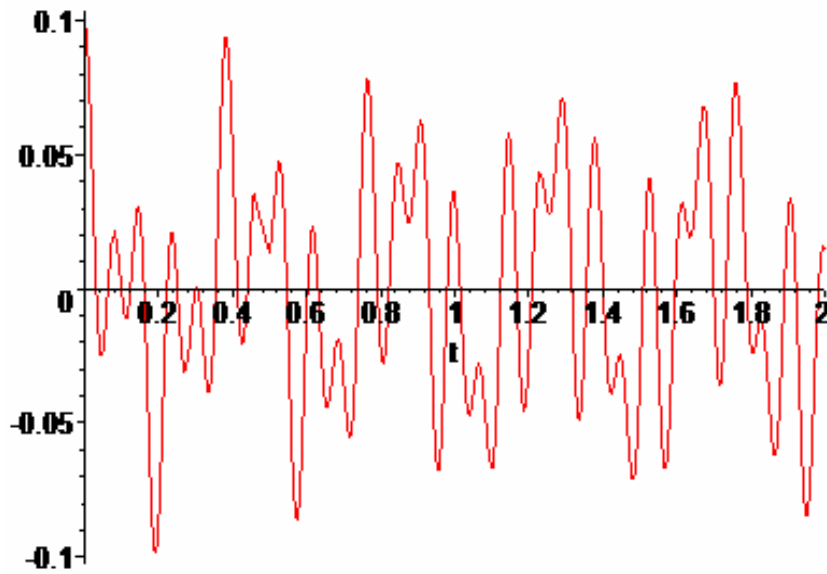


Σχήμα 4.2.19 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

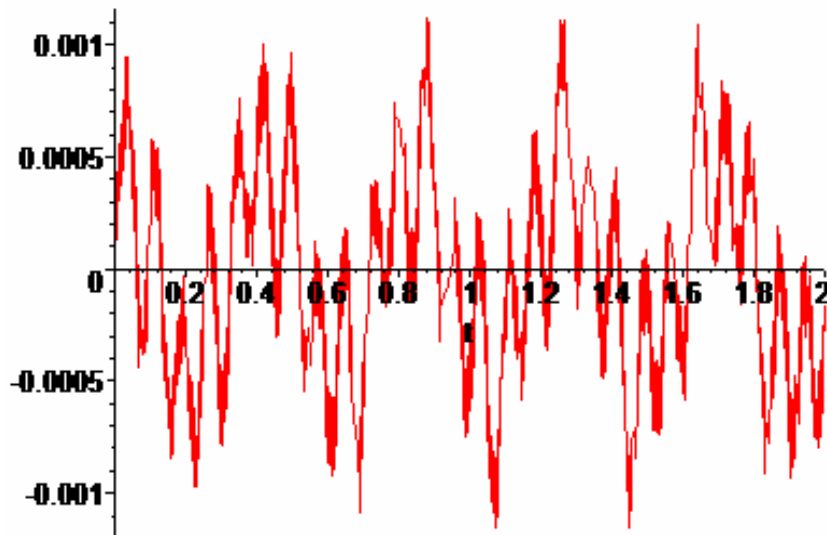


Σχήμα 4.2.20 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

### 4.2.3 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση

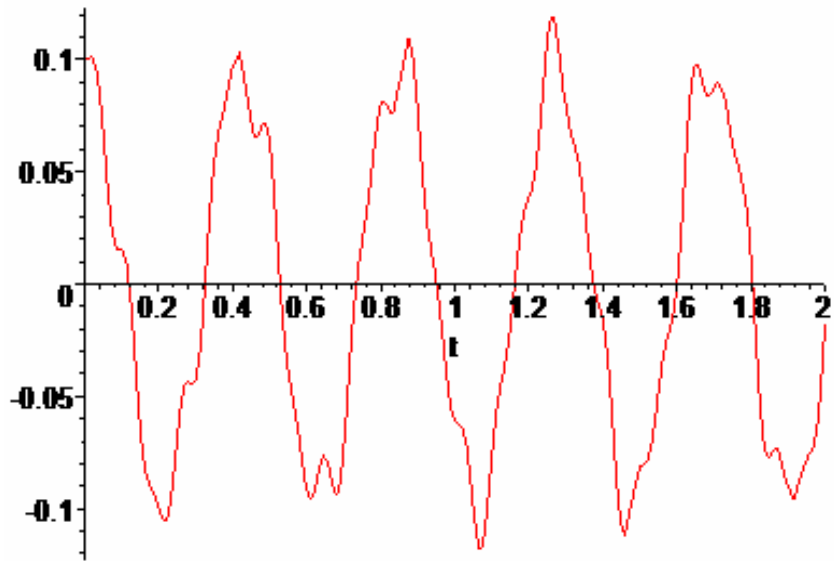


Σχήμα 4.2.21 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .

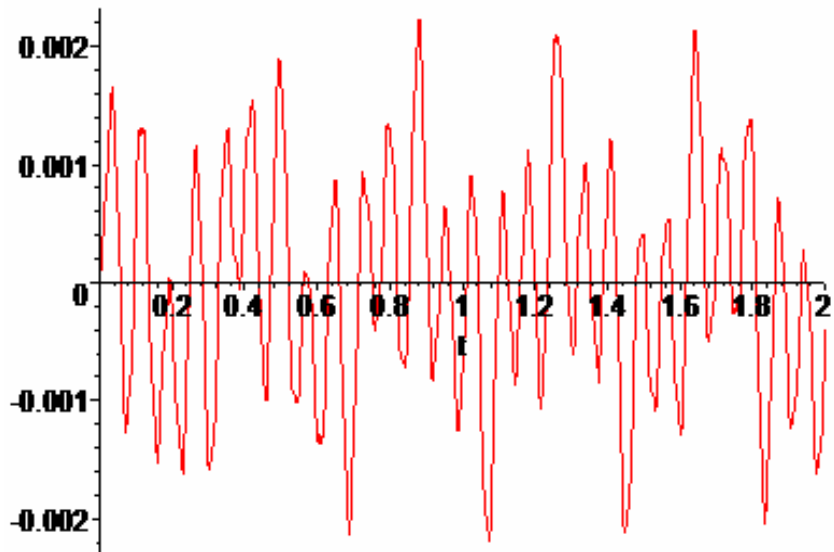


Σχήμα 4.2.22 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .

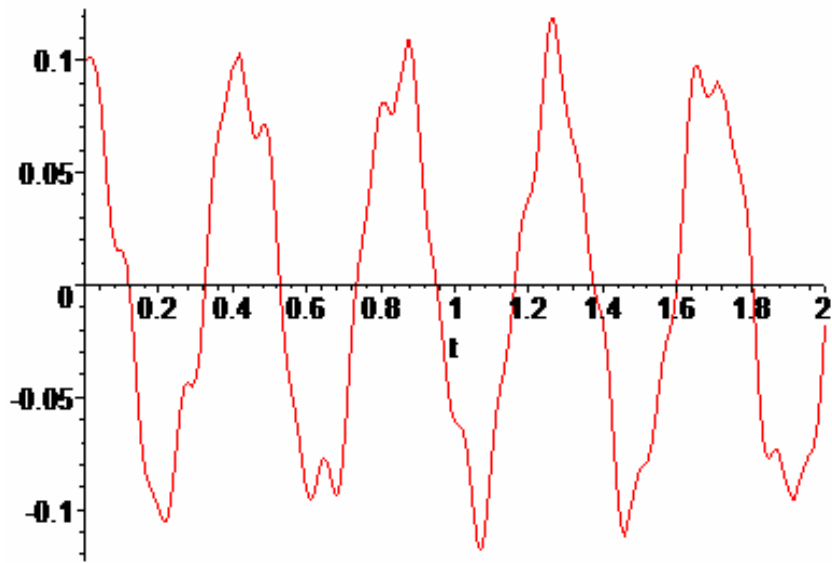




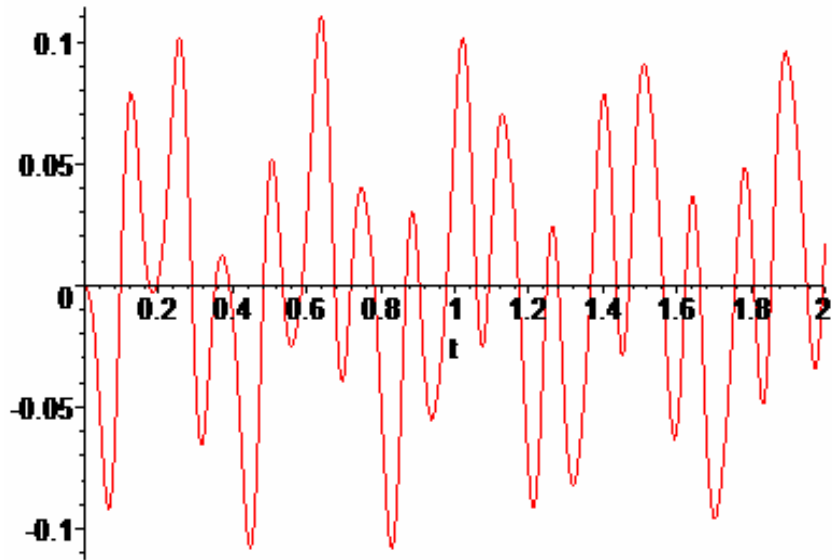
Σχήμα 4.2.23 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



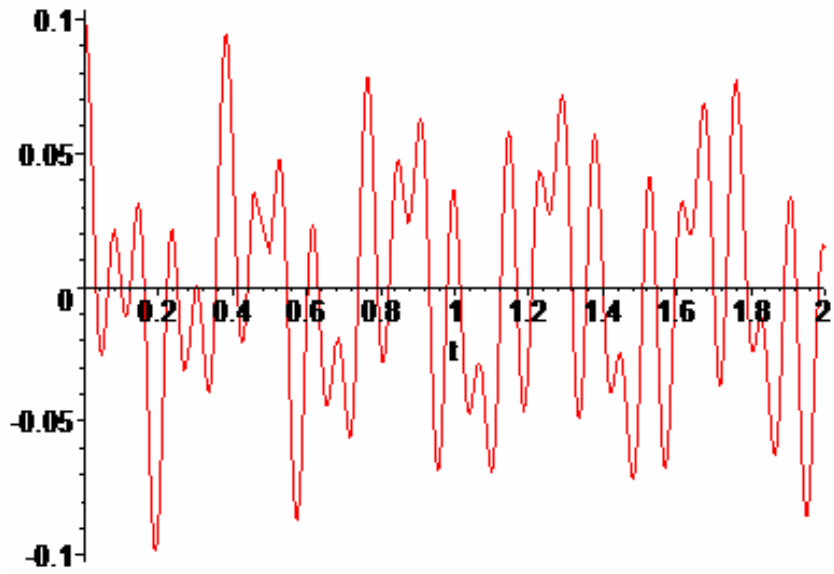
Σχήμα 4.2.24 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



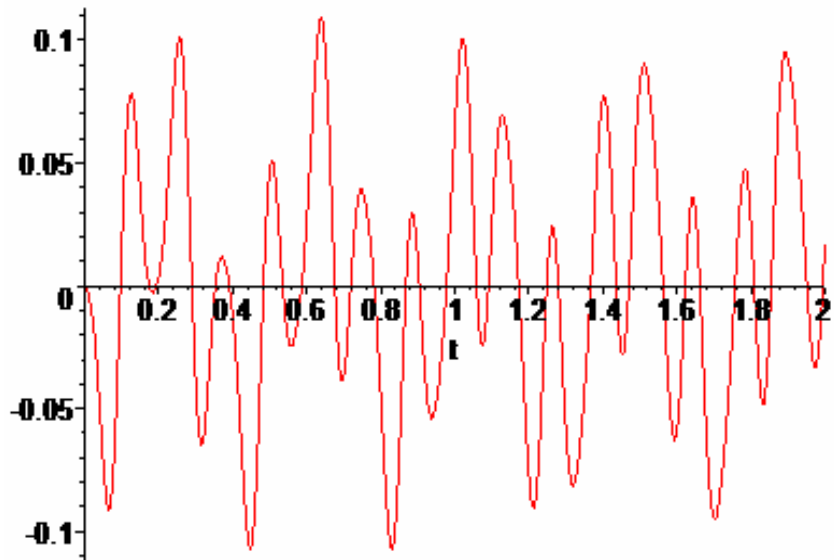
Σχήμα 4.2.25 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



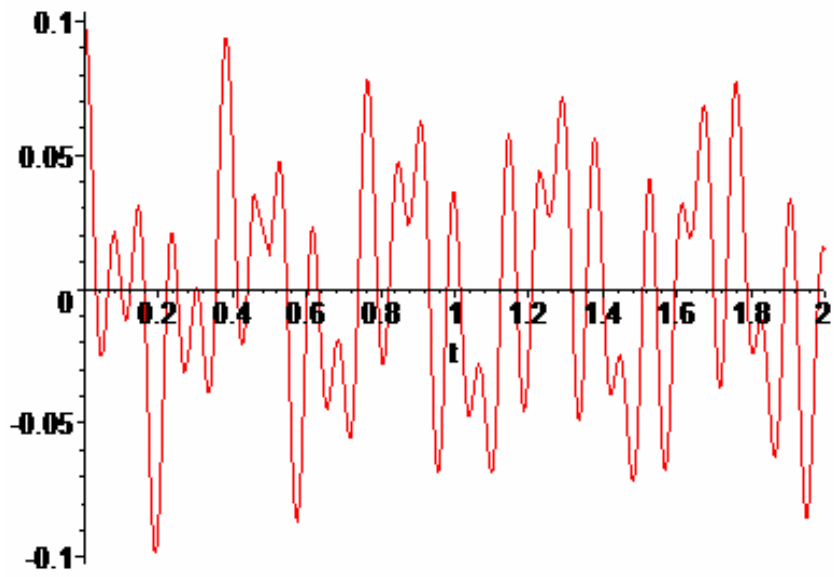
Σχήμα 4.2.26 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



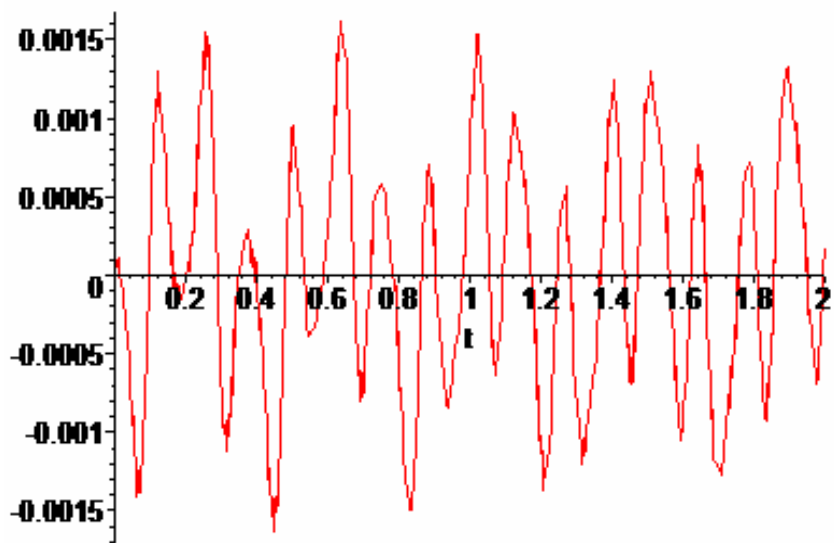
Σχήμα 4.2.27 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.28 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

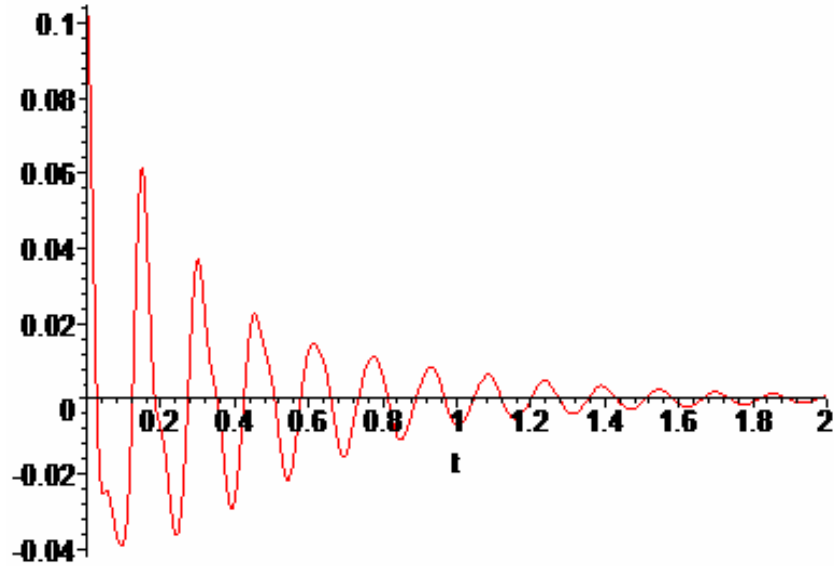


Σχήμα 4.2.29 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

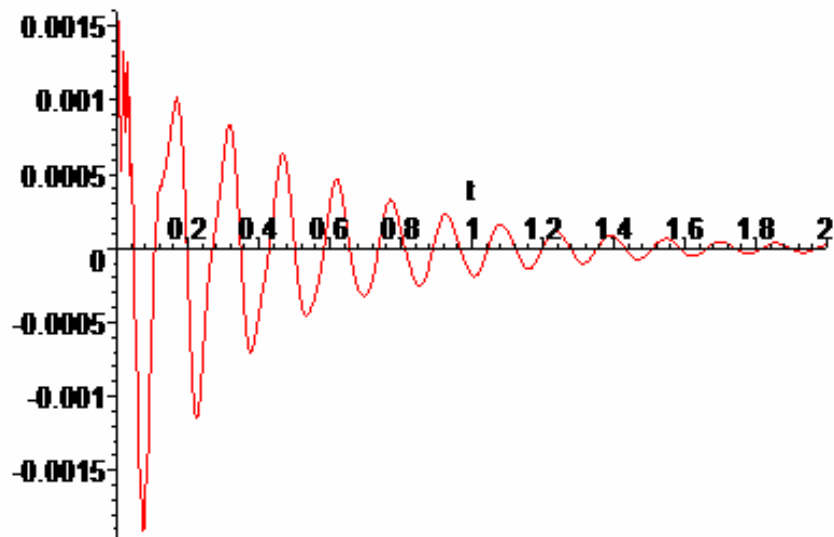


Σχήμα 4.2.30 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

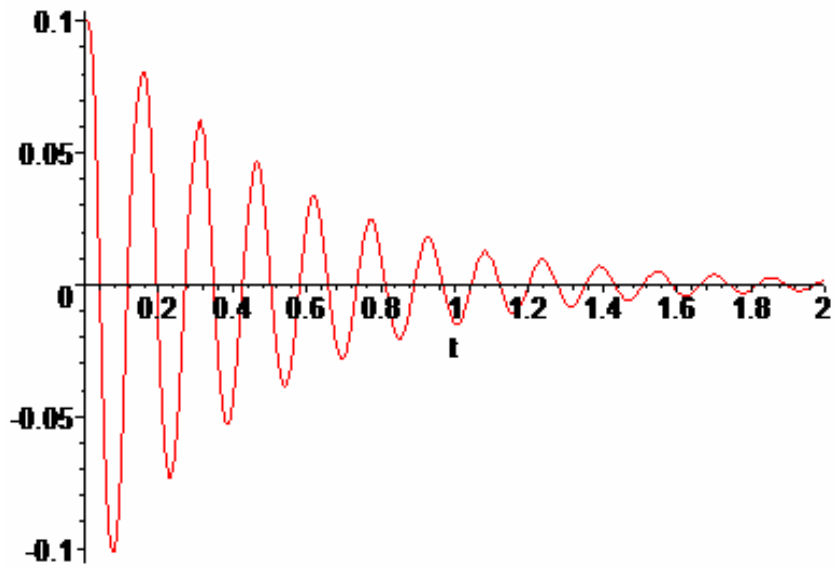
#### 4.2.4 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση



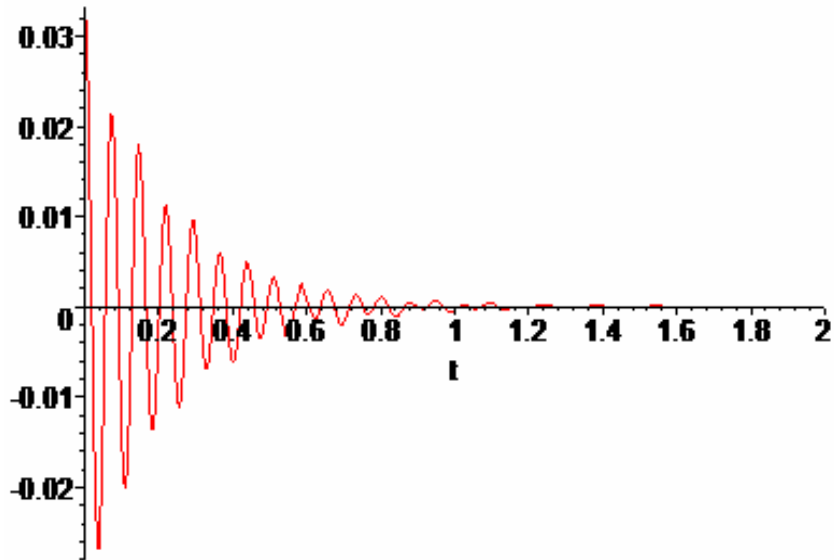
Σχήμα 4.2.31 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



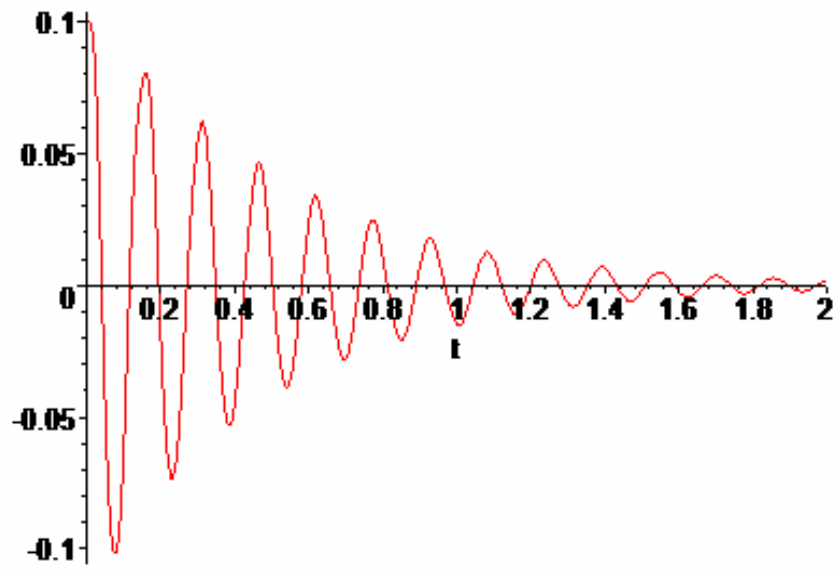
Σχήμα 4.2.32 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



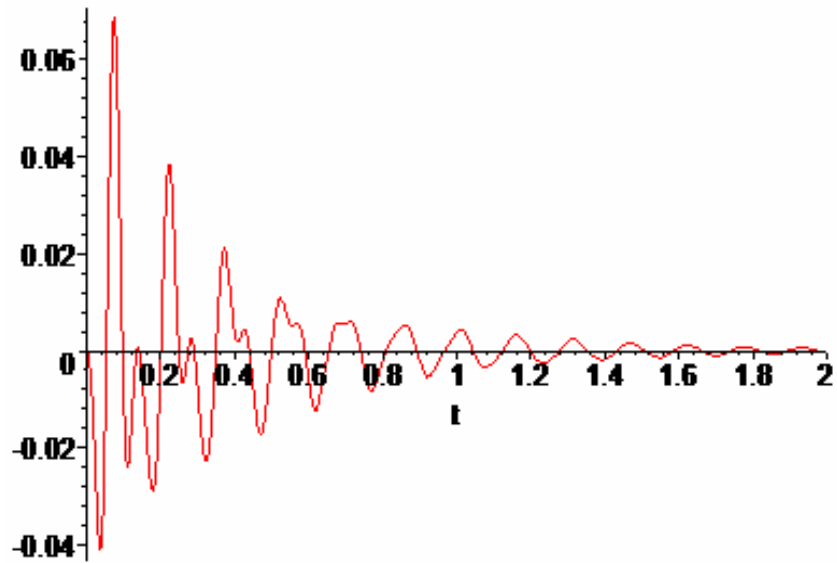
Σχήμα 4.2.33 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



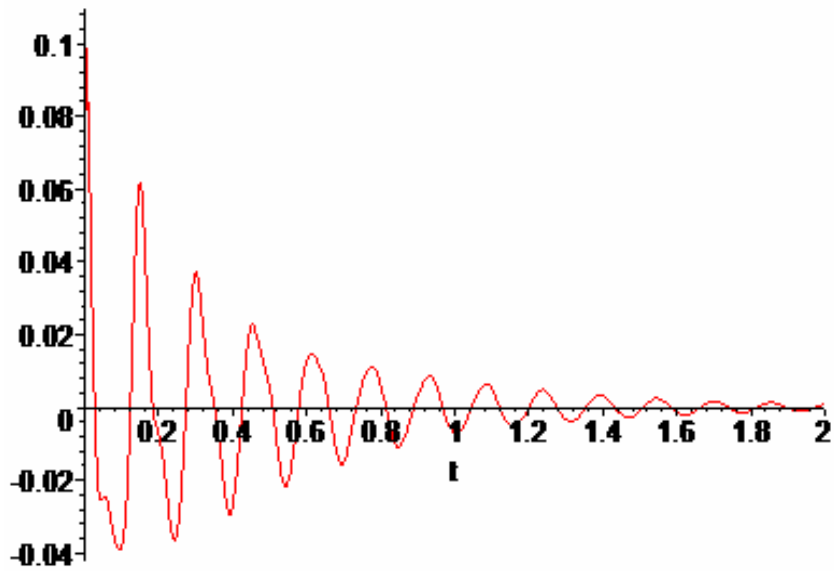
Σχήμα 4.2.34 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



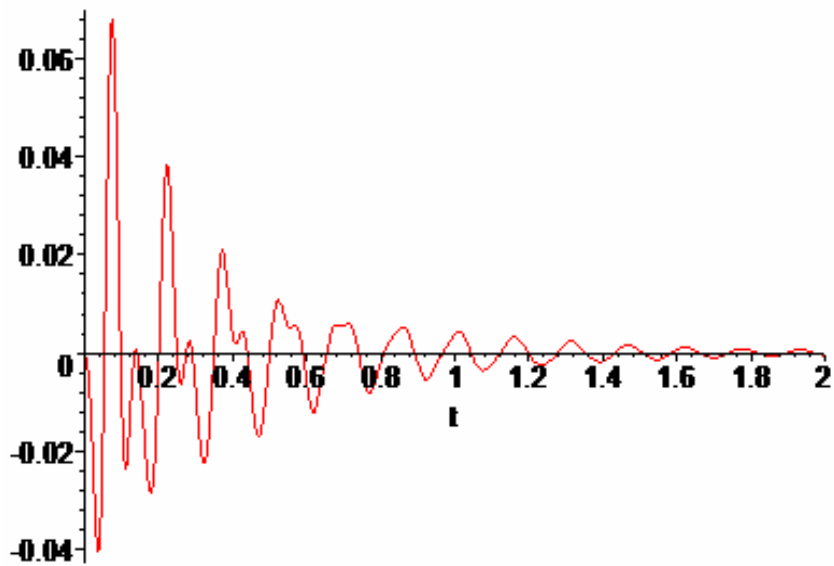
Σχήμα 4.2.35 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.2.36 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .

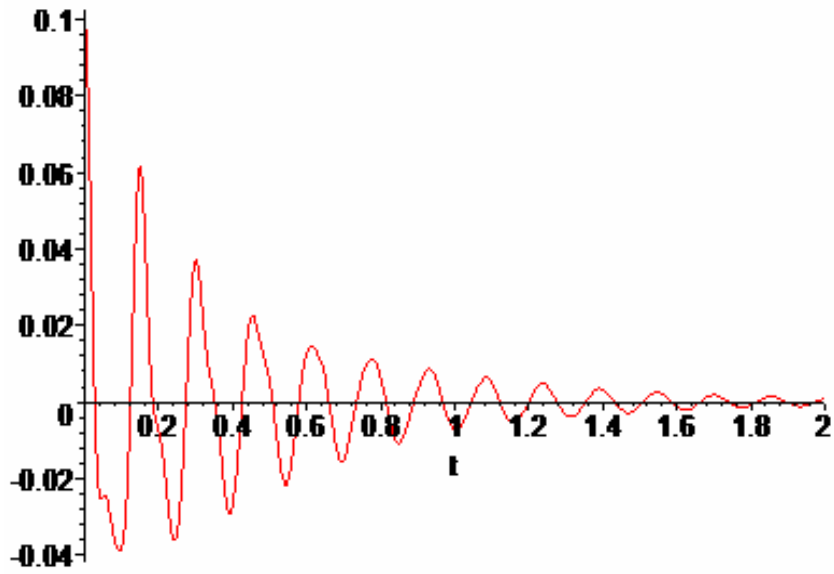


Σχήμα 4.2.37 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$  .

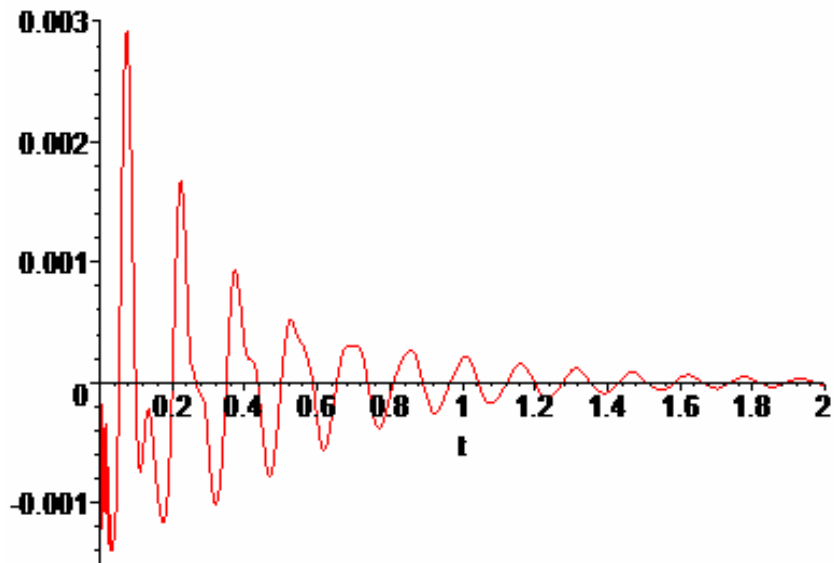


Σχήμα 4.2.38 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$  .



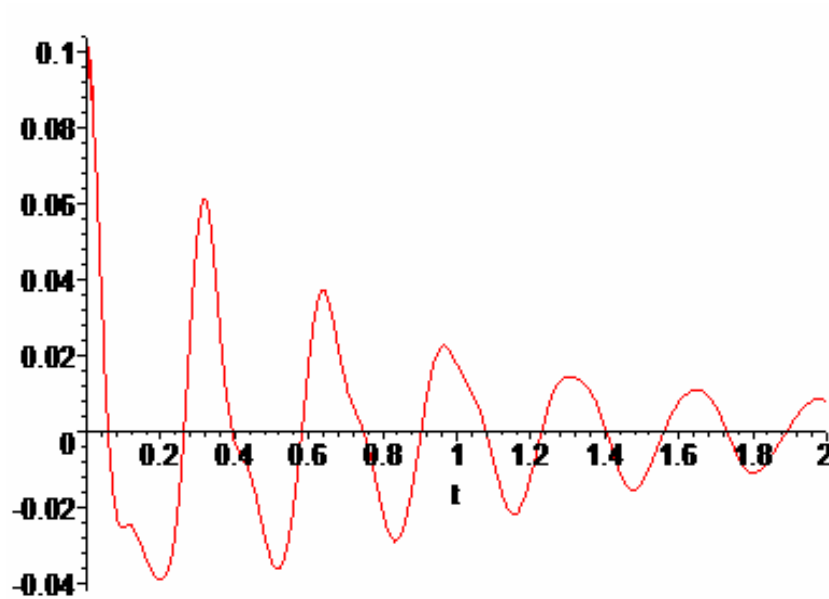


Σχήμα 4.2.39 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

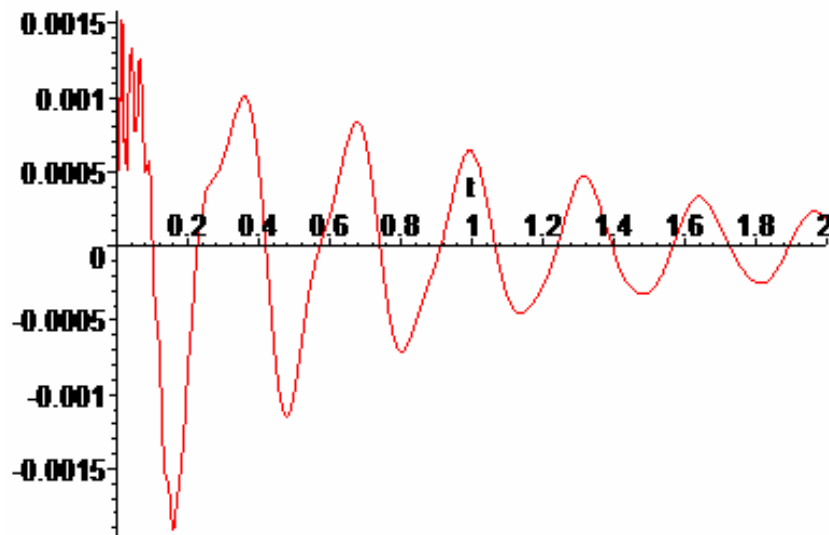


Σχήμα 4.2.40 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

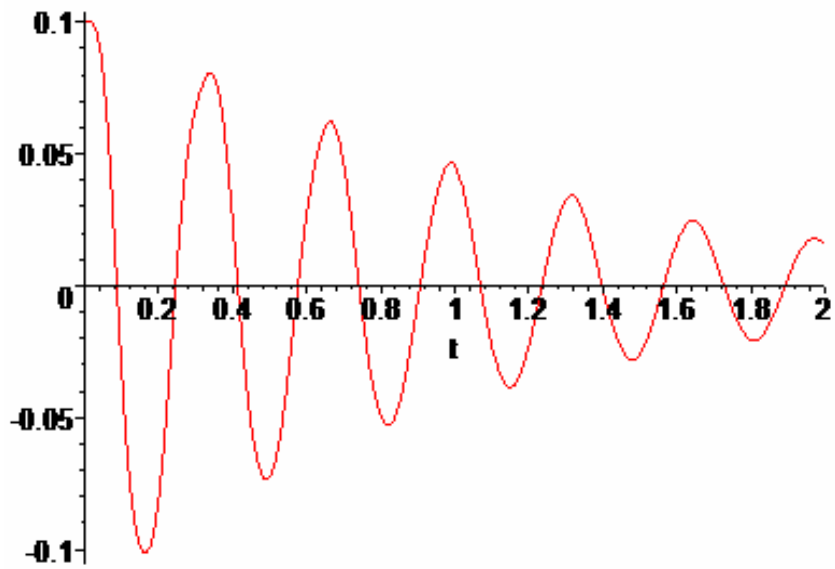
### 4.2.5 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση



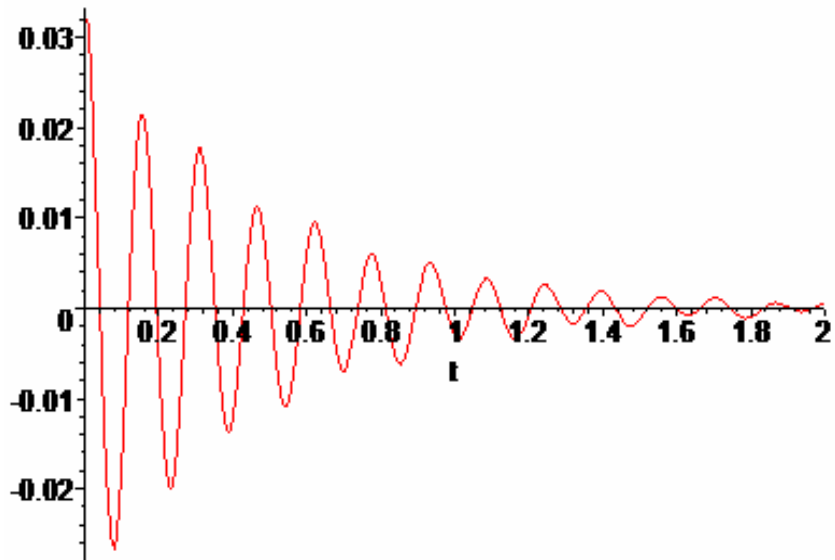
Σχήμα 4.2.41 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



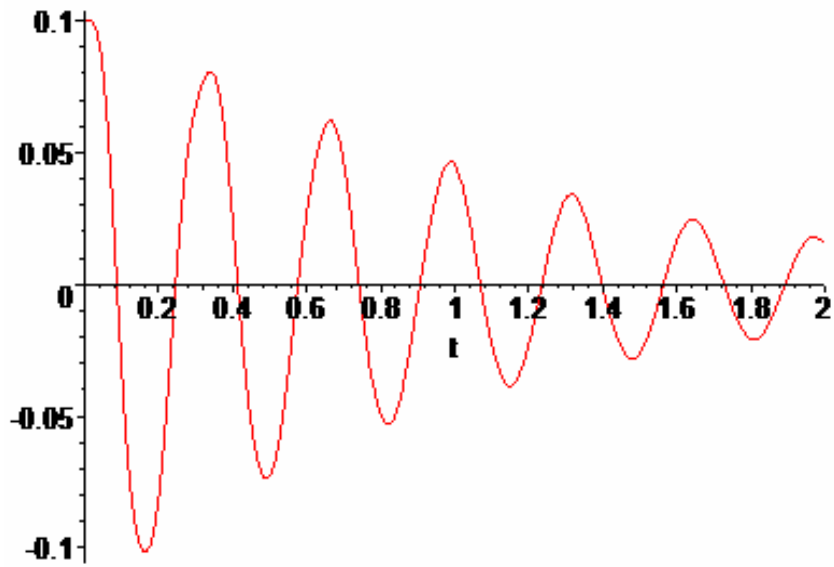
Σχήμα 4.2.42 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



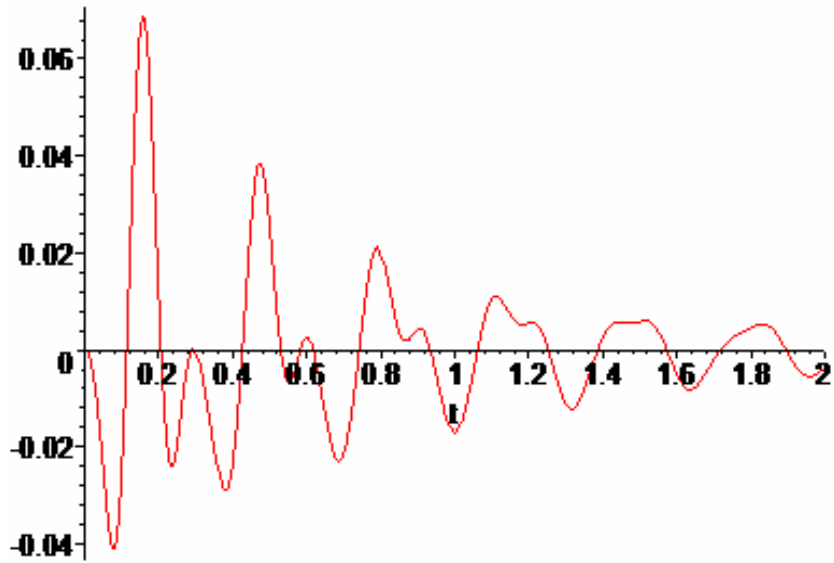
Σχήμα 4.2.43 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



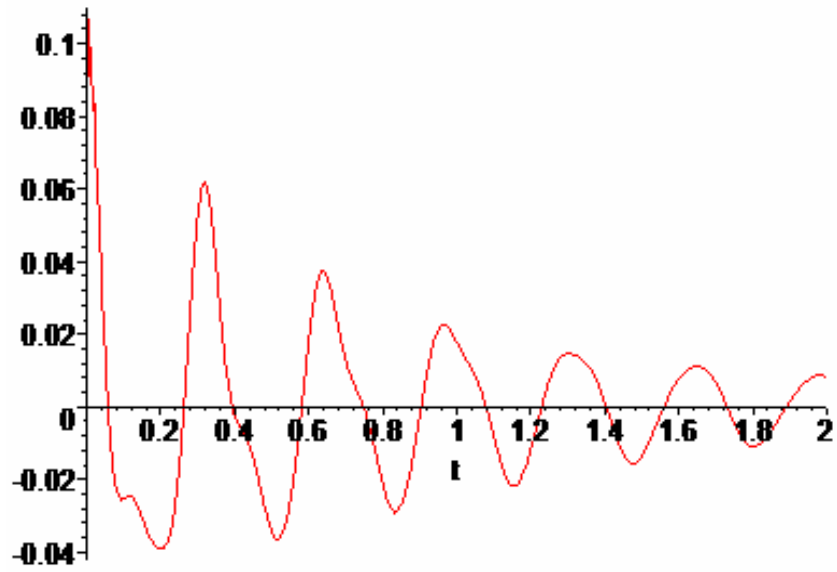
Σχήμα 4.2.44 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



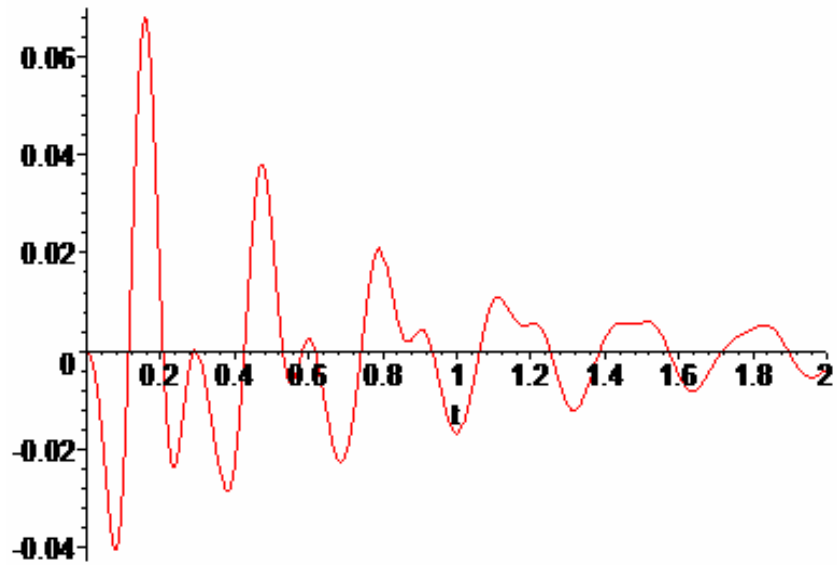
Σχήμα 4.2.45 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



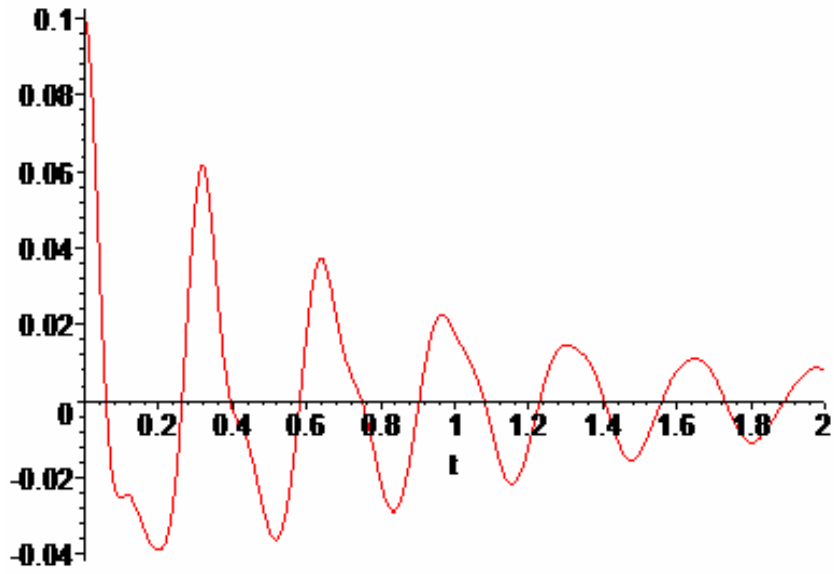
Σχήμα 4.2.46 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



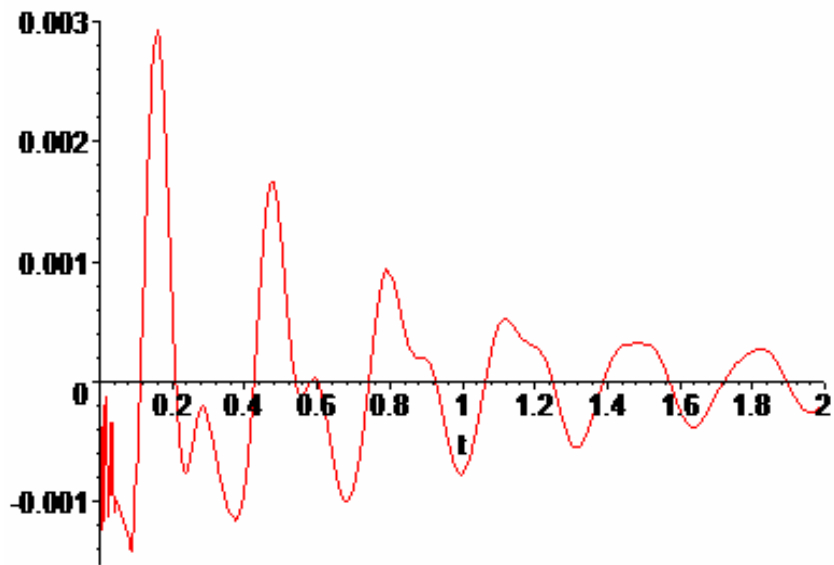
Σχήμα 4.2.47 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.48 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .

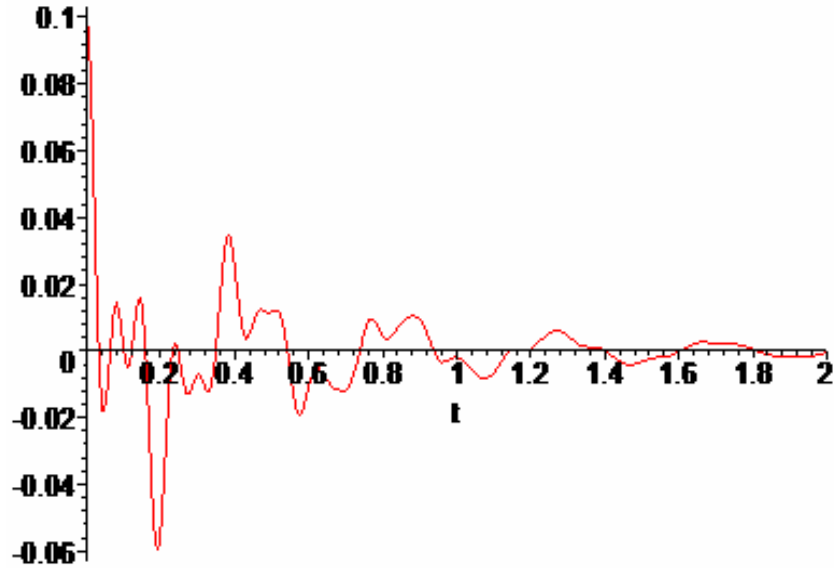


Σχήμα 4.2.49 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

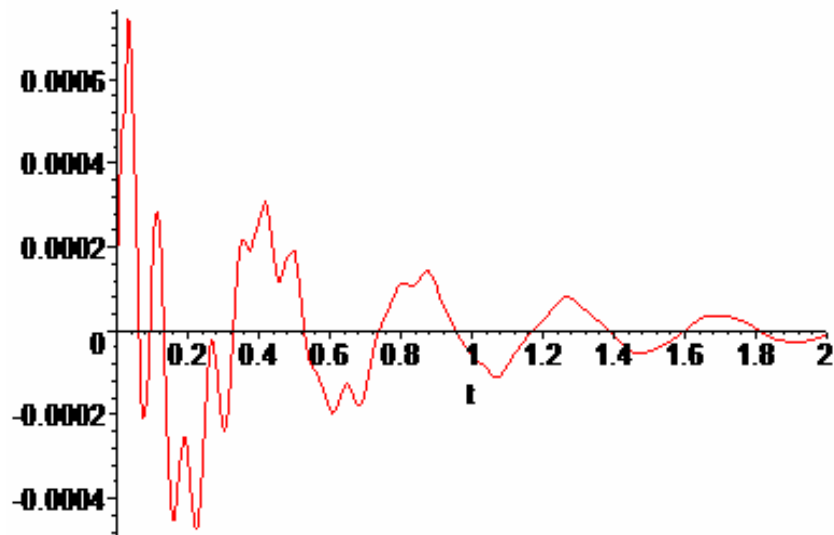


Σχήμα 4.2.50 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

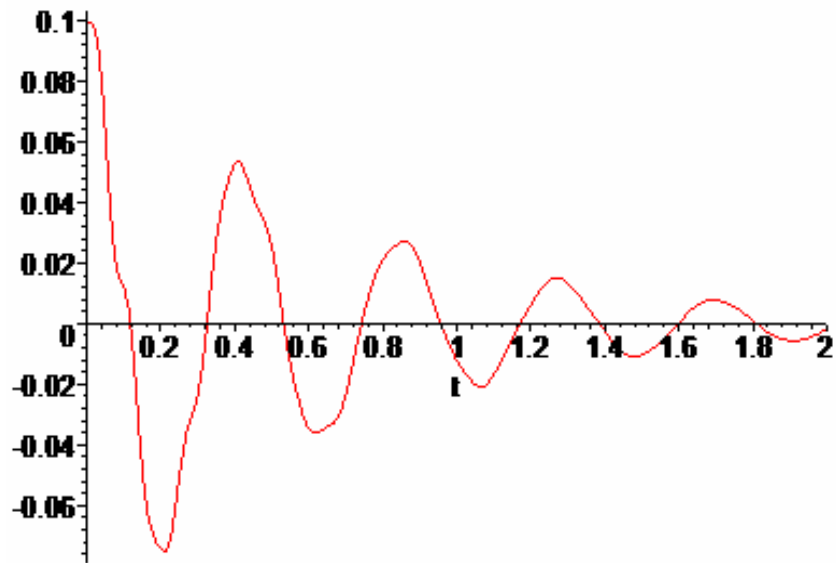
#### 4.2.6 Ελεύθερες ταλαντώσεις πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση



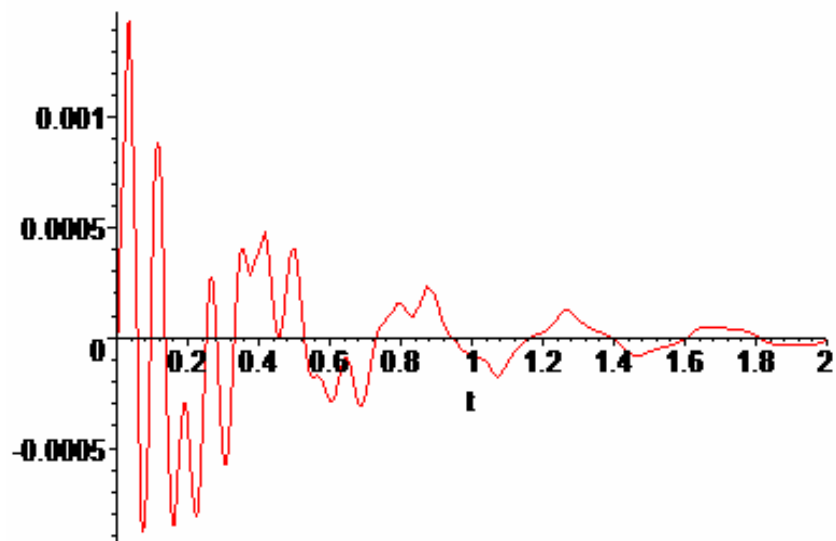
Σχήμα 4.2.51 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



Σχήμα 4.2.52 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .

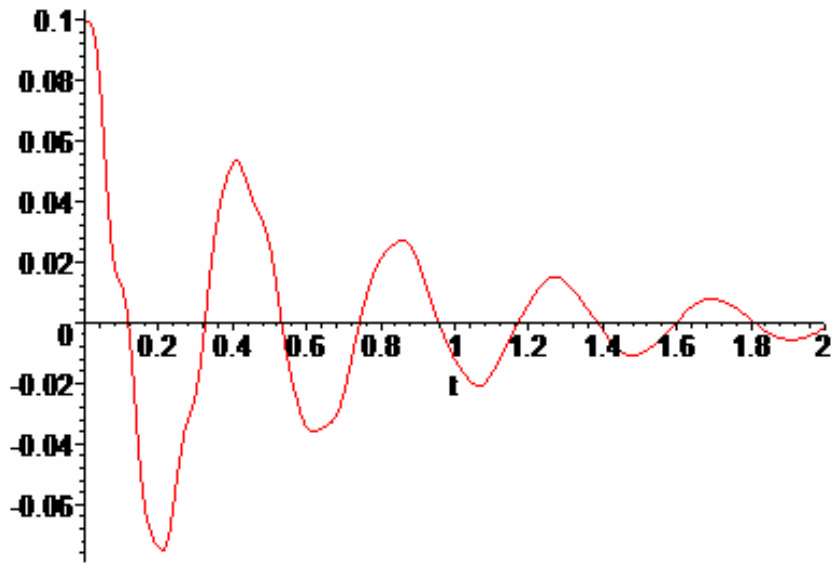


Σχήμα 4.2.53 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .

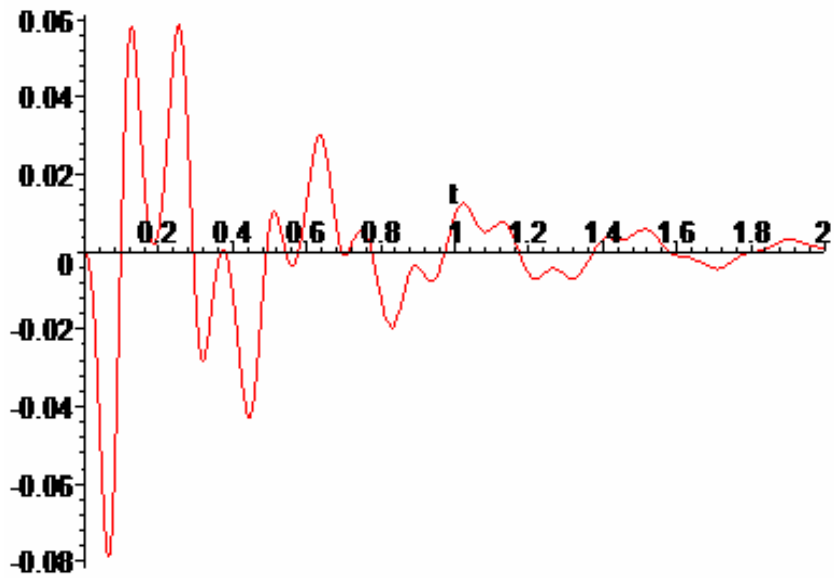


Σχήμα 4.2.54 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .

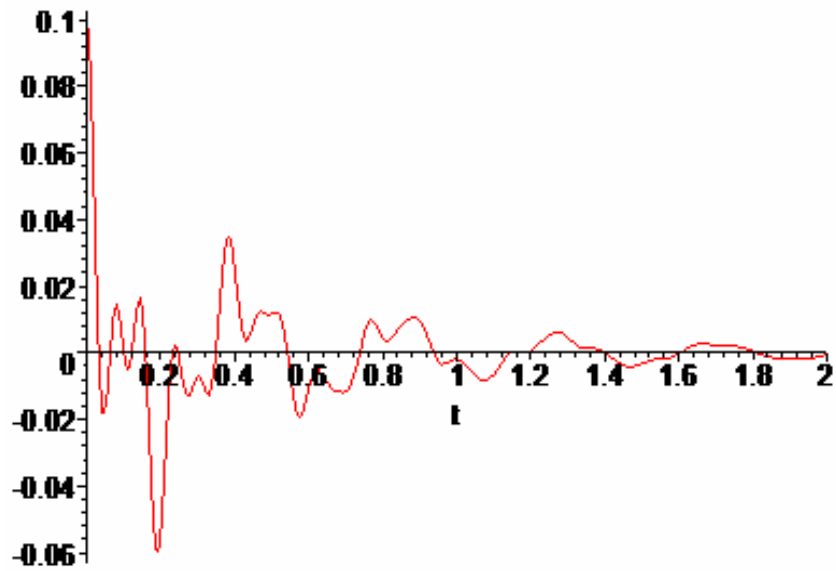




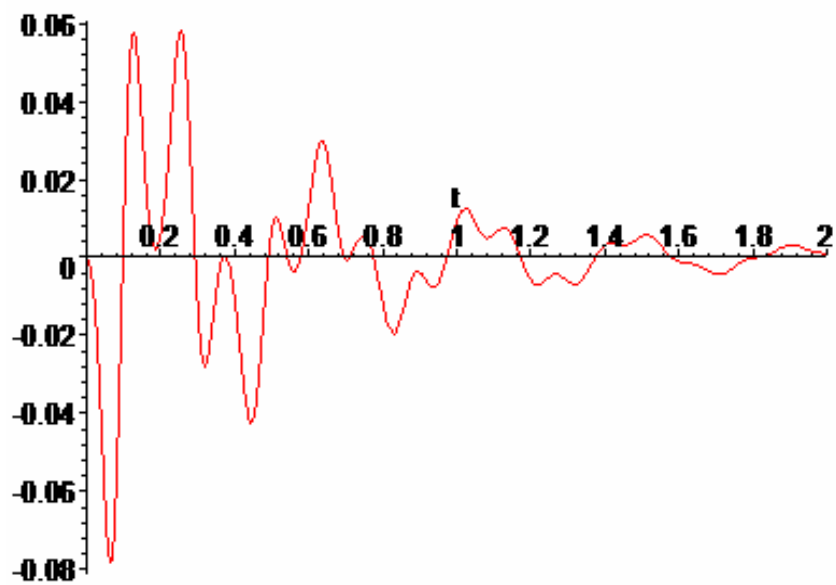
Σχήμα 4.2.55 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



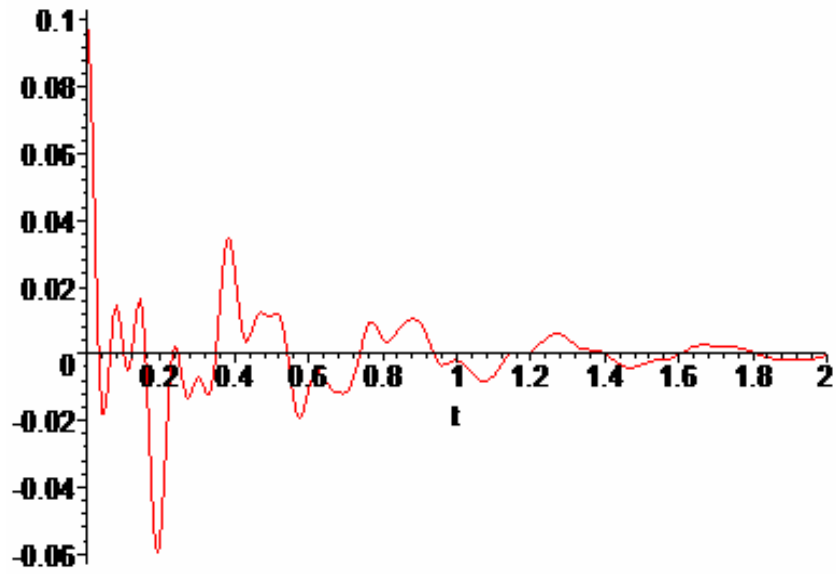
Σχήμα 4.2.56 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



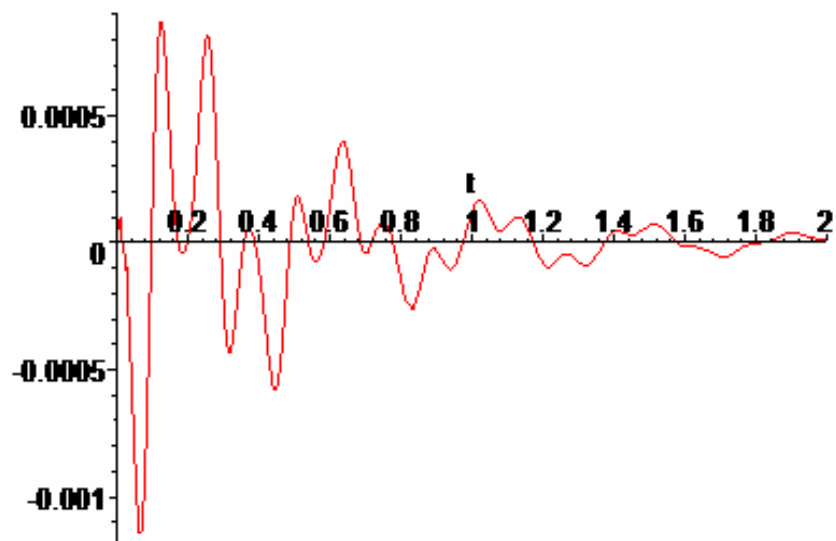
Σχήμα 4.2.57 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.58 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .



Σχήμα 4.2.59 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

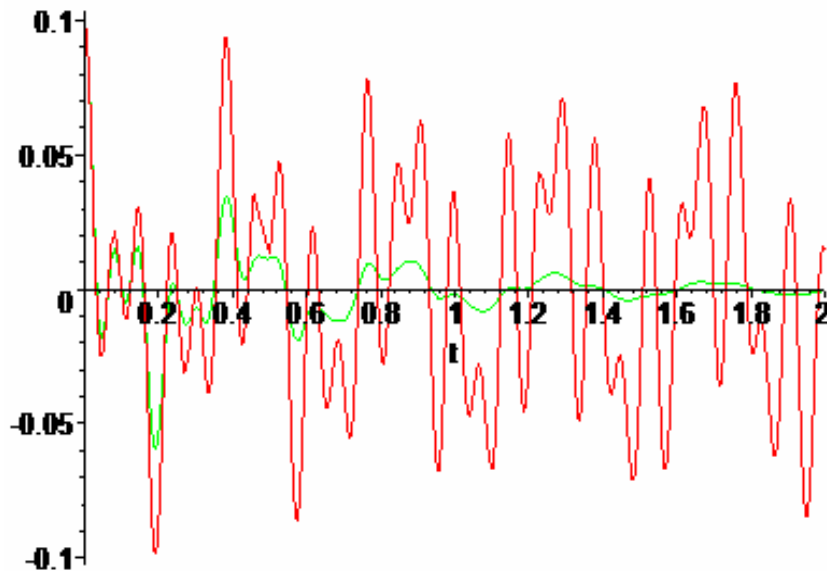


Σχήμα 4.2.60 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

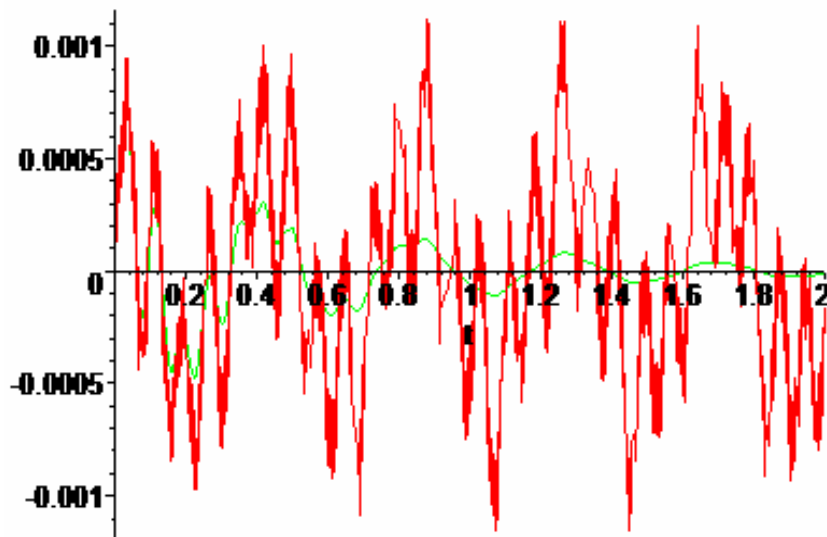
### 4.2.7 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με και χωρίς απόσβεση

Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση.

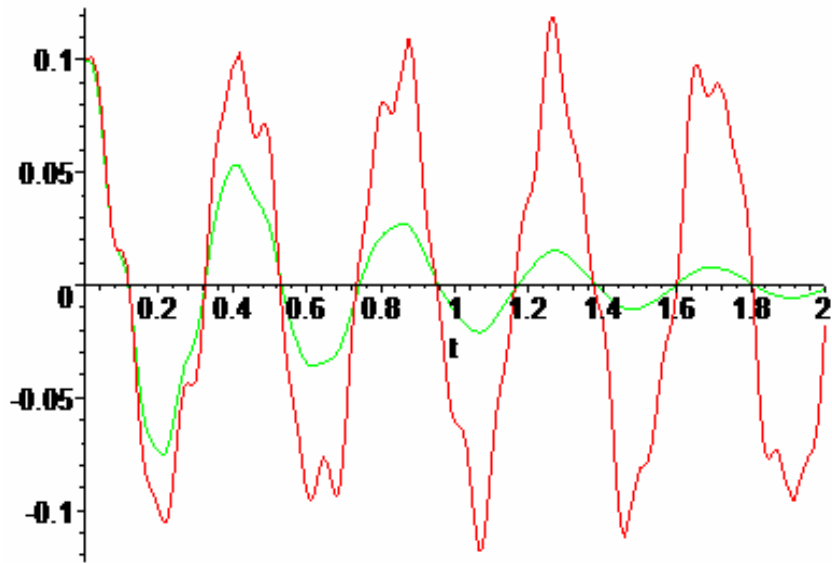
Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση.



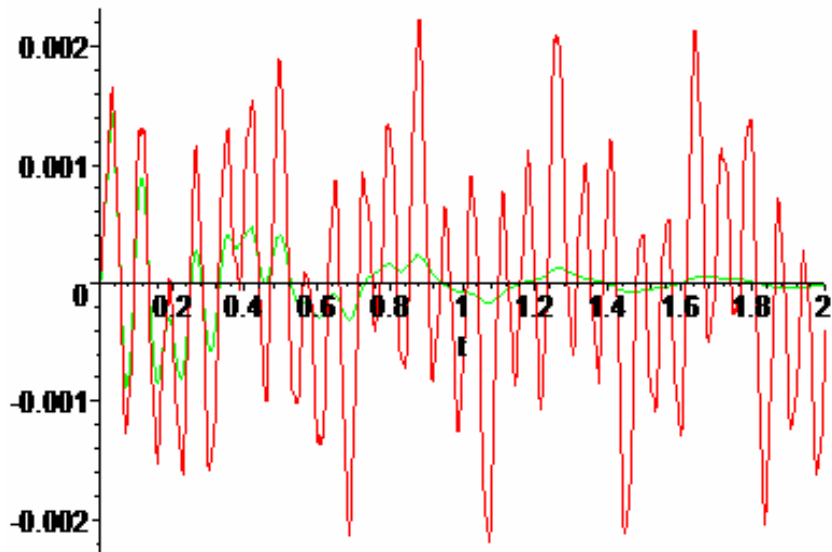
Σχήμα 4.2.61 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



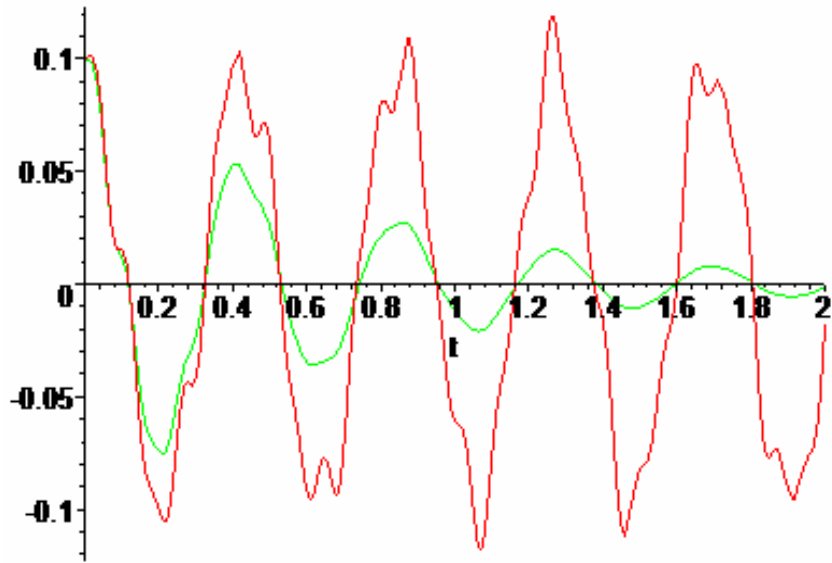
Σχήμα 4.2.62 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_2(t)$ .



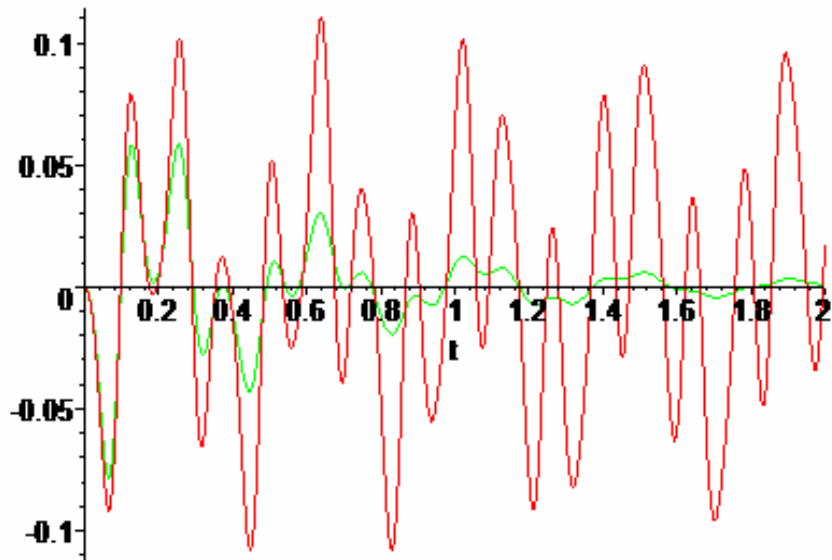
Σχήμα 4.2.63 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



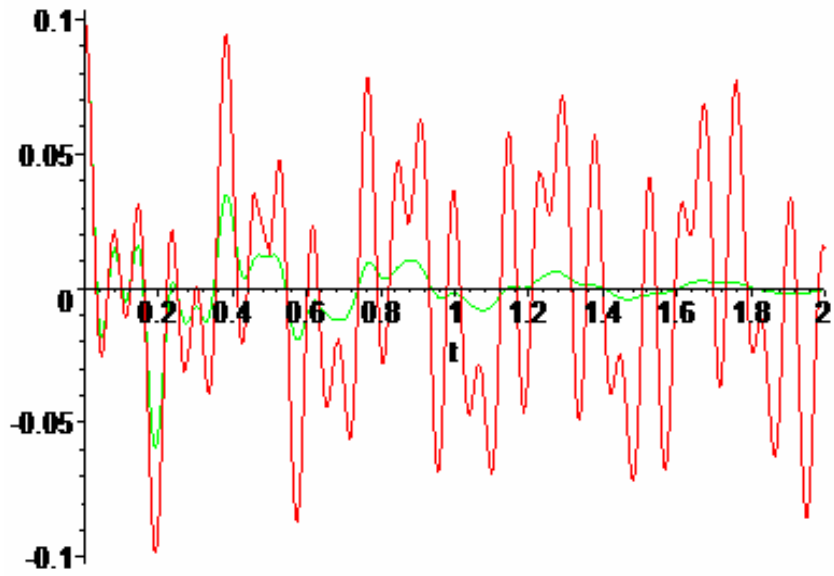
Σχήμα 4.2.64 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_4(t)$ .



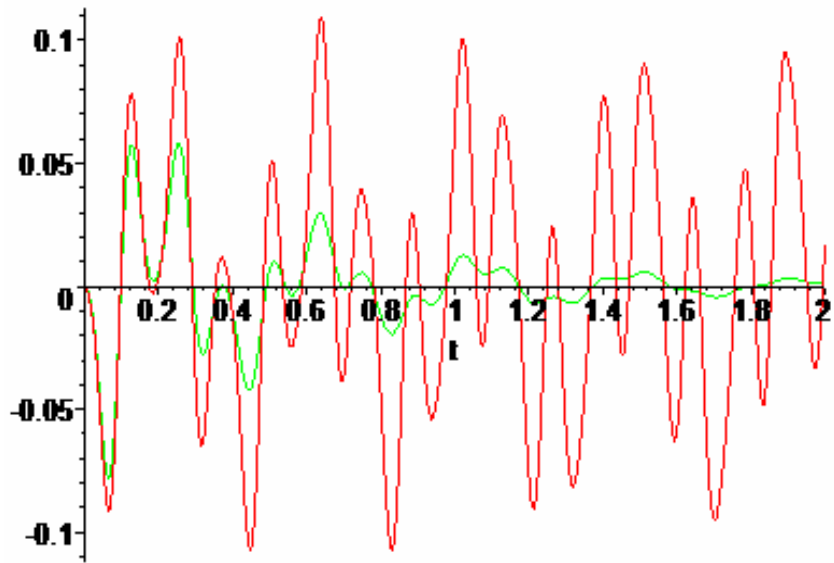
Σχήμα 4.2.65 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



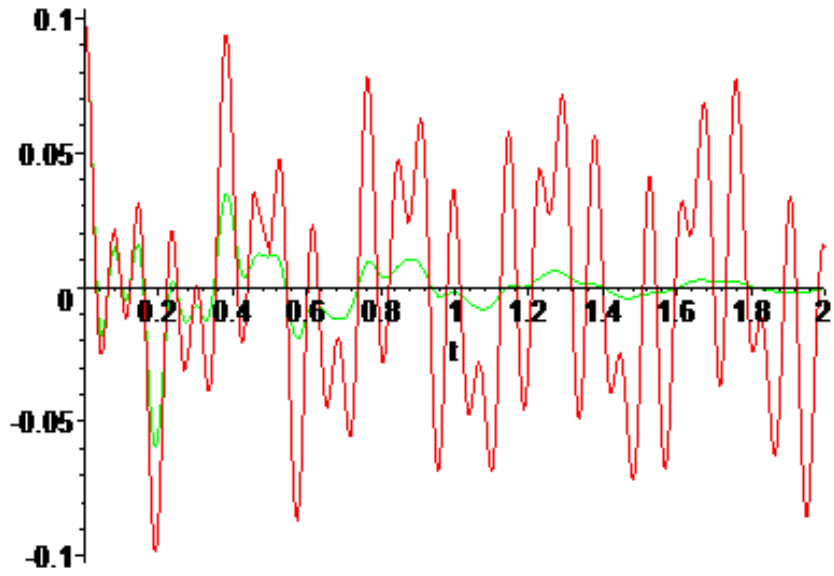
Σχήμα 4.2.66 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_6(t)$ .



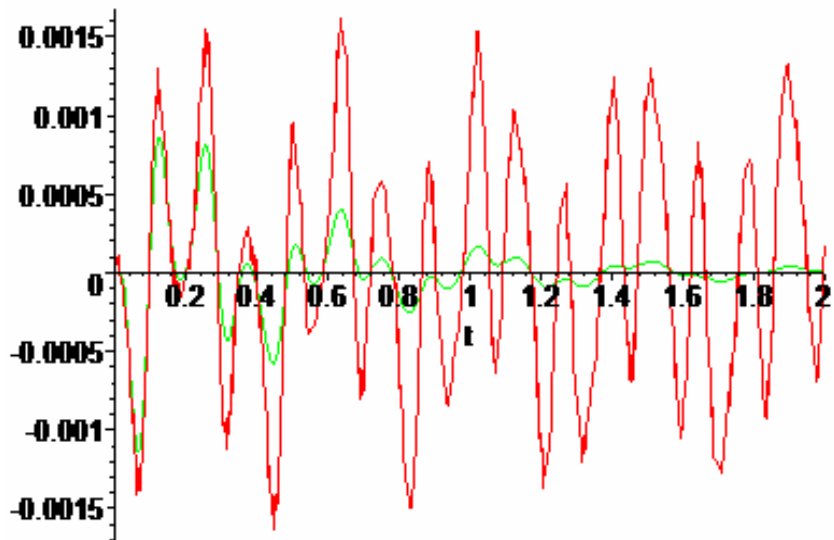
Σχήμα 4.2.67 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



Σχήμα 4.2.68 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_8(t)$ .



Σχήμα 4.2.69 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .



Σχήμα 4.2.70 Χρονική μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης  $u_{10}(t)$ .

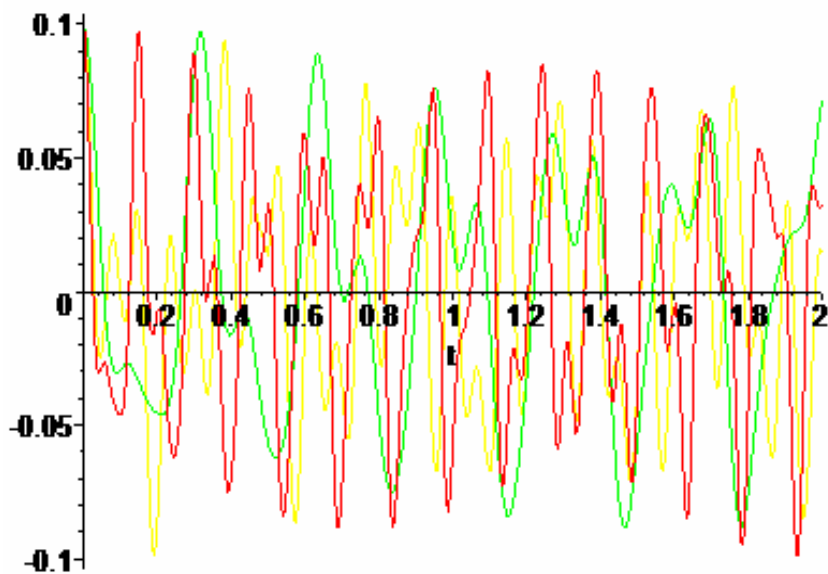


### 4.2.8 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση

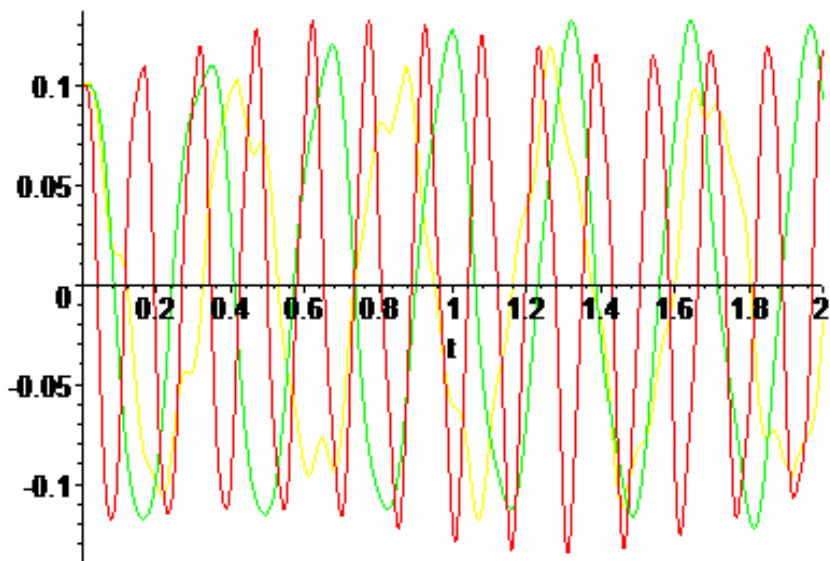
Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα χωρίς απόσβεση.

Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από χάλυβα χωρίς απόσβεση.

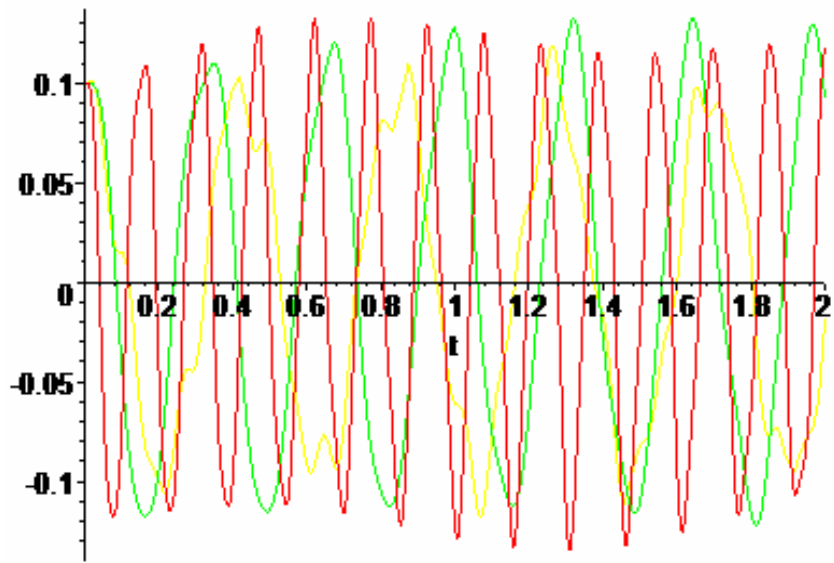
Με κίτρινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς απόσβεση.



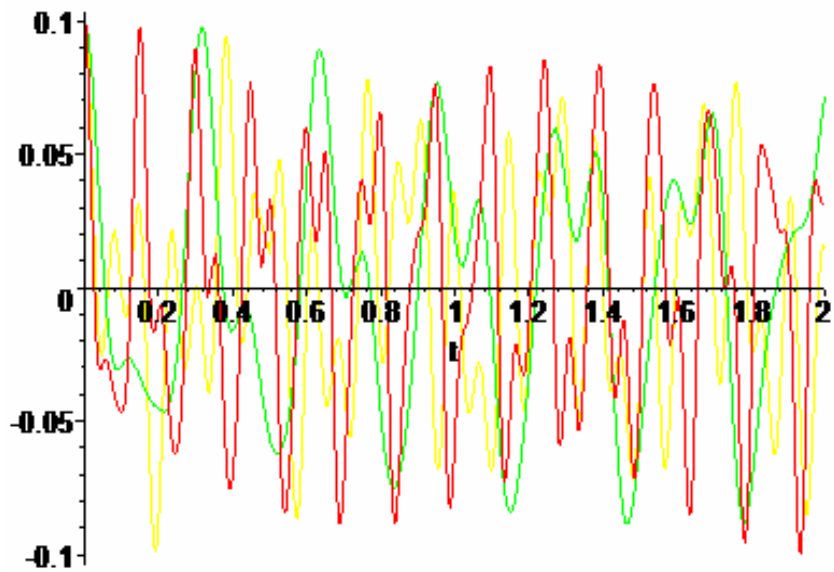
Σχήμα 4.2.71 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



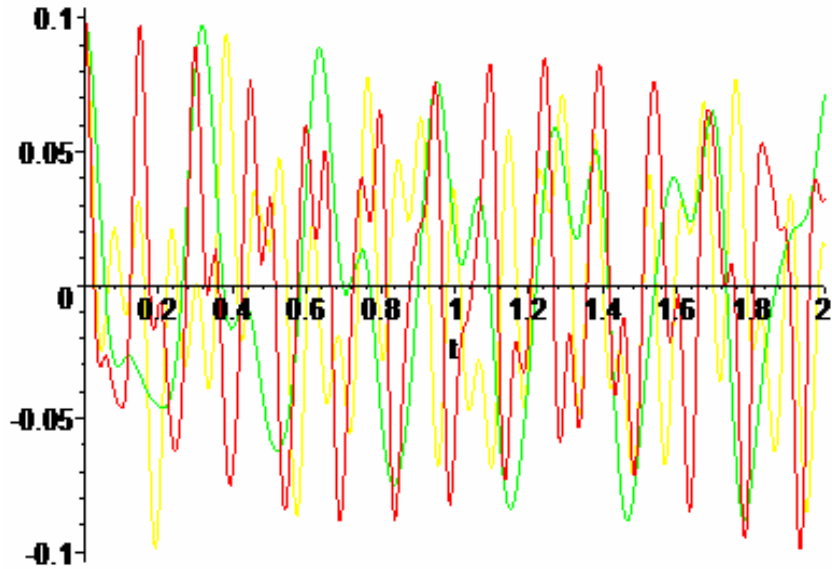
Σχήμα 4.2.72 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



Σχήμα 4.2.73 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



Σχήμα 4.2.74 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$ .



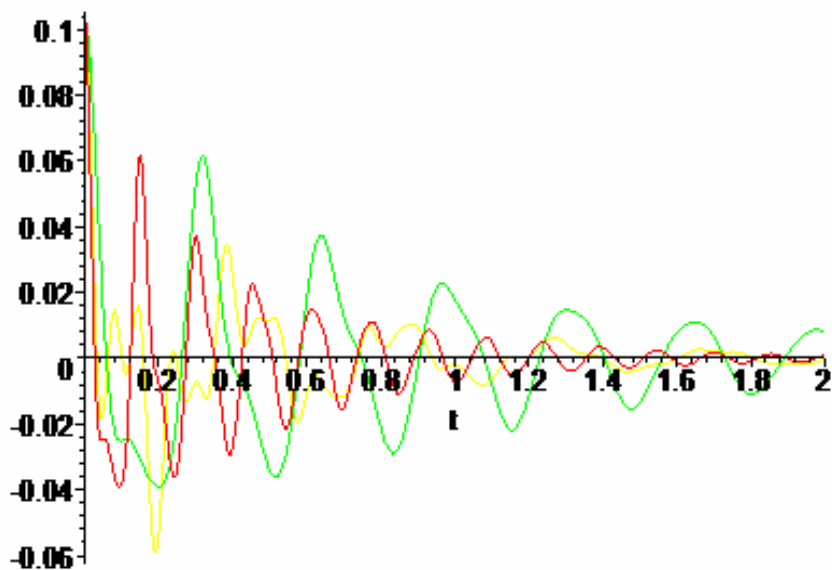
Σχήμα 4.2.75 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$ .

#### 4.2.9 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων πλαισίου από σκυρόδεμα-χάλυβα-σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση

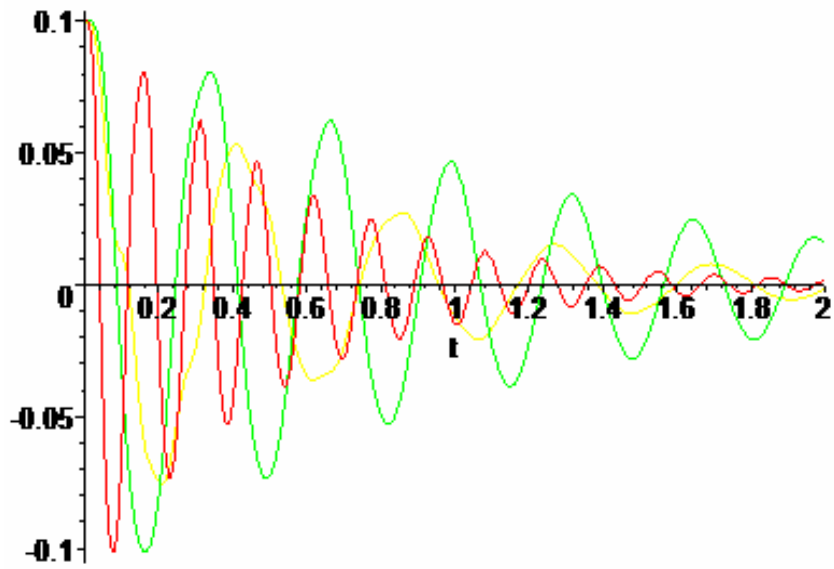
Με κόκκινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα με απόσβεση.

Με πράσινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από χάλυβα με απόσβεση.

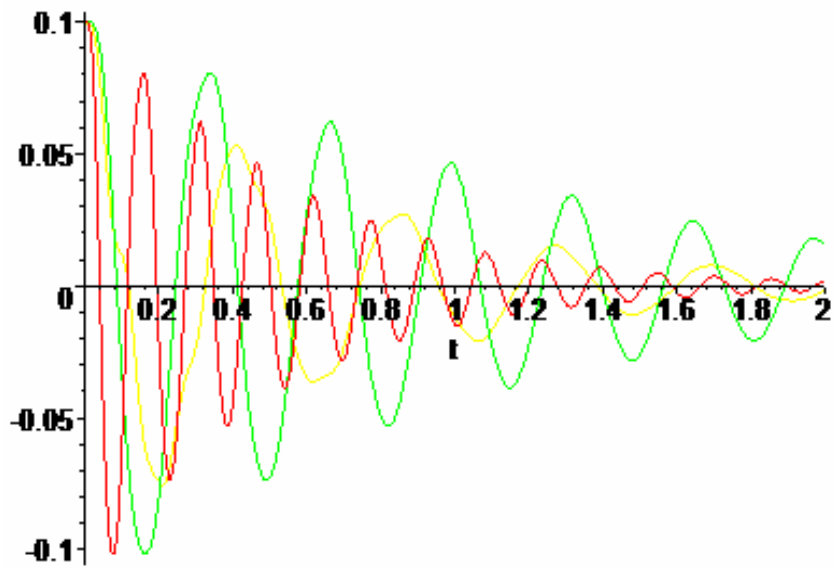
Με κίτρινο συμβολίζεται η ελεύθερη ταλάντωση πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα με απόσβεση



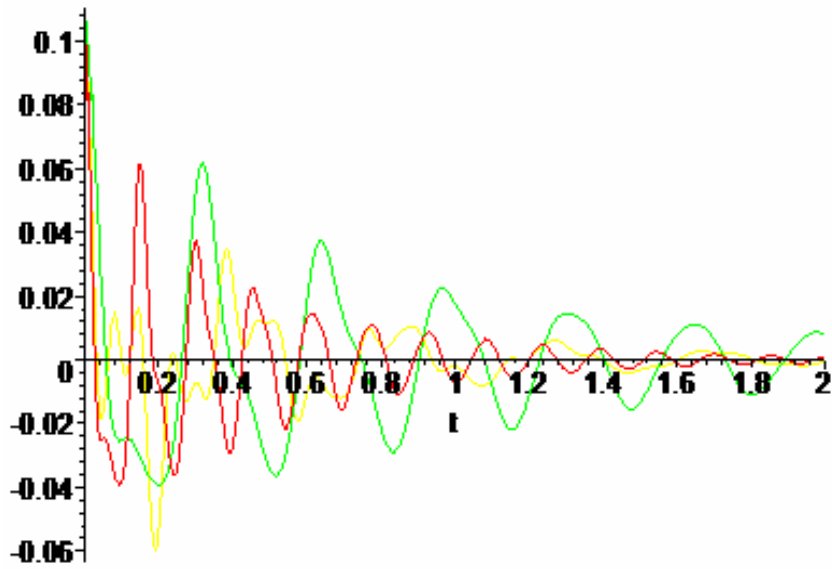
Σχήμα 4.2.76 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ .



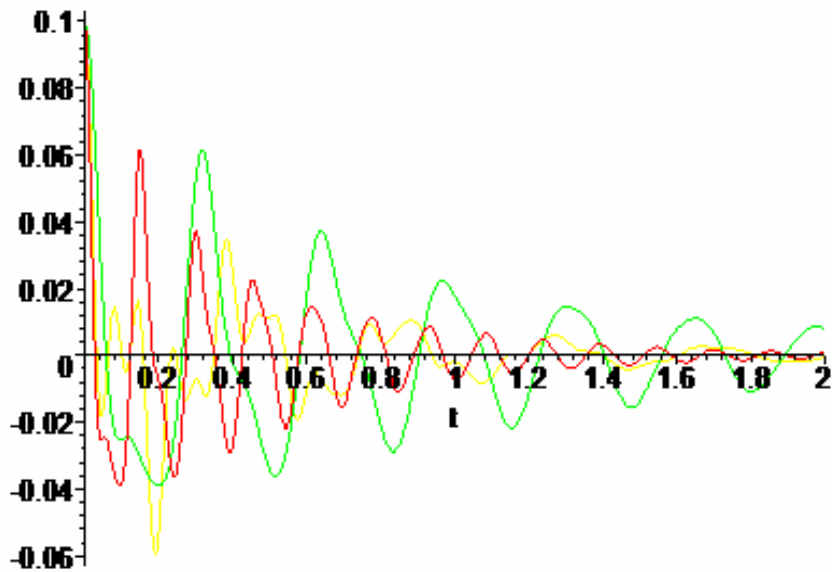
Σχήμα 4.2.77 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_3(t)$ .



Σχήμα 4.2.78 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_5(t)$ .



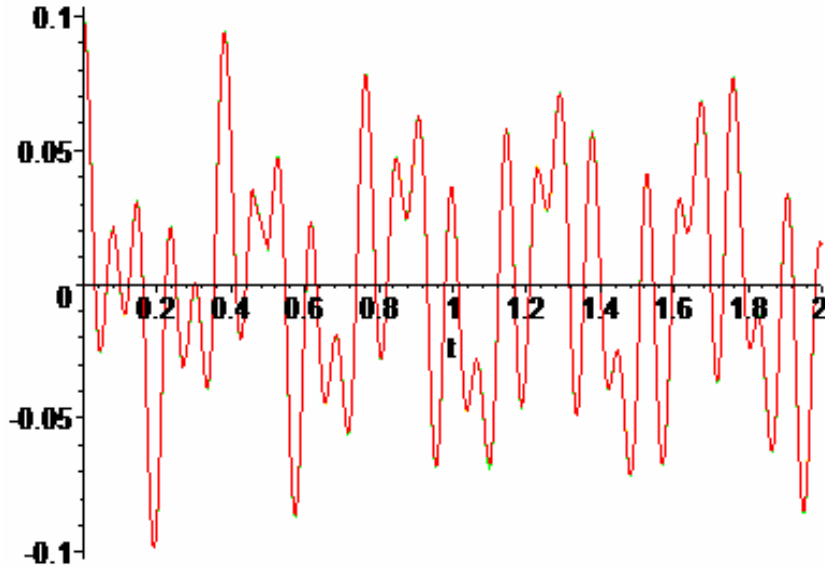
Σχήμα 4.2.79 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_7(t)$



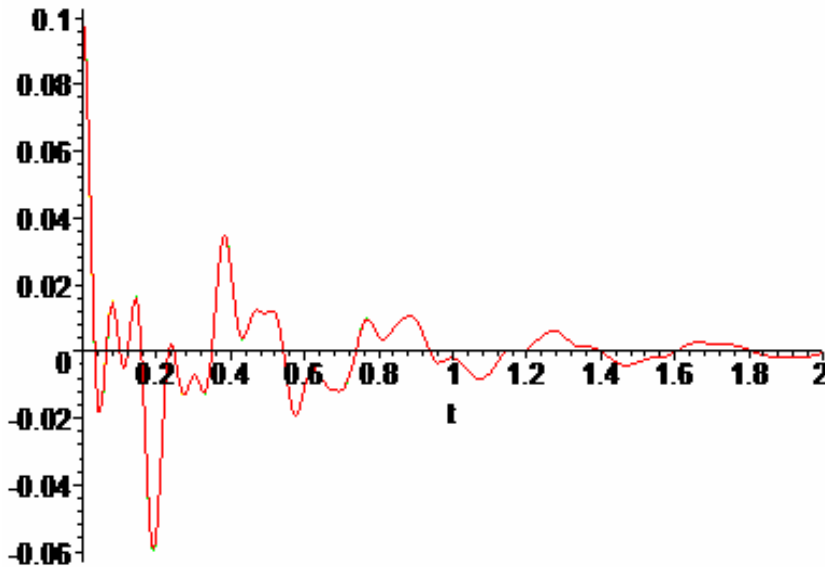
Σχήμα 4.2.80 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_9(t)$

#### 4.2.10 Συγκριτικά διαγράμματα ελεύθερων ταλαντώσεων σύνθετου πλαισίου από σκυρόδεμα και χάλυβα χωρίς και με απόσβεση των μετατοπίσεων του πρώτου ορόφου.

Στο καθένα από τα παρακάτω διαγράμματα εμφανίζεται μία καμπύλη γιατί οι μετατοπίσεις  $u_1(t)$ ,  $u_7(t)$  και  $u_9(t)$  συμπίπτουν.



Σχήμα 4.2.65 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ ,  $u_7(t)$  χωρίς απόσβεση



Σχήμα 4.2.66 Χρονική μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u_1(t)$ ,  $u_7(t)$  με απόσβεση

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία διερευνήθηκαν οι ελεύθερες ταλαντώσεις σύνθετων φορέων από χάλυβα και σκυρόδεμα. Αρχικά έγινε δυναμική ανάλυση για φορέα μόνο από χάλυβα και μόνο από σκυρόδεμα. Στη συνέχεια έγινε η σύνθεση των δύο υλικών σε ένα φορέα και ακολούθησε η δυναμική του ανάλυση. Τέλος στη δυναμική ανάλυση προστέθηκε και η απόσβεση.

Όπως παρατηρούμε στα διαγράμματα που προέκυψαν από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, τόσο για κάθε υλικό μεμονωμένο όσο και για τα δύο υλικά μαζί, οι κατακόρυφες μετατοπίσεις είναι σχεδόν μηδενικές. Τούτο είναι αναμενόμενο λόγω ότι οι αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης έχουν μη μηδενικές τιμές στις οριζόντιες μετατοπίσεις και μηδενικές στις κατακόρυφες. Το ίδιο παρατηρείται τόσο στις ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση όσο και σ' αυτές με απόσβεση.

Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων για τα πλαίσια που αποτελούνται μόνο από χάλυβα και μόνο από σκυρόδεμα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης είναι μικρότερη στην περίπτωση που έχουμε μόνο σκυρόδεμα σε σύγκριση με αυτή του χάλυβα. Όμως όταν συνδυάζονται και τα δύο υλικά μαζί – στη σύνθετη κατασκευή - παρατηρούμε ότι η ιδιοπερίοδος της ταλάντωσης κυμαίνεται ανάμεσα σ' αυτές του χάλυβα και του σκυροδέματος. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στην περίπτωση που εξετάζουμε ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση.

Από τα συγκριτικά διαγράμματα των ταλαντώσεων σύνθετων πλαισίων από σκυρόδεμα και χάλυβα με και χωρίς απόσβεση παρατηρούμε τα εξής. Στην περίπτωση που δεν έχουμε απόσβεση το εύρος της ταλάντωσης είναι σταθερό και δε μηδενίζεται με την πάροδο του χρόνου. Αντίθετα, στην περίπτωση που έχουμε απόσβεση το εύρος της ταλάντωσης με την πάροδο του χρόνου μειώνεται και τείνει στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι η απόσβεση η οποία εμφανίζεται σ' όλα τα μηχανικά σύστημα (κατασκευές) που εκτελούν ταλαντώσεις, έχει ως αποτέλεσμά την απώλεια ενέργειας από το σύστημα. Η απώλεια ενέργειας ενός ταλαντούμενου συστήματος προκαλεί τη μείωση του εύρους της ελεύθερης ταλάντωσης.

Από τα Σχ. 4.1.65 και 4.1.66 καθώς και από τα Σχ. 4.2.65 και 4.2.66 συμπεραίνουμε ότι οι χρονικές μεταβολές των οριζόντιων

μετατοπίσεων σε κάθε όροφο συμπίπτουν. Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί στην περαιτέρω μελλοντική διερεύνηση του προβλήματος μειώνοντας ουσιαστικά τον αριθμό των δυναμικών βαθμών ελευθερίας



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

### ΚΩΔΙΚΑΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ MAPLE 7



Η Maple είναι ένα πακέτο για μαθηματικούς υπολογισμούς. Με πάνω από 3000 υπολογιστικές συναρτήσεις, τη δική της γλώσσα προγραμματισμού και πολλές δυνατότητες διασύνδεσης με άλλες εφαρμογές (Matlab, Excel) και με το Web, αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο.

#### A.1 Κώδικας MAPLE για το 1<sup>ο</sup> Πλαίσιο

```
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
> #
> Digits:=12:
> L1:=3; L2:=3; L3:=3; L4:=3; L5:=5; L6:=5;
rho1:=2.40;rho2:=7.85;E1:=2.9*10^7; E2:=2.1*10^7;
> R:=array([[c, s, 0,0,0,0], [-s, c,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[
0,0,0,c,s,0], [0,0,0,-s,c,0],[0,0,0,0,0,1]]):
> k:=array([[e1,0,0,-e1,0,0],[0,12*e2,6*e3,0,-
12*e2,6*e3],[0,6*e3,4*e4,0,-6*e3,2*e4],[-e1,0,0,e1,0,0],[0,-12*e2,-
6*e3,0,12*e2,-6*e3],[0,6*e3,2*e4,0,-6*e3,4*e4]]):
>
m:=me/2*array([[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],
[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0]]):
>
ID:=array([[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0
,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,1]]):
#=====
Element 1
#=====
> e1:=E1*a/L:
```

```

> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:
> L:=L1;
s:=1;
c:=0;
Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho1*a*L:#rho=material mass density
> m1:=multiply(ID,m):
> M1:=multiply(transpose(R),m1,R);
> k1:=multiply(ID,k);
> K1:=multiply(transpose(R),k1,R);
> B1:=array([[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]):
> Ko1:=multiply(transpose(B1),K1,B1);
> Mo1:=multiply(transpose(B1),M1,B1);
#=====
Element 2
#=====
> e1:=E2*a/L:
> e2:=E2*Ik/L**3:
> e3:=E2*Ik/L**2:
> e4:=E2*Ik/L:
> L:=L2;
s:=1;
c:=0;
Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho2*a*L:#rho=material mass density
> m2:=multiply(ID,m):
> M2:=multiply(transpose(R),m2,R);
> k2:=multiply(ID,k);
> K2:=multiply(transpose(R),k2,R);
> B2:=array([[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0]]):
> Ko2:=multiply(transpose(B2),K2,B2);
> Mo2:=multiply(transpose(B2),M2,B2);
#=====
Element 3
#=====
> e1:=E1*a/L:
> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:
> L:=L3;
s:=1;
c:=0;

```

```

Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho1*a*L:#rho=material mass density
> m3:=multiply(ID,m):
> M3:=multiply(transpose(R),m3,R);
> k3:=multiply(ID,k);
> K3:=multiply(transpose(R),k3,R);
>B3:=array([[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0]):
> Ko3:=multiply(transpose(B3),K3,B3);
> Mo3:=multiply(transpose(B3),M3,B3);
#=====
Element 4
#=====
> e1:=E2*a/L:
> e2:=E2*Ik/L**3:
> e3:=E2*Ik/L**2:
> e4:=E2*Ik/L:
> L:=L4;
s:=1;
c:=0;
Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho2*a*L:#rho=material mass density
> m4:=multiply(ID,m):
> M4:=multiply(transpose(R),m4,R);
> k4:=multiply(ID,k);
> K4:=multiply(transpose(R),k4,R);
>B4:=array([[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0]):
> Ko4:=multiply(transpose(B4),K4,B4);
> Mo4:=multiply(transpose(B4),M4,B4);
#=====
Element 5
#=====
> e1:=E1*a/L:
> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:
> L:=L5;
s:=0;
c:=1;
Ik:=0.3*0.6^3/12;
> a:=0.6*0.3;
> me:=rho1*a*L:#rho=material mass density
> m5:=multiply(ID,m):
> M5:=multiply(transpose(R),m5,R);
> k5:=multiply(ID,k);

```



```

> Mff:=submatrix(Mol, 1..12,1..12);
> Msf:=submatrix(Mol, 13..18,1..12):
> Mfs:=submatrix(Mol, 1..12,13..18):
> Mss:=submatrix(Mol, 13..18,13..18):
>Vstar:=array([[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]]);
> Mstar:=multiply(transpose(Vstar),Mff,Vstar);
> Kstar:=multiply(transpose(Vstar),Kff,Vstar);
> Ktt:=submatrix(Kstar, 1..8,1..8);
> Kt8:=submatrix(Kstar, 1..8,9..12);
> K8t:=submatrix(Kstar, 9..12,1..8);
> K88:=submatrix(Kstar, 9..12,9..12);
> Mtt:=submatrix(Mstar, 1..8,1..8);
> Kttstar:=evalm(Ktt-multiply(Kt8,inverse(K88),K8t));
#=====
                                Eigenvalues and Eigenvectors
#=====
omeg:=evalf(Eigenvals(Kttstar,Mtt,vecs));
> o1:=3: o2:=2: o3:=7: o4:=5: o5:=1: o6:=8: o7:=6: o8:=4:
> omega1:=omeg[o1];
> omega2:=omeg[o2];
> omega3:=omeg[o3];
> omega4:=omeg[o4];
> omega5:=omeg[o5];
> omega6:=omeg[o6];
> omega7:=omeg[o7];
> omega8:=omeg[o8];
> print(vecs);
#=====
                                Normalization
#=====
> v1 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, o1..o1);
> c:=multiply(transpose(v1),Mtt,v1);
> c1:=c[1,1];
> mu[1]:=1/sqrt(c1);
> phi[1]:=scalarmul(v1,mu[1]);
> v2 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, o2..o2);
> c:=multiply(transpose(v2),Mtt,v2);
> c2:=c[1,1];
> mu[2]:=1/sqrt(c2);
> phi[2]:=scalarmul(v2,mu[2]);
> phi[2][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,phi[2]);
> v3 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, o3..o3);
> c:=multiply(transpose(v3),Mtt,v3);
> c3:=c[1,1];
> mu[3]:=1/sqrt(c3);
> phi[3]:=scalarmul(v3,mu[3]);
> phi[3][1,1];

```

```

> test:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,phi[3]);
> v4 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, 04..04);
> c:=multiply(transpose(v4),Mtt,v4);
> c4:=c[1,1];
> mu[4]:=1/sqrt(c4);
> phi[4]:=scalarmul(v4,mu[4]);
> phi[4][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,phi[4]);
> v5 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, 05..05);
> c:=multiply(transpose(v5),Mtt,v5);
> c5:=c[1,1];
> mu[5]:=1/sqrt(c5);
> phi[5]:=scalarmul(v5,mu[5]);
> phi[5][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,phi[5]);
> v6 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, 06..06);
> c:=multiply(transpose(v6),Mtt,v6);
> c6:=c[1,1];
> mu[6]:=1/sqrt(c6);
> phi[6]:=scalarmul(v6,mu[6]);
> phi[6][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,phi[6]);
> v7 := linalg[submatrix](vecs, 1..8, 07..07);
> c:=multiply(transpose(v7),Mtt,v7);
> c7:=c[1,1];
> mu[7]:=1/sqrt(c7);
> phi[7]:=scalarmul(v7,mu[7]);
> phi[7][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,phi[7]);
> v8:= linalg[submatrix](vecs, 1..8, 08..08);
> c:=multiply(transpose(v8),Mtt,v8);
> c8:=c[1,1];
> mu[8]:=1/sqrt(c8);
> phi[8]:=scalarmul(v8,mu[8]);
> phi[8][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,phi[8]);
#=====
Initial Conditions
#=====>
u0:=array([[0.1],[0],[0.1],[0],[0.1],[0],[0.1],[0]]);
> u0t:=array([[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0]]);
> y10:=multiply(transpose(phi[1]),Mtt,u0);
> y10t:=multiply(transpose(phi[1]),Mtt,u0t);
> Y10:=y10[1,1];
> Y10t:=y10t[1,1];
> y20:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,u0);
> y20t:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,u0t);
> Y20:=y20[1,1];
> Y20t:=y20t[1,1];
> y30:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,u0);
> y30t:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,u0t);
> Y30:=y30[1,1];

```

```

> Y30t:=y30t[1,1];
> y40:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,u0);
> y40t:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,u0t);
> Y40:=y40[1,1];
> Y40t:=y40t[1,1];
> y50:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,u0);
> y50t:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,u0t);
> Y50:=y50[1,1];
> Y50t:=y50t[1,1];
> y60:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,u0);
> y60t:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,u0t);
> Y60:=y60[1,1];
> Y60t:=y60t[1,1];
> y70:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,u0);
> y70t:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,u0t);
> Y70:=y70[1,1];
> Y70t:=y70t[1,1];
> y80:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,u0);
> y80t:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,u0t);
> Y80:=y80[1,1];
> Y80t:=y80t[1,1];
> xi1:=0.05;
> xi2:=0.1;
> omegad1:=(omega1*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad2:=(omega2*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad3:=(omega3*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad4:=(omega4*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad5:=(omega5*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad6:=(omega6*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad7:=(omega7*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad8:=(omega8*(1-xi1^2))^0.5;
> Y1:=exp(1)^(-
xi1*omega1^0.5*t)*((Y10t+Y10*xi1*omega1^0.5)/omegad1*sin(omegad1*t)+Y10
*cos(omegad1*t));
> Y2:=exp(1)^(-
xi1*omega2^0.5*t)*((Y20t+Y20*xi1*omega2^0.5)/omegad2*sin(omegad2*t)+Y20
*cos(omegad2*t));
> Y3:=exp(1)^(-
xi2*omega3^0.5*t)*((Y30t+Y30*xi2*omega3^0.5)/omegad3*sin(omegad3*t)+Y30
*cos(omegad3*t));
> Y4:=exp(1)^(-
xi2*omega4^0.5*t)*((Y40t+Y40*xi2*omega4^0.5)/omegad4*sin(omegad4*t)+Y40
*cos(omegad4*t));
> Y5:=exp(1)^(-
xi2*omega5^0.5*t)*((Y50t+Y50*xi2*omega5^0.5)/omegad5*sin(omegad5*t)+Y50
*cos(omegad5*t));
> Y6:=exp(1)^(-
xi2*omega6^0.5*t)*((Y60t+Y60*xi2*omega6^0.5)/omegad6*sin(omegad6*t)+Y60
*cos(omegad6*t));
> Y7:=exp(1)^(-
xi1*omega7^0.5*t)*((Y70t+Y70*xi1*omega7^0.5)/omegad7*sin(omegad7*t)+Y70
*cos(omegad7*t));

```

```

> Y8:=exp(1)^(-
xi1*omega8^0.5*t)*((Y80t+Y80*xi1*omega8^0.5)/omegad8*sin(omegad8*t)+Y80
*cos(omegad8*t));
#####
Solution of the problem
#####>ut1:=Y1*
phi[1][1,1]+Y2*phi[2][1,1]+Y3*phi[3][1,1]+Y4*phi[4][1,1]+Y5*phi[5][1,1]
+Y6*phi[6][1,1]+Y7*phi[7][1,1]+Y8*phi[8][1,1];
>ut2:=Y1*phi[1][2,1]+Y2*phi[2][2,1]+Y3*phi[3][2,1]+Y4*phi[4][2,1]+Y5*ph
i[5][2,1]+Y6*phi[6][2,1]+Y7*phi[7][2,1]+Y8*phi[8][2,1];
>ut3:=Y1*phi[1][3,1]+Y2*phi[2][3,1]+Y3*phi[3][3,1]+Y4*phi[4][3,1]+Y5*ph
i[5][3,1]+Y6*phi[6][3,1]+Y7*phi[7][3,1]+Y8*phi[8][3,1];
>ut4:=Y1*phi[1][4,1]+Y2*phi[2][4,1]+Y3*phi[3][4,1]+Y4*phi[4][4,1]+Y5*ph
i[5][4,1]+Y6*phi[6][4,1]+Y7*phi[7][4,1]+Y8*phi[8][4,1];
>ut5:=Y1*phi[1][5,1]+Y2*phi[2][5,1]+Y3*phi[3][5,1]+Y4*phi[4][5,1]+Y5*ph
i[5][5,1]+Y6*phi[6][5,1]+Y7*phi[7][5,1]+Y8*phi[8][5,1];
>ut6:=Y1*phi[1][6,1]+Y2*phi[2][6,1]+Y3*phi[3][6,1]+Y4*phi[4][6,1]+Y5*ph
i[5][6,1]+Y6*phi[6][6,1]+Y7*phi[7][6,1]+Y8*phi[8][6,1];
>ut7:=Y1*phi[1][7,1]+Y2*phi[2][7,1]+Y3*phi[3][7,1]+Y4*phi[4][7,1]+Y5*ph
i[5][7,1]+Y6*phi[6][7,1]+Y7*phi[7][7,1]+Y8*phi[8][7,1];
>ut8:=Y1*phi[1][8,1]+Y2*phi[2][8,1]+Y3*phi[3][8,1]+Y4*phi[4][8,1]+Y5*ph
i[5][8,1]+Y6*phi[6][8,1]+Y7*phi[7][8,1]+Y8*phi[8][8,1];
> plot([ut1], t=0..2);
> plot(ut2,t=0..2);
> plot([ut3],t=0..2);
> plot([ut4],t=0..2);
> plot([ut5],t=0..2);
> plot([ut6],t=0..2);
> plot([ut7],t=0..2);
> plot([ut8],t=0..2);

```

## A.2 Κώδικας MAPLE για το 2<sup>ο</sup> Πλαίσιο

```

> restart;
> with(linalg):
> with(LinearAlgebra):
> Digits:14;
> L1:=3; L2:=3; L3:=3; L4:=3; L5:=2.5; L6:=2.5; L7:=5; rho1:=2.40;
rho2:=7.85; E1:=2.9*10^7; E2:=2.1*10^7;
> R:=array([[c, s, 0,0,0,0], [-s, c,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[
0,0,0,c,s,0], [0,0,0,-s,c,0],[0,0,0,0,0,1]]):
> k:=array([[e1,0,0,-e1,0,0],[0,12*e2,6*e3,0,-
12*e2,6*e3],[0,6*e3,4*e4,0,-6*e3,2*e4],[-e1,0,0,e1,0,0],[0,-12*e2,-
6*e3,0,12*e2,-6*e3],[0,6*e3,2*e4,0,-6*e3,4*e4]]):
> m:=me/2*array([[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0]
,[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0]]):
> ID:=array([[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,
0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,1]]):

```



```

#=====
                                Element 1
#=====
> e1:=E1*a/L:
> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:
> L:=L1;
s:=1;
c:=0;
Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho1*a*L:#rho=material mass density
> m1:=multiply(ID,m):
> M1:=multiply(transpose(R),m1,R);
> k1:=multiply(ID,k);
> K1:=multiply(transpose(R),k1,R);
> B1:=array([[1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]):
> Ko1:=multiply(transpose(B1),K1,B1);
> Mo1:=multiply(transpose(B1),M1,B1);
#=====
                                Element 2
#=====
> e1:=E2*a/L:
> e2:=E2*Ik/L**3:
> e3:=E2*Ik/L**2:
> e4:=E2*Ik/L:
> L:=L2;
s:=1;
c:=0;
Ik:=0.3^4/12;
> a:=0.3^2;
> me:=rho2*a*L:#rho=material mass density
> m2:=multiply(ID,m):
> M2:=multiply(transpose(R),m2,R);
> k2:=multiply(ID,k);
> K2:=multiply(transpose(R),k2,R);
> B2:=array([[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]):
> Ko2:=multiply(transpose(B2),K2,B2);
> Mo2:=multiply(transpose(B2),M2,B2);
#=====
                                Element 3
#=====
> e1:=E1*a/L:
> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:

```



```

> m5:=multiply(ID,m):
> M5:=multiply(transpose(R),m5,R);
> k5:=multiply(ID,k);
> K5:=multiply(transpose(R),k5,R);
>B5:=array([[0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0]]):
> Ko5:=multiply(transpose(B5),K5,B5);
> Mo5:=multiply(transpose(B5),M5,B5);
#=====
Element 6
#=====
> e1:=E1*a/L:
> e2:=E1*Ik/L**3:
> e3:=E1*Ik/L**2:
> e4:=E1*Ik/L:
> L:=L6;
s:=0;
c:=1;
Ik:=0.3*0.6^3/12;
> a:=0.6*0.3;
> me:=rho1*a*L:#rho=material mass density
> m6:=multiply(ID,m):
> M6:=multiply(transpose(R),m6,R);
> k6:=multiply(ID,k);
> K6:=multiply(transpose(R),k6,R);
>B6:=array([[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]):
> Ko6:=multiply(transpose(B6),K6,B6);
> Mo6:=multiply(transpose(B6),M6,B6);
#=====
Element 7
#=====
> e1:=E2*a/L:
> e2:=E2*Ik/L**3:
> e3:=E2*Ik/L**2:
> e4:=E2*Ik/L:
> L:=L7;
s:=0;
c:=1;
Ik:=0.3*0.6^3/12;
> a:=0.6*0.3;
> me:=rho2*a*L:#rho=material mass density
> m7:=multiply(ID,m):
> M7:=multiply(transpose(R),m7,R);
> k7:=multiply(ID,k);
> K7:=multiply(transpose(R),k7,R);
>B7:=array([[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,
1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]]):

```



```

#####>
omeg:=evalf(Eigenvals(Kttstar,Mtt,vecs));
> o1:=9: o2:=10: o3:=8: o4:=7: o5:=6: o6:=5: o7:=4: o8:=3: o9:=2:
o10:=1:
> omega1:=omeg[o1];
> omega2:=omeg[o2];
> omega3:=omeg[o3];
> omega4:=omeg[o4];
> omega5:=omeg[o5];
> omega6:=omeg[o6];
> omega7:=omeg[o7];
> omega8:=omeg[o8];
> omega9:=omeg[o9];
> omega10:=omeg[o10];
> print(vecs);
> #####=Normalization
#####
> v1 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 9..9);
> c:=multiply(transpose(v1),Mtt,v1);
> c1:=c[1,1];
> mu[1]:=1/sqrt(c1);
> phi[1]:=scalarmul(v1,mu[1]);
> v2 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 10..10);
> c:=multiply(transpose(v2),Mtt,v2);
> c2:=c[1,1];
> mu[2]:=1/sqrt(c2);
> phi[2]:=scalarmul(v2,mu[2]);
> phi[2][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,phi[2]);
> v3 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 8..8);
> c:=multiply(transpose(v3),Mtt,v3);
> c3:=c[1,1];
> mu[3]:=1/sqrt(c3);
> phi[3]:=scalarmul(v3,mu[3]);
> phi[3][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,phi[3]);
> v4 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 7..7);
> c:=multiply(transpose(v4),Mtt,v4);
> c4:=c[1,1];
> mu[4]:=1/sqrt(c4);
> phi[4]:=scalarmul(v4,mu[4]);
> phi[4][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,phi[4]);
> v5 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 6..6);
> c:=multiply(transpose(v5),Mtt,v5);
> c5:=c[1,1];
> mu[5]:=1/sqrt(c5);
> phi[5]:=scalarmul(v5,mu[5]);
> phi[5][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,phi[5]);
> v6 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 5..5);
> c:=multiply(transpose(v6),Mtt,v6);

```

```

> c6:=c[1,1];
> mu[6]:=1/sqrt(c6);
> phi[6]:=scalarmul(v6,mu[6]);
> phi[6][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,phi[6]);
> v7 := linalg[submatrix](vecs, 1..10, 4..4);
> c:=multiply(transpose(v7),Mtt,v7);
> c7:=c[1,1];
> mu[7]:=1/sqrt(c7);
> phi[7]:=scalarmul(v7,mu[7]);
> phi[7][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,phi[7]);
> v8:= linalg[submatrix](vecs, 1..10, 3..3);
> c:=multiply(transpose(v8),Mtt,v8);
> c8:=c[1,1];
> mu[8]:=1/sqrt(c8);
> phi[8]:=scalarmul(v8,mu[8]);
> phi[8][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,phi[8]);
> v9:= linalg[submatrix](vecs, 1..10, 2..2);
> c:=multiply(transpose(v9),Mtt,v9);
> c9:=c[1,1];
> mu[9]:=1/sqrt(c9);
> phi[9]:=scalarmul(v9,mu[9]);
> phi[9][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[9]),Mtt,phi[9]);
> v10:= linalg[submatrix](vecs, 1..10, 1..1);
> c:=multiply(transpose(v10),Mtt,v10);
> c10:=c[1,1];
> mu[10]:=1/sqrt(c10);
> phi[10]:=scalarmul(v10,mu[10]);
> phi[10][1,1];
> test:=multiply(transpose(phi[10]),Mtt,phi[10]);
#=====
Initial Conditions
#=====
> u0:=array([[0.1],[0],[0.1],[0],[0.1],[0],[0.1],[0],[0.1],[0]]);
> u0t:=array([[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0],[0]]);
> y10:=multiply(transpose(phi[1]),Mtt,u0);
> y10t:=multiply(transpose(phi[1]),Mtt,u0t);
> Y10:=y10[1,1];
> Y10t:=y10t[1,1];
> y20:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,u0);
> y20t:=multiply(transpose(phi[2]),Mtt,u0t);
> Y20:=y20[1,1];
> Y20t:=y20t[1,1];
> y30:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,u0);
> y30t:=multiply(transpose(phi[3]),Mtt,u0t);
> Y30:=y30[1,1];
> Y30t:=y30t[1,1];
> y40:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,u0);
> y40t:=multiply(transpose(phi[4]),Mtt,u0t);

```

```

> Y40:=y40[1,1];
> Y40t:=y40t[1,1];
> y50:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,u0);
> y50t:=multiply(transpose(phi[5]),Mtt,u0t);
> Y50:=y50[1,1];
> Y50t:=y50t[1,1];
> y60:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,u0);
> y60t:=multiply(transpose(phi[6]),Mtt,u0t);
> Y60:=y60[1,1];
> Y60t:=y60t[1,1];
> y70:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,u0);
> y70t:=multiply(transpose(phi[7]),Mtt,u0t);
> Y70:=y70[1,1];
> Y70t:=y70t[1,1];
> y80:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,u0);
> y80t:=multiply(transpose(phi[8]),Mtt,u0t);
> Y80:=y80[1,1];
> Y80t:=y80t[1,1];
> y90:=multiply(transpose(phi[9]),Mtt,u0);
> y90t:=multiply(transpose(phi[9]),Mtt,u0t);
> Y90:=y90[1,1];
> Y90t:=y90t[1,1];
> y100:=multiply(transpose(phi[10]),Mtt,u0);
> y100t:=multiply(transpose(phi[10]),Mtt,u0t);
> Y100:=y100[1,1];
> Y100t:=y100t[1,1];
> xi1:=0.05;
> xi2:=0.1;
> omegad1:=((omega1)*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad2:=((omega2)*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad3:=((omega3)*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad4:=((omega4)*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad5:=((omega5)*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad6:=((omega6)*(1-xi2^2))^0.5;
> omegad7:=((omega7)*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad8:=((omega8)*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad9:=((omega9)*(1-xi1^2))^0.5;
> omegad10:=((omega10)*(1-xi1^2))^0.5;
> Y1:=exp(1)^(-
xi1*omega1^0.5*t)*((Y10t+Y10*xi1*omega1^0.5)/omegad1*sin(omegad1*t)+Y10
*cos(omegad1*t));
> Y2:=exp(1)^(-
xi1*omega2^0.5*t)*((Y20t+Y20*xi1*omega2^0.5)/omegad2*sin(omegad2*t)+Y20
*cos(omegad2*t));
> Y3:=exp(1)^(-
xi2*omega3^0.5*t)*((Y30t+Y30*xi2*omega3^0.5)/omegad3*sin(omegad3*t)+Y30
*cos(omegad3*t));
> Y4:=exp(1)^(-
xi2*omega4^0.5*t)*((Y40t+Y40*xi2*omega4^0.5)/omegad4*sin(omegad4*t)+Y40
*cos(omegad4*t));

```

```

> Y5:=exp(1)^(-
xi2*omega5^0.5*t)*((Y50t+Y50*xi2*omega5^0.5)/omegad5*sin(omegad5*t)+Y50
*cos(omegad5*t));
> Y6:=exp(1)^(-
xi2*omega6^0.5*t)*((Y60t+Y60*xi2*omega6^0.5)/omegad1*sin(omegad6*t)+Y60
*cos(omegad6*t));
> Y7:=exp(1)^(-
xi1*omega7^0.5*t)*((Y70t+Y70*xi1*omega7^0.5)/omegad7*sin(omegad7*t)+Y70
*cos(omegad7*t));
> Y8:=exp(1)^(-
xi1*omega8^0.5*t)*((Y80t+Y80*xi1*omega8^0.5)/omegad8*sin(omegad8*t)+Y80
*cos(omegad8*t));
> Y9:=exp(1)^(-
xi1*omega9^0.5*t)*((Y90t+Y10*xi1*omega9^0.5)/omegad9*sin(omegad9*t)+Y90
*cos(omegad9*t));
> Y10:=exp(1)^(-
xi1*omega10^0.5*t)*((Y100t+Y100*xi1*omega10^0.5)/omegad10*sin(omegad10*
t)+Y100*cos(omegad10*t));
#=====
Solution of the problem
#=====
>ut1:=Y1*phi[1][1,1]+Y2*phi[2][1,1]+Y3*phi[3][1,1]+Y4*phi[4][1,1]+Y5*ph
i[5][1,1]+Y6*phi[6][1,1]+Y7*phi[7][1,1]+Y8*phi[8][1,1]+Y9*phi[9][1,1]+Y
10*phi[10][1,1];
>ut2:=Y1*phi[1][2,1]+Y2*phi[2][2,1]+Y3*phi[3][2,1]+Y4*phi[4][2,1]+Y5*ph
i[5][2,1]+Y6*phi[6][2,1]+Y7*phi[7][2,1]+Y8*phi[8][2,1]+Y9*phi[9][2,1]+Y
10*phi[10][2,1];
>ut3:=Y1*phi[1][3,1]+Y2*phi[2][3,1]+Y3*phi[3][3,1]+Y4*phi[4][3,1]+Y5*ph
i[5][3,1]+Y6*phi[6][3,1]+Y7*phi[7][3,1]+Y8*phi[8][3,1]+Y9*phi[9][3,1]+Y
10*phi[10][3,1];
>ut4:=Y1*phi[1][4,1]+Y2*phi[2][4,1]+Y3*phi[3][4,1]+Y4*phi[4][4,1]+Y5*ph
i[5][4,1]+Y6*phi[6][4,1]+Y7*phi[7][4,1]+Y8*phi[8][4,1]+Y9*phi[9][4,1]+Y
10*phi[10][4,1];
>ut5:=Y1*phi[1][5,1]+Y2*phi[2][5,1]+Y3*phi[3][5,1]+Y4*phi[4][5,1]+Y5*ph
i[5][5,1]+Y6*phi[6][5,1]+Y7*phi[7][5,1]+Y8*phi[8][5,1]+Y9*phi[9][5,1]+Y
10*phi[10][5,1];
>ut6:=Y1*phi[1][6,1]+Y2*phi[2][6,1]+Y3*phi[3][6,1]+Y4*phi[4][6,1]+Y5*ph
i[5][6,1]+Y6*phi[6][6,1]+Y7*phi[7][6,1]+Y8*phi[8][6,1]+Y9*phi[9][6,1]+Y
10*phi[10][6,1];
>ut7:=Y1*phi[1][7,1]+Y2*phi[2][7,1]+Y3*phi[3][7,1]+Y4*phi[4][7,1]+Y5*ph
i[5][7,1]+Y6*phi[6][7,1]+Y7*phi[7][7,1]+Y8*phi[8][7,1]+Y9*phi[9][7,1]+Y
10*phi[10][7,1];
>ut8:=Y1*phi[1][8,1]+Y2*phi[2][8,1]+Y3*phi[3][8,1]+Y4*phi[4][8,1]+Y5*ph
i[5][8,1]+Y6*phi[6][8,1]+Y7*phi[7][8,1]+Y8*phi[8][8,1]+Y9*phi[9][8,1]+Y
10*phi[10][8,1];
>ut9:=Y1*phi[1][9,1]+Y2*phi[2][9,1]+Y3*phi[3][9,1]+Y4*phi[4][9,1]+Y5*ph
i[5][9,1]+Y6*phi[6][9,1]+Y7*phi[7][9,1]+Y8*phi[8][9,1]+Y9*phi[9][9,1]+Y
10*phi[10][9,1];
>ut10:=Y1*phi[1][10,1]+Y2*phi[2][10,1]+Y3*phi[3][10,1]+Y4*phi[4][10,1]+
Y5*phi[5][10,1]+Y6*phi[6][10,1]+Y7*phi[7][10,1]+Y8*phi[8][10,1]+Y9*phi[
9][10,1]+Y10*phi[10][10,1];
> plot(ut1,t=0..2);

```



```
> plot(ut2,t=0..2);  
> plot(ut3,t=0..2);  
> plot(ut4,t=0..2);  
> plot(ut5,t=0..2);  
> plot(ut6,t=0..2);  
> plot(ut7,t=0..2);  
> plot(ut8,t=0..2);  
> plot(ut9,t=0..2);  
> plot(ut10,t=0..2);
```

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Ι.Θ. Κατσικαδέλης, *Δυναμική των Κατασκευών*, ΤΟΜΟΣ Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, 2002.
2. Ι.Θ. Κατσικαδέλης, *Δυναμική των Κατασκευών*, ΤΟΜΟΣ ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία, 2002.
3. Θ. Παπαγεωργίου, *Σεισμικές Αναλύσεις Μικτών Συστημάτων από Σκυρόδεμα και Χάλυβα*, Διπλωματική Εργασία Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Δομοστατικός σχεδιασμός και ανάλυση κατασκευών», Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείου.
4. Ελληνικός Κανονισμός Ωπλισμένου Σκυροδέματος 2000.